УДК 535.537.29 : 548.0

НОВЫЙ МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ ЛИНЕЙНОГО ЭЛЕКТРООПТИЧЕСКОГО ЭФФЕКТА

В. Стадник

Предлагается использовать формулы преобразования прямоугольных координат, выраженные через углы Эйлера, для изучения линейного электрооптического эффекта. Метод иллюстрируется на примере кристаллов симметрии $\bar{4}2m$.

В работе показано, каким образом можно использовать уравнения преобразований, содержащие углы Эйлера, при исследовании линейного электрооптического эффекта для кристаллов класса $\bar{4}2\ m$ (сюда принадлежат, например, кристаллы ADP, KDP и др.). Используемый метод позволяет получить для любого направления вектора волновой нормали соответствующие показатели преломления, которые определяют фазовые скорости распространения световых волн и их направления поляризации, определить, при каких условиях проявляются линейный и квадратичный электрооптические эффекты и являются ли они непрерывными или нет. (Об электрооптике см. [1], где указана обширная литература).

Пусть покоящаяся прямоугольная координатная система $(\bar{x},\ \bar{y},\ \bar{z})$ является одновременно тензорной координатной системой [2]. Направляющие косинусы между системой $(\bar{x},\ \bar{y},\ \bar{z})$ и любой другой координатной системой $(x,\ y,\ z)$, выраженные с помощью углов Эйлера $(\vartheta,\ \varphi,\ \psi)$, приведены в таблице. Предположим, что вектор волновой нормали светового луча направлен по оси z. Эллипс, который возникнет при пересечении эллипсоида показателей преломления с плоскостью $z=0$, лежит в плоскости $(x,\ y)$ и повернут на угол ψ.

Направляющие косинусы между осями координатных систем $(\bar{x},\ \bar{y},\ \bar{z})$ и $(x,\ y,\ z)$, выраженные с помощью углов Эйлера $(\varphi,\ \vartheta,\ \psi)$; $c_1=\cos\varphi,\ c_2=\cos\vartheta,\ c_3=\cos\psi,\ s_1=\sin\varphi,\ s_2=\sin\vartheta,\ s_3=\sin\psi$

	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{z}$
x	$\alpha_1=c_1c_2c_3-s_1s_3$	$\alpha_2=s_1c_2c_3+c_1s_3$	$\alpha_3=-s_2c_3$
y	$\beta_1=-c_1c_2s_3-s_1c_3$	$\beta_2=-s_1c_2s_3+c_1c_3$	$\beta_3=s_2s_3$
z	$\gamma_1=c_1s_2$	$\gamma_2=s_1s_2$	$\gamma_3=c_2$

Если уравнение показателей преломления в системе $(\bar{x},\ \bar{y},\ \bar{z})$ для кристаллического класса $\bar{4}2m$

$$o^2(\bar{x}^2+\bar{y}^2)+e^2\bar{z}^2+2r_{41}\bar{z}\,(E_{\bar{x}}\bar{y}+E_{\bar{y}}\bar{x})+2r_{63}E_{\bar{z}}\bar{x}\bar{y}=1 \tag{1}$$

переписать с использованием следующих выражений при $z=0$,

$$\bar{x}=\alpha_1x+\beta_1y+\gamma_1z,\quad E_{\bar{x}}=\alpha_1E_x+\beta_1E_y+\gamma_1E_z,$$
$$\bar{y}=\alpha_2x+\beta_2y+\gamma_2z,\quad E_{\bar{y}}=\alpha_2E_x+\beta_2E_y+\gamma_2E_z,$$
$$\bar{z}=\alpha_3x+\beta_3y+\gamma_3z,\quad E_{\bar{z}}=\alpha_3E_x+\beta_3E_y+\gamma_3E_z,$$

