Известия Гомельского государственного университета имени Ф.Скорины. — 1999. — №1(15) Вопросы алгебры. — С. 60–63

УДК 512.542

В. В. Аниськов

РАЗРЕШИМЫЕ ЛОКАЛЬНЫЕ ФОРМАЦИИ С π-НИЛЬПОТЕНТНЫМ ДЕФЕКТОМ 2

Рассматриваются только конечные группы. Используются стандартные определения и обозначения [1-3].

Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ — произвольные локальные формации. Если решетка $\mathfrak{F}/_l(\mathfrak{H} \cap \mathfrak{F})$ локальных формаций имеет конечную длину m, то число m называют $\mathfrak{H}$-дефектом формации $\mathfrak{F}$ [3]. В настоящей работе дается полная классификация разрешимых локальных формаций с π-нильпотентным дефектом 2.

Локальная формация $\mathfrak{F}$ называется приводимой, если она может быть представлена в виде объединения всех своих собственных локальных подформаций в решетке локальных формаций.

Описание локальных формаций с заданным $\mathfrak{H}$-дефектом делится на приводимый и неприводимый случаи.

Поскольку формация всех π-нильпотентных групп является 2-кратно локальной, то приводимый случай следует непосредственно из теоремы 2 [4].

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — разрешимая приводимая локальная формация. Тогда и только тогда π-нильпотентный дефект формации $\mathfrak{F}$ равен 2, когда выполняется одно из следующих условий:*

1) $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee_l \mathfrak{H}_1 \vee_l \mathfrak{H}_2$, где $\mathfrak{M}$ — некоторая π-нильпотентная локальная подформация формации $\mathfrak{F}$, а $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$ — различные минимальные локальные не π-нильпотентные формации;

2) $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee_l \mathfrak{H}$, где $\mathfrak{M}$ — некоторая π-нильпотентная локальная подформация формации $\mathfrak{F}$, а $\mathfrak{H}$ — неприводимая локальная формация с π-нильпотентным дефектом 2.

Описание локальных формаций в неприводимом случае дает следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{F}$ — разрешимая локальная формация. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ — неприводимая локальная формация с π-нильпотентным дефектом 2, когда $\mathfrak{F} = l\mathrm{form}G$, где G — такая монолитическая группа с монолитом P, что $G = P \leftthreetimes H$, $P = C_G(P)$ — r-группа для некоторого простого r, H — монолитическая группа с монолитом Q и выполняется одно из следующих условий:*

1) $r \in \pi, |\pi(F)| = 2$, группа H π-нильпотентна и либо $l\mathrm{form}H$ — 2-максимальная локальная подформация формации $\mathfrak{F}$, либо H — одна из следующих групп —

а) простая неабелева группа порядка q^3 простой нечетной экспоненты $q \in \pi'$;

б) циклическая примарная группа порядка q^2, $q \in \pi'$;

2) $|\pi(\mathfrak{F})| = 3, H = Q \rightthreetimes S$, где $Q = C_H(Q)$ — p-группа для некоторого $p \in \pi, S = T \rightthreetimes L$, где T — минимальная нормальная t-подгруппа группы S, а L — элементарная абелева p-подгруппа группы S, причем $r \neq t$ и $t \in \pi'$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $\mathfrak{F}_1$ — максимальная локальная подформация формации $\mathfrak{F}$. Тогда, ввиду неприводимости формации $\mathfrak{F}$, формация $\mathfrak{F}_1$ является единственной максимальной локальной подформацией формации $\mathfrak{F}$ и имеет π-нильпотентный дефект 1. Согласно теореме 1 [4], $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{M}V_l\mathfrak{H}$, где $\mathfrak{M}$ — некоторая π-нильпотентная локальная подформация формации $\mathfrak{F}$, а $\mathfrak{H}$ — минимальная локальная не π-нильпотентная формация.

Класс всех π-нильпотентных групп совпадает с классом $\mathfrak{G}_{\pi'}\mathfrak{N}_\pi$. По условию, $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{G}_{\pi'}\mathfrak{N}_\pi$, но $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{G}_{\pi'}\mathfrak{N}_\pi$. Поэтому формация $\mathfrak{F}$ является минимальной локальной не $\mathfrak{G}_{\pi'}\mathfrak{N}_\pi V_l\mathfrak{H}$-формацией. Пусть f — минимальный локальный экран формации $\mathfrak{F}$, а h — максимальный внутренний локальный экран формации $\mathfrak{G}_{\pi'}\mathfrak{N}_\pi V_l\mathfrak{H}$. Согласно следствию 18.5 [2], $\mathfrak{F} = l\mathrm{form}K$, где K — такая монолитическая группа с монолитом L, что $f(q)$ — минимальная не $h(q)$-формация для всякого простого $q \in \pi(L)$. Поскольку $\mathfrak{G}_{\pi'}\mathfrak{N}_\pi V_l\mathfrak{H}$ — насыщенная формация, то $L \not\subseteq \Phi(K)$. Поэтому найдется такая максимальная подгруппа D группы K, что $K = L \rightthreetimes D$. Значит, $L = C_K(L)$. Кроме того, поскольку $\mathfrak{F}$ разрешима, то L — q-группа для некоторого простого $q \in \pi(K)$.

