Известия Гомельского государственного университета имени Ф.Скорины. — 1999. — №1(15) Вопросы алгебры. — С. 140–144

УДК 512.542

И. В. Близнец, А. Н. Скиба

О $\mathfrak{H}_{\Theta\mathfrak{L}}$-КРИТИЧЕСКИХ ФОРМАЦИЯХ

Все рассматриваемые нами группы конечны. Напомним некоторые определения и обозначения из работы [1].

В дальнейшем класс всех простых групп мы будем обозначать символом $\mathfrak{J}$. Для произвольного класса простых групп $\mathfrak{T}$ через $\mathfrak{T}'$ мы обозначаем множество $\mathfrak{J} \setminus \mathfrak{T}$.

Пусть $\mathfrak{L}$ — произвольный непустой класс простых групп. Тогда всякую функцию вида $f : \mathfrak{L} \cup \{\mathfrak{L}'\} \mapsto \{$формации групп$\}$, принимающую одинаковые значения на изоморфных группах, называют $\mathfrak{L}$-композиционным спутником. В случае, когда Z_p — группа простого порядка p, вместо записи $f(Z_p)$ иногда применяется запись $f(p)$.

Пусть $\mathfrak{L}^+$ — совокупность всех абелевых групп из $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{L}^-$ — совокупность всех неабелевых групп из $\mathfrak{L}$. Тогда записи $\mathrm{Supp}(f)$, $\mathrm{Supp}_+(f)$ и $\mathrm{Supp}_-(f)$ соответственно обозначают множества $\{A \in \mathfrak{L} \cup \{\mathfrak{L}'\} \mid f(A) \neq \varnothing\}$, $\{A \in \mathfrak{L}^+ \cup \{\mathfrak{L}'\} \mid f(A) \neq \varnothing\}$ и $\{A \in \mathfrak{L}^- \cup \{\mathfrak{L}'\} \mid f(A) \neq \varnothing\}$.

Для произвольного множества простых групп $\mathfrak{T}$ символ $E(\mathfrak{T})$ обозначает класс всех таких групп, у которых все композиционные факторы принадлежат классу $(\mathfrak{T})$. По определению единичные группы принадлежат $E(\mathfrak{T})$.

Символом $C^A(G)$ обозначается пересечение всех централизаторов всех таких главных факторов H/K группы G, что $A \in \mathcal{K}(H/K)$ (($C^A(G) = G$, если группа G таковых главных факторов не имеет). Наряду с записью $C^{Z_p}(G)$ мы будем применять более короткую запись $C^p(G)$.

Легко видеть, что $C^A(G) = G_{E(A)'}$, если A — простая неабелева группа и $C^p(G) = G_{\mathfrak{S}_{cp}}$, где $\mathfrak{S}_{cp}$ — класс всех таких групп [2], у которых все главные абелевы p-факторы центральны.

Для произвольного $\mathfrak{L}$-композиционного спутника f полагают $CF_{\mathfrak{L}}(f) = \{G \mid G/G_{E\mathfrak{L}} \in f(\mathfrak{L}')$ и $G/C^A(G) \in f(A)$ для всех $A \in \mathcal{K}(G) \cap \mathfrak{L}\}$.

Если формация $\mathfrak{F}$ такова, что $\mathfrak{F} = CF_{\mathfrak{L}}(f)$ для некоторого $\mathfrak{L}$-композиционного спутника f, то говорят, что она $\mathfrak{L}$-композиционна, а f — $\mathfrak{F}$-композиционный спутник этой формации. Если при этом все значения f лежат в $\mathfrak{F}$, то спутник f называется внутренним (или приведенным).

Непустая совокупность формаций Θ называется полной решеткой формаций [3], если $\mathfrak{G} \in \Theta$ и пересечение любого множества формаций из Θ снова принадлежит Θ.

Мы называем $\mathfrak{L}$-композиционный спутник Θ-значным, если все его непустые значения принадлежат Θ. Символом $\Theta^{\mathfrak{L}}$ обозначается полная решетка, состоящая из всех таких формаций, которые имеют хотя бы один Θ-значный $\mathfrak{L}$-композиционный спутник.

Для произвольного набора $\{f_i \mid i \in I\}$ $\mathfrak{L}$-композиционных спутников f_i через $\bigcap_{i\in I} f_i$ обозначается такой спутник, что

$$(\bigcap_{i\in I} f_i)(A) = \bigcap_{i\in I} f_i(A)$$

для всех $A \in \mathfrak{I}$.