то получим уравнение искомого эллипса в виде

$$\begin{gathered}x^2 \{(\alpha_1^2+\alpha_2^2)\,\sigma^2+\alpha_3^2 e^2+2E_x(2r_{41}+r_{63})\,\alpha_1\alpha_2\alpha_3+2E_y[r_{41}(\alpha_2\alpha_3\beta_1+\alpha_1\alpha_3\beta_2)+r_{63}\alpha_1\alpha_2\beta_3]+\\+2E_z[r_{41}(\alpha_2\alpha_3\gamma_1+\alpha_1\alpha_3\gamma_2)+r_{63}\alpha_1\alpha_2\gamma_3]\}+y^2\{\beta_1^2+\beta_2^2)\,\sigma^2+\beta_3^2e^2+2E_x[r_{41}(\alpha_1\beta_2\beta_3+\\+\alpha_2\beta_1\beta_3)+r_{63}\alpha_3\beta_1\beta_2]+2E_y(2r_{41}+r_{63})\,\beta_1\beta_2\beta_3+2E_z[r_{41}(\beta_2\beta_3\gamma_1+\beta_1\beta_3\gamma_2)+r_{63}\beta_1\beta_2\gamma_3]\}+\\+2xy\{(\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2)\,\sigma^2+\alpha_3\beta_3e^2+E_x[r_{41}\alpha_1(\alpha_2\beta_3+\alpha_3\beta_2)+r_{41}\alpha_2(\alpha_1\beta_3+\beta_1\alpha_3)+\\+r_{63}\alpha_3(\alpha_1\beta_2+\beta_1\alpha_2)]+E_y[r_{41}\beta_1(\alpha_2\beta_3+\alpha_3\beta_2)+r_{41}\beta_2(\alpha_1\beta_3+\beta_1\alpha_3)+r_{63}\beta_3(\alpha_1\beta_2+\beta_1\alpha_2)]+\\+E_z[r_{41}\gamma_1(\alpha_2\beta_3+\alpha_3\beta_2)+r_{41}\gamma_2(\alpha_1\beta_3+\beta_1\alpha_3)+r_{63}\gamma_3(\alpha_1\beta_2+\beta_1\alpha_2)]\}=1. \qquad (2)\end{gathered}$$

Продольный электрооптический эффект

Уравнение (2) при условиях $E_x=E_y=0$ и α_i, β_i, γ_i $(i=1, 2, 3)$ при $c_3=1$, $s_3=0$

$$x^2(A+\alpha)+y^2(B+\beta)+xy\gamma=1, \qquad (4)$$

где

$$\left.\begin{gathered}A=\sigma^2+(e^2-\vartheta^2)\sin^2\vartheta,\\ B=\sigma_1^2,\\ \alpha=E_z(-r_{41}\sin 2\varphi\sin 2\vartheta\sin\vartheta+r_{63}\sin 2\varphi\cos^3\vartheta),\\ \beta=-E_zr_{63}\sin 2\varphi\cos\vartheta,\\ \gamma=2E_z(-r_{41}\sin^2\vartheta+r_{63}\cos^2\vartheta)\cos 2\varphi\end{gathered}\right\} \qquad (5)$$

является уравнением продольного электрооптического эффекта.

Выражение (4) при условиях (5) будет в дальнейшем изучено для $(\varphi, \vartheta)\in\langle 0, \pi)\times\langle 0, \pi)$.

1. Случай $A\neq B$ будет иметь место при $\varphi\in\langle 0, \pi)$ и $\vartheta\neq 0$ он распадается на четыре:

а) $\alpha=0$ $(\beta=0)$, $\gamma=0$ при $\varphi=\pi/4$, $3\pi/4$; $\vartheta=\pi/2$.

В этом случае из (4) следует, что продольный электрооптический эффект (ПЭЭ) отсутствует.

б) $\alpha=0$ $(\beta=0)$, $\gamma\neq 0$ при $\varphi=0$, $\pi/2$; $\vartheta\in(0, \pi)$ и при

$$\varphi\in\langle 0, \pi/4), (\pi/4, 3\pi/4), (3\pi/4, \pi);\ \vartheta=\pi/2. \qquad (6)$$

Тогда $n_x=\dfrac{1}{\sqrt{A}}\left[1-\dfrac{\gamma^2}{8A(A-B)}\right]$, $n_y=\dfrac{1}{\sqrt{B}}\left[1+\dfrac{\gamma^2}{8B(A-B)}\right]$ и $\mathrm{Ag}\,2\psi=\dfrac{\gamma}{A-B}$.

В этом случае имеет место только квадратичный ПЭЭ.

в) $\alpha\neq 0$ $(\beta\neq 0)$, $y=0$ при

$$\varphi=\pi/4,\ 3\pi/4 \text{ и } \vartheta\in(0, \pi/2), (\pi/2, \pi). \qquad (7)$$

Здесь $n_x=\dfrac{1}{\sqrt{A}}\left(1-\dfrac{\alpha}{2A}\right)$, $n_y=\dfrac{1}{\sqrt{B}}\left(1-\dfrac{\beta}{2B}\right)$ и $\mathrm{Ag}\,2\psi=0$.