Ввиду разрешимости формации $\mathfrak{F}$ и теоремы 18.16 [2], $\mathfrak{H} = l\mathrm{form}M$, где $M = R \rightthreetimes H$ — монолитическая группа с монолитом $R = C_M(R)$, а $H = Q \rightthreetimes S$ — монолитическая группа с монолитом $Q = C_H(Q)$; при этом R — p-группа для некоторого $p \in \pi \cap \pi(M)$, S — p-группа, а Q — s-группа для некоторого $s \in \pi' \cap \pi(M)$. Используя следствие 7.14 [2], легко показать, что экран h имеет следующие значения: $h(q) = \mathfrak{N}_p\mathrm{form}(H \cup \mathfrak{N}_\pi)$, если $q = p$; $h(q) = \mathfrak{N}_q\mathrm{form}((M/F_q(M)) \cup \mathfrak{N}_\pi)$, если $q \in \pi \cap \pi(G)$ и $h(q) = \mathfrak{G}_{\pi'}\mathfrak{N}_\pi$ для всякого простого $q \notin \pi(M)$. Поскольку для всякого простого $t \in \pi$, всякая π-нильпотентная группа является t-нильпотентной, то p-нильпотентный дефект формации $\mathfrak{F}$ очевидно не может быть больше 2. Предположим, что p-нильпотентный дефект формации $\mathfrak{F}$ равен 0. Тогда формация $\mathfrak{F}$ p-нильпотентна. Поэтому p-нильпотентна группа M, что противоречит ее монолитичности. Значит, p-нильпотентный дефект формации $\mathfrak{F}$ не может быть равен 0.

Пусть p-нильпотентный дефект формации $\mathfrak{F}$ равен 1. Ввиду теоремы 1 [4], $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}_1 V_l \mathfrak{H}_1$, где $\mathfrak{M}_1$ — некоторая p-нильпотентная локальная формация, а $\mathfrak{H}_1$ — минимальная локальная не p-нильпотентная формация. Но формация $\mathfrak{F}$ неприводима. Поэтому $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}_1 = l\mathrm{form}B$, где $B = T \leftthreetimes D$ — монолитическая группа с монолитом $T = C_B(T)$, $D = N \leftthreetimes C$ — монолитическая группа с монолитом $N = C_D(N)$; при этом T — p-группа, C — p-группа, а N — s-группа для некоторого простого $s \neq p$. Но в этом случае $\mathfrak{F}$ — минимальная локальная не π-нильпотентная формация. Следовательно, p-нильпотентный дефект формации $\mathfrak{F}$ не может быть равен 1.

Пусть теперь p-нильпотентный дефект формации $\mathfrak{F}$ равен 2. Поскольку $\mathfrak{F}$ — неприводимая локальная формация, то согласно теореме [5], $\mathfrak{F} = l\mathrm{form}G$, где $G = R \leftthreetimes H$ — такая монолитическая группа с монолитом $R = C_G(R)$, что R— r-группа для некоторого простого числа r, а H — такая монолитическая группа с монолитом Q, что выполняется одно из следующих условий:

1) $r = p, |\pi(\mathfrak{F})| = 2, Q \subseteq \Phi(H)$, группа H p-нильпотентна и либо $l\mathrm{form}H$ — 2-максимальная локальная подформация формации $\mathfrak{F}$, либо H — одна из следующих групп —

а) простая неабелева группа порядка q^3 простой нечетной экспоненты $q \neq p$;

б) циклическая примарная группа порядка $q^2, q \neq p$;

2) $r \neq p, H = Q \leftthreetimes S$, где $Q = C_H(Q)$ — p-группа, а $S = T \leftthreetimes P$, где T— минимальная нормальная t-подгруппа группы S для некоторого простого числа $t \neq p$, а P — элементарная абелева p-подгруппа группы S.

Пусть $|\pi(\mathfrak{F})| = 2$. Тогда $|\pi(\mathfrak{F}) \cap \pi| = 1$. Поэтому очевидно, что $r \in \pi$, а $q \in \pi'$ и формация $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию 1) теоремы.

Пусть $|\pi(\mathfrak{F})| \neq 2$. Тогда $|\pi(\mathfrak{F})| = |\pi(G)| = 3$. Это означает в частности, что $t \neq r$. Теперь, используя полученное выше описание максимального внутреннего локального экрана h формации $\mathfrak{G}_{\pi'}\mathfrak{N}_\pi V_l \mathfrak{H}$, нетрудно убедиться, что $p \in \pi, t \in \pi'$ и формация $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию 2) теоремы.

Достаточность устанавливается прямой проверкой с использованием описания максимального внутреннего локального экрана h формации $\mathfrak{G}_{\pi'}\mathfrak{N}_\pi V_l \mathfrak{H}$ и того факта, что локальная формация $\mathfrak{F}$ порождается монолитической группой K с монолитом L, полученных при доказательстве необходимости.

Summary

V.V.Aniskov. Soluble local formations with π-nilpotent defect 2 // Proc. Gomel State Univ. — 1999. — №1(15) Problems in Algebra. — P. 60–63

All groups considered in this paper are finite. Let $\mathfrak{F}$ and $\mathfrak{H}$ be some local formations.If lattice $\mathfrak{F}/_l(\mathfrak{H} \cap \mathfrak{F})$ has finite length m, then m is called $\mathfrak{H}$-defect of local formation $\mathfrak{F}$. In this paper soluble local formations with π-nilpotent defect 2 are discribed.

Литература

1. Шеметков Л.А. Формации конечных групп. — М.: Наука — 1978 — 267 с.

2. Шеметков Л.А., Скиба А.Н. Формации алгебраических систем. — М.: Наука — 1989 — 256 с.

3. Скиба А.Н. Алгебра формаций. — Мн.: Беларуская навука — 1997 — 240 с.

4. Аниськов В.В. О приводимых локальных формациях с заданным $\mathfrak{H}$-дефектом // Весцi АН Беларусi. Сер. физ.-мат. навук. — 1997, № 4. — С. 65–68.

5. Аниськов В.В. Классификация разрешимых неприводимых локальных формаций с p-нильпотентным дефектом 2 // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. - 1995, № 2. — С. 66–69.

Гомельский государственный
университет им. Ф.Скорины

Поступило 07.09.99