Пусть $\{f_i|i \in I\}$ набор всех Θ-значных $\mathfrak{L}$-композиционных спутников формации $\mathfrak{F} \in \Theta^{\mathfrak{L}}$. Тогда спутник $\bigcap_{i\in I} f_i$ называется минимальным Θ-значным $\mathfrak{L}$-композиционным спутником $\mathfrak{F}$. Каноническим $\mathfrak{L}$-композиционным спутником формации $\mathfrak{F} = CL(f)$, где f — минимальный $\mathfrak{L}$-композиционный спутник этой формации, называется спутник F такой, что

$$F(A) = \begin{cases} \mathfrak{N}_p f(A), & \text{если } |A| = p \in \mathbb{P}, \\ \mathfrak{F}, & \text{если } A \in (\mathfrak{I} \setminus \mathfrak{A}) \bigcup \{\mathfrak{L}'\}. \end{cases}$$

Мы называем следуя [3], формации из Θ Θ-формациями, а формации из $\Theta^{\mathfrak{L}}$ — $\Theta^{\mathfrak{L}}$-формациями.

Пусть $\mathfrak{H}$ — произвольный класс групп. Тогда Θ-формация $\mathfrak{F}$ называется $\mathfrak{H}_\Theta$-критической [4] или иначе минимальной не $\mathfrak{H}$-Θ-формацией [5], если $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$, но $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{H}$ для каждой собственной Θ-подформации $\mathfrak{F}_1$ из $\mathfrak{F}$.

Символом $\Theta\mathrm{form}\mathfrak{X}$ обозначается пересечение всех тех Θ-формаций, которые содержат класс групп $\mathfrak{X}$.

Теорема. Пусть Θ — такая полная решетка формаций, что $\Theta^{\mathfrak{L}} \subseteq \Theta$. Пусть f — минимальный Θ-значный $\mathfrak{L}$-композиционный спутник формации $\mathfrak{F}$ и H — канонический $\mathfrak{L}$-композиционный спутник формации $\mathfrak{H}$. Тогда в том и только в том случае $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{H}_{\theta\mathfrak{L}}$-критической формацией, когда $\mathfrak{F} = \Theta^{\mathfrak{L}}\mathrm{form}G$, где G — такая монолитическая группа с монолитом R, что либо $\mathcal{K}(R) \cap \mathfrak{L} = \varnothing$ и $f(\mathfrak{L}')$ — $(H(\mathfrak{L}'))_\Theta$-критическая формация, либо $C_G(R) \subseteq R \not\subseteq \Phi(G)$ и $f(A)$ — $(H(A))_\Theta$-критическая формация, где $A \in \mathcal{K}(R)$.

Доказательство. Необходимость. Пусть G — группа минимального порядка из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$ с монолитом $R = G^{\mathfrak{H}}$. Тогда, очевидно, $\mathfrak{F} = \Theta^{\mathfrak{L}}\mathrm{form}G$.

Пусть $A \in \mathcal{K}(R)$. Предположим прежде, что $A \notin \mathfrak{L}$. В этом случае $G_{E\mathfrak{L}} = 1$. Значит, по теореме 1 [1]

$$f(\mathfrak{L}') = \Theta\mathrm{form}G \not\subseteq H(\mathfrak{L}') = \mathfrak{H}.$$

Пусть $\mathfrak{M}$ — произвольная собственная Θ-подформация в $f(\mathfrak{L}')$. Допустим, что $\mathfrak{M} \not\subseteq H(\mathfrak{L}')$ и $T \in \mathfrak{M} \setminus H(\mathfrak{L}')$. Тогда $T \in \mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$. Значит, $\Theta^{\mathfrak{L}}\mathrm{form}T = \mathfrak{F}$ и поэтому

$$f(\mathfrak{L}') = \Theta\mathrm{form}(T/T_{E\mathfrak{L}} \subseteq \mathfrak{M} \subset f(\mathfrak{L}').$$

Противоречие. Таким образом, $\mathfrak{M} \subseteq H(\mathfrak{L}')$. Следовательно, $f(\mathfrak{L}')$ — $(H(\mathfrak{L}'))_{\Theta}$-критическая формация.