Только линейный ПЭЭ имеет место.

г) $\alpha\neq 0$ $(\beta\neq 0)$, $\gamma\neq 0$ при

$$\varphi\in(0, \pi/4), (\pi/4, \pi/2), (\pi/2, 3\pi/4), (3\pi/4, \pi) \text{ и } \vartheta\in(0, \pi/2), (\pi/2, \pi). \qquad (8)$$

Здесь $n_x=\dfrac{1}{\sqrt{A}}\left\{1-\dfrac{1}{2A}\left[\alpha+\dfrac{\gamma^2}{4[A+\alpha-(B+\beta)]}\right]\right\}$, $n_y=\dfrac{1}{\sqrt{B}}\left\{1-\dfrac{1}{2B}\times\right.$ $\left.\times\left[\beta-\dfrac{\gamma^2}{4[A+\alpha-(B+\beta)]}\right]\right\}$, $\mathrm{Ag}\,2\psi=\dfrac{\gamma}{A+\alpha-(B-\beta)}$. В этом случае имеют место линейный и квадратичный ПЭЭ.

2. Случай $A=B$ имеет место при $\varphi\in\langle 0, \pi$ и $\vartheta=0$ и распадается на три следующих: а) $\alpha=0$ $(\beta=0)$, $\gamma\neq 0$ при $\varphi=0$, $\pi/2$ и $\vartheta=0$; б) $\alpha\neq 0$ $(\beta\neq 0)$, $\gamma=0$ при $\varphi=\pi/4$, $3\pi/4$ и $\vartheta=0$; в) $\alpha\neq 0$ $(\beta\neq 0)$, $\gamma\neq 0$ при $\varphi\in(0, \pi/4)$, $(\pi/4, \pi/2)$, $(\pi/2, 3\pi/4)$, $(3\pi/4, \pi)$ и $\vartheta=0$.

Рассмотрение показывает, что этим случаям отвечает только линейный ПЭЭ, который при $\varphi = 0$ характеризуется величинами $n_x = \frac{1}{\sigma}\left(1 - \frac{E_z}{2\sigma^2} r_{63}\right)$, $n_y = \frac{1}{\sigma}\left(1 + \frac{E_z}{2\sigma^2} r_{63}\right)$, $\psi = \pi/4$.

Графическое изображение полученных выше результатов представлено на рис. 1. Если взять конкретные материалы, то получаем еще два случая: $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$, $\gamma = 0$ и $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$, $\gamma \neq 0$ в зависимости от величин электрооптических коэффициентов r_{41} и r_{63}.

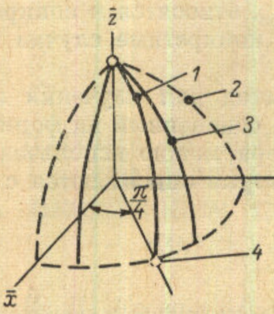

Рис. 1. Графическое изображение линейного ПЭЭ для кристаллов класса $\bar{4}2m$.

1 — линейный, *2* — квадратичный, *3* — линейный и квадратичный, *4* — отсутствуют.

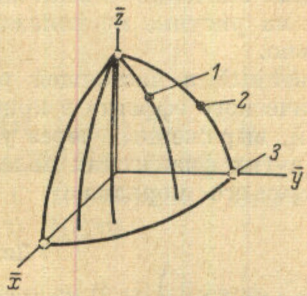

Рис. 2. Графическое изображение линейного ТЭЭ для кристаллов класса $\bar{4}2m$.

1 — линейный (симметричный) и квадратичный, *2* — линейный (несимметричный) и квадратичный, *3* — отсутствуют.

Поперечный электрооптический эффект

Уравнение эллипса для поперечного электрооптического эффекта получается, если в (2) $E_z = 0$ и α_i, β_i, γ_i $(i = 1, 2, 3)$ при $c_3 = 1$ и $s_3 = 0$

$$x^2 (A + \bar\alpha) + y^2 (B + \bar\beta) + xy\bar\gamma = 1, \tag{9}$$

где

$$\left.\begin{aligned} \bar\alpha &= -E_x\left(r_{41} + \frac{r_{63}}{2}\right)\sin 2\varphi \sin 2\vartheta \cos\vartheta - E_y r_{41} \cos 2\varphi \sin 2\vartheta, \\ \bar\beta &= E_x r_{63} \sin 2\varphi \sin\vartheta, \\ \bar\gamma &= -E_x (r_{41} + r_{63}) \cos 2\varphi \sin 2\vartheta + 2E_y r_{41} \sin 2\varphi \sin\vartheta. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