Пусть $A \in \mathfrak{L}^-$. В этом случае $C^A(G) = 1$ и поэтому

$$f(A) = \theta\mathrm{form}G \not\subseteq H(A) = \mathfrak{H}.$$

Пусть $\mathfrak{M}$ — произвольная собственная θ-подформация в $f(A)$. Допустим, что $\mathfrak{M} \not\subseteq H(A)$ и $T \in \mathfrak{M} \setminus H(A)$. Тогда $T \in \mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$. Значит, $\theta^{\mathfrak{L}}\mathrm{form}T = \mathfrak{F}$ и поэтому

$$f(A) = \theta\mathrm{form}(T/C^A(T)) \subseteq \mathfrak{M} \subset f(A).$$

Противоречие. Таким образом, $\mathfrak{M} \subseteq H(A)$. Следовательно, $f(A)$ — $(H(A))_{\theta}$-критическая формация.

Предположим теперь, что $A \in \mathfrak{L}^+$. Рассмотрим группу $T = [R](G/C_G(R))$. Понятно, что $C^A(T) = R$. По лемме 3.32 [6] $T \in \mathfrak{F}$. Допустим, что $T \in \mathfrak{H}$. Тогда $T/C^A(T) \cong T/R \cong G/C_G(R) \in H(A)$. Но $G/R \in \mathfrak{H}$. Значит, $G \in \mathfrak{H}$. Противоречие. Поэтому $T \notin \mathfrak{H}$. Следовательно, $T \in \mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$. Таким образом, ввиду выбора группы G мы имеем $|T| = |G|$ и $\mathfrak{F} = \Theta^{\mathfrak{L}}\mathrm{form}T$. Понятно, что $R = T^{\mathfrak{H}}$. Ввиду теоремы 1 [1]

$$f(A) = \Theta\mathrm{form}(T/C^A(T)) = \Theta\mathrm{form}(G/C_G(R)) = \Theta\mathrm{form}(G/R) \not\subseteq H(A).$$

Пусть $\mathfrak{M}$ — произвольная собственная Θ-подформация в $f(A)$. Допустим, что $\mathfrak{M} \not\subseteq H(A)$ и T — группа минимального порядка из $\mathfrak{M} \setminus H(A)$. Так как $H(A) = \mathfrak{N}_p H(A)$, то $O_p(T) = 1$. Пусть P — простой точный H-модуль над F_p и $F = [T]H$. Тогда $F \in \mathfrak{F}$. Если $\Theta^{\mathfrak{L}}\mathrm{form}F = \mathfrak{F}$, то

$$f(A) = \Theta\mathrm{form}(F/C^A(F)) = \Theta\mathrm{form}T \subseteq \mathfrak{M} \subset f(A),$$

что невозможно. Значит, $\Theta\mathrm{form}F \subset \mathfrak{F}$ и поэтому $F \in \mathfrak{H}$. Следовательно, $F/C^A(F) \cong T \in H(A)$. Противоречие. Значит, $\mathfrak{M} \subseteq H(A)$. Таким образом, $f(A)$ — $(H(A))_{\Theta}$-критическая формация.

Достаточность. Понятно, что $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$. Пусть, $\mathfrak{M}$ – произвольная собственная $\Theta^{\mathfrak{L}}$-подформация в $\mathfrak{F}$ и m — ее минимальный Θ-значный $\mathfrak{L}$-композиционный спутник. Ввиду теоремы 1 [1] $m \leq f$. Покажем, что $m \leq H$.

Пусть $A \in \mathcal{K}(R)$. Предположим, что $A \notin \mathfrak{L}$. В этом случае $G_{E\mathfrak{L}} = 1$ и поэтому

$$f(\mathfrak{L}') = \Theta\mathrm{form}G \not\subseteq m(\mathfrak{L}') = \mathfrak{M}.$$

Значит, $m(\mathfrak{L}') \subset f(\mathfrak{L}')$. Следовательно, по условию $m(\mathfrak{L}') \subseteq H(\mathfrak{L}')$. Кроме того, поскольку $G/R \in \mathfrak{H}$ и $C^B(G)/R = C^B(G/R)$ для всех простых групп $B \not\simeq A$, то $m(B) \subseteq f(B) \subseteq H(B)$ для всех $B \in \mathfrak{L}$. Значит, $m \leq H$. (Аналогично проверяется случай, когда $A \in \mathfrak{L}^-$).