1. Случай $A = B$ имеет место при $\varphi \in \langle 0, \pi)$; $\vartheta \neq 0$. Он распадается на четыре следующих:

а) $\bar\alpha = 0$, $\bar\beta = 0$, $\bar\gamma = 0$ при $\varphi = 0, \pi/2$ и $\vartheta = \pi/2$. (11)

Здесь $n_x = 1/\sqrt{A}$, $n_y = 1/\sqrt{B}$, $\operatorname{tg} 2\psi = 0$ и из (9) при условиях (11) получаем, что поперечный электрооптический эффект (ТЭЭ) отсутствует.

б) $\bar\alpha = 0$, $\bar\beta \neq 0$, $\bar\gamma \neq 0$ при $\varphi \in (0, \pi/2)$, $(\pi/2, \pi)$ и $\vartheta = \pi/2$. (12)

Здесь $n_x = \frac{1}{\sqrt{A}}\left[1 - \frac{\bar\gamma^2}{8A(A - B - \bar\beta)}\right]$, $n_y = \frac{1}{\sqrt{B}}\left\{1 - \frac{1}{2B}\left[\bar\beta - \frac{\bar\gamma^2}{4(A - B - \bar\beta)}\right]\right\}$ и $\operatorname{tg} 2\psi = \frac{\bar\gamma}{A - B - \bar\beta}$.

Из (9) следует, что этому случаю отвечают линейный и квадратичный ТЭЭ.

в) $\bar\alpha \neq 0$, $\bar\beta = 0$, $\bar\gamma \neq 0$ при $\varphi = 0$, $\pi/2$ и $\vartheta \in (0, \pi/2)$, $(\pi/2, \pi)$. (13)

При этом $n_x = \frac{1}{\sqrt{A}}\left\{1 - \frac{1}{2A}\left[\bar\alpha + \frac{\bar\gamma^2}{4(A - B + \bar\alpha)}\right]\right\}$, $n_y = \frac{1}{\sqrt{B}}\left[1 + \frac{\bar\gamma^2}{\gamma B(A - B + \bar\alpha)}\right]$, $\operatorname{tg} 2\psi = \frac{\bar\gamma}{A - B + \bar\alpha}$. Имеют место линейный и квадратичный ТЭЭ.

г) $\bar\alpha \neq 0$, $\bar\beta \neq 0$, $\bar\gamma \neq 0$ при $\varphi \in (0, \pi/2)$, $(\pi/2, \pi)$; $\vartheta \in (0, \pi/2)$, $(\pi/2, \pi)$. (14)

Здесь $n_x = \frac{1}{\sqrt{A}} \left\{ 1 - \frac{1}{2A} \left[\bar{\alpha} + \frac{\bar{\gamma}^2}{4[A + \bar{\alpha} - (B + \bar{\beta})]} \right] \right\}$, $n_y = \frac{1}{\sqrt{B}} \left\{ 1 - \frac{1}{2B} \left[\bar{\beta} - \frac{\bar{\gamma}^2}{4[A + \bar{\alpha} - (B + \bar{\beta})]} \right] \right\}$, $\operatorname{tg} 2\psi = \frac{\bar{\gamma}}{A - B + \bar{\alpha} - \bar{\beta}}$. Этому случаю отвечают линейный и квадратичный ТЭЭ.

2. Случай $A = B$ имеет место при $\varphi \in \langle 0, \pi)$ и $\vartheta = 0$. При этом $\bar{\alpha} = \bar{\beta} = \bar{\gamma} = 0$ и ТЭЭ отсутствует.

Графическое изображение ТЭЭ представлено на рис. 2. Случаи, характеризуемые значениями величин r_{41} и r_{63}, относятся к конкретным материалам и на рисунке не показаны. Эти конкретные случаи надо изучить отдельно.

Предложенный в настоящей работе метод для изучения линейного электрооптического эффекта в кристаллах, основанный на формулах преобразований, выраженных через углы Эйлера, можно использовать и для изучения других физических явлений, которые описываются с помощью тензоров третьего порядка.

Литература

[1] Е. П. Мустель, В. Н. Парыгин. Методы модуляции и сканирования света, М., 1970.
[2] Дж. Най. Физические свойства кристаллов, ИЛ, М., 1967.

Институт радиотехники и электроники
Чехословацкой академии наук.

Поступило в Редакцию 5 марта 1971 г.