Пусть $A \in \mathfrak{L}^+$. В этом случае $R = C_G(R)$. Значит, $C^A(G) = R$. Допустим, что $m(A) = f(A)$. Тогда $G/C^A(G) = G/R \in m(A)$. Значит, если A — p-группа, то по лемме 4 [7]

$$G \in \mathfrak{N}_p m(A) \subseteq \mathfrak{M}$$

и поэтому

$$\mathfrak{F} = \Theta^{\mathfrak{L}}\mathrm{form}G \subseteq \mathfrak{M} \subset \mathfrak{F},$$

что невозможно. Следовательно, $m(A) \subset f(A)$ и поэтому $m(A) \subseteq H(A)$. По лемме 1 [7] $G_{E\mathfrak{L}}/R = (G/R)_{E\mathfrak{L}}$ и $C^B(G/R)$ для всех простых групп $B \not\simeq A$. Следовательно, поскольку $G/R \in \mathfrak{H}$, то $f(\mathfrak{L}') \subseteq H(\mathfrak{L}')$ и $f(B) \subseteq H(B)$ для всех $B \in \mathfrak{L} \setminus (A)$. Но $m \leq f$ и поэтому $m(A) \subseteq H(A)$ для всех $A \in \{\mathfrak{L}'\} \cup \mathfrak{L}$. Итак, $m \leq H$. Следовательно, $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}$. Таким образом, $\mathfrak{F}$ — $\mathfrak{H}_{\Theta\mathfrak{L}}$-критическая формация. Теорема доказана.

Summary

I.V.Bliznets and A.N.Skiba. On $\mathfrak{H}_{\Theta\mathfrak{L}}$-critical formations // Proc. Gomel State Univ. — 1999. — №1(15) Problems in Algebra. — P. 140–144

Let $\mathfrak{L}$ be an arbitrary non-empty class of simple groups. Then every function $f : \mathfrak{L}\bigcup\{\mathfrak{L}'\} \to \{\text{formations of groups}\}$ having an equal values on isomorphic groups is called $\mathfrak{L}$-composition satellite.

Symbol $C^A(G)$ denotes an intersection of all centralizers of all such chief factor H/K of G that $A \in \mathcal{K}(H/K)$ ($C^A(G) = G$ if G has no such chief factors).

For an arbitrary $\mathfrak{L}$-composition satellite f it is supposed

$$CF_{\mathfrak{L}}(f) = \{G \mid G/G_{E\mathfrak{L}} \in f(\mathfrak{L}') \text{ and } G/C^A(G) \in f(A) \text{ for all } A \in \mathcal{K}(G)\bigcap\mathfrak{L}\}.$$

If a formation $\mathfrak{F}$ has the form $\mathfrak{F} = CF_{\mathfrak{L}}(f)$ for some $\mathfrak{L}$-composition satellite then it is said that $\mathfrak{F}$ is $\mathfrak{L}$-composition and f is a composition satellite of $\mathfrak{F}$.

A non-empty set of formations θ is called a complete lattice of formations if $\mathfrak{G} \in \theta$ and an intersection of any set of formations from θ belongs to θ.

We call $\mathfrak{L}$-composition satellite θ-valued if all its non-empty values belong to θ. Symbol $\theta^{\mathfrak{L}}$ denotes a complete lattice consisting of all such formations that has a θ-valued $\mathfrak{L}$-composition satellite.

Let $\mathfrak{H}$ be an arbitrary class of groups. Then θ-formation $\mathfrak{F}$ is called $\mathfrak{H}_\theta$-critical or else minimal non-$\mathfrak{H}_\theta$-formation if $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$ but $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{H}$ for every proper θ-subformation $\mathfrak{F}_1$ of $\mathfrak{F}$.

In this note a general description of $\mathfrak{H}_{\theta\mathfrak{L}}$-critical formations where $\mathfrak{H}$ is a $\mathfrak{L}$-composition formation is given.

Литература

1. Скиба А.Н., Шеметков Л.А. Частично композиционные формации конечных групп // Докл. НАН Беларуси. Т.43, N 4, с.5-6.

2. Ведерников В.А. Элементы теории классов групп. Смоленск, 1988, 122 с.

3. Скиба А.Н. Алгебра формаций. - Минск: Беларуская навука. - 1997. - 240 с.

4. Скиба А.Н. О критических формациях // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. 1980, N 4, с.27-33.

5. Шеметков Л.А. Экраны ступенчатых формаций // Тр. Всесоюзн. симпозиум по теории групп. Киев, 1980. С.37-50.

6. Шеметков Л.А., Скиба А.Н. Формации алгебраических систем. - М.: Наука, 1989. 244 с.

7. Шеметков Л.А., Скиба А.Н. Кратно $\mathfrak{L}$-композиционные формации конечных групп // Препринты Гомельского госуниверситета. 1998, Август, N 78, 26 с.

Гомельский государственный
университет им. Ф.Скорины
e-mail: bliznets@gsu.unibel.by
e-mail: skiba@gsu.unibel.by

Поступило 22.07.99