Известия Гомельского государственного университета имени Ф.Скорины. — 1999. — №1(15) Вопросы алгебры. — С. 116–120

УДК 512.542

И. В. Близнец

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ $\mathfrak{L}$-КОМПОЗИЦИОННЫХ ФОРМАЦИЙ

Все рассматриваемые нами группы конечны.

Напомним, что для произвольного множества простых групп $\mathfrak{T}$ символом $E(\mathfrak{T})$ обозначается класс всех таких групп, у которых все композиционные факторы принадлежат $(\mathfrak{T})$. Символ $C^A(G)$ [1] обозначает пересечение всех централизаторов всех таких главных факторов H/K группы G, что $A \in \mathcal{K}(H/K)$ ($C^A(G) = G$, если группа G таковых главных факторов не имеет). Здесь $\mathcal{K}(H/K)$ — класс всех простых групп, изоморфных композиционным факторам группы H/K. Вместо записи $C^{Z_p}(G)$ применяют запись $C^p(G)$.

Напомним теперь некоторую терминологию работы А.Н.Скибы и Л.А.Шеметкова [2]. Пусть $\mathfrak{L}$ — некоторая непустая совокупность простых групп. Тогда функции вида $f : \mathfrak{L} \bigcup \{\mathfrak{L}'\} \rightarrow$ {формации групп} называются $\mathfrak{L}$-композиционными спутниками. Для произвольного $\mathfrak{L}$-композиционного спутника f символом $CF_{\mathfrak{L}}(f)$ обозначается класс $\{G \mid G/G_{E(\mathfrak{L})} \in f(\mathfrak{L}')$ и $G/C^A(G) \in f(A)$ для всех $A \in \mathcal{K}(G)\}$. Если формация $\mathfrak{F}$ такова, что $\mathfrak{F} = CF_{\mathfrak{L}}(f)$ для некоторого $\mathfrak{L}$-композиционного спутника f, то $\mathfrak{F}$ называют [2] $\mathfrak{L}$-композиционной формацией с $\mathfrak{L}$-композиционным спутником f.

Всякая формация считается 0-кратно $\mathfrak{L}$-композиционной. При $n \geqslant 1$ формация $\mathfrak{F}$ называется n-кратно $\mathfrak{L}$-композиционной [2], если $\mathfrak{F} = CF_{\mathfrak{L}}(f)$, где все непустые значения f являются $(n-1)$-кратно $\mathfrak{L}$-композиционными формациями.

Если непустые формации $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ таковы, что $\mathfrak{M} \bigcap \mathfrak{H} = (1)$, то формация $\mathrm{form}(\mathfrak{M} \bigcup \mathfrak{H})$ обозначается через $\mathfrak{M} \oplus \mathfrak{H}$ [4] и, как доказано в [4] (см. также главу 4 книги [5]), такая формация состоит из групп вида $A \times B$, где $A \in \mathfrak{M}$. $B \in \mathfrak{H}$.

В данной работе, развивая некоторые наблюдения работы [6], мы показываем, что если прямое разложение является n-кратно $\mathfrak{L}$-композиционной формацией то и каждая компонента этого разложения — n-кратно $\mathfrak{L}$-композиционная формация.

Лемма. *Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \oplus \mathfrak{H}$ для некоторых формаций $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$. Если формация $\mathfrak{F}$ $\mathfrak{L}$-композиционна с $\mathfrak{L}$-композиционным спутником f, то формации $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ также $\mathfrak{L}$-композиционны с $\mathfrak{L}$-композиционными спутниками m и h соответ-*

ственно, которые таковы, что

$$m(A)=\begin{cases}\mathfrak{M}, & \textit{если } A\in\mathfrak{L}^-\bigcup\{\mathfrak{L}'\},\\ \varnothing, & \textit{если } A\in\mathfrak{I}\setminus(\mathfrak{L}\bigcup\{\mathfrak{L}'\}),\\ f(A), & \textit{если } A\in\mathfrak{L}^+\end{cases}$$

и

$$h(B)=\begin{cases}\mathfrak{H}, & \textit{если } B\in\mathfrak{L}^-\bigcup\{\mathfrak{L}'\},\\ \varnothing, & \textit{если } B\in\mathfrak{I}\setminus(\mathfrak{L}\bigcup\{\mathfrak{L}'\}),\\ f(B), & \textit{если } B\in\mathfrak{L}^+.\end{cases}$$

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}$ — $\mathfrak{L}$-композиционная формация и G — такая группа, что $G/\Phi(O_p(G))\in\mathfrak{M}\subseteq\mathfrak{F}$. Тогда поскольку формация $\mathfrak{F}$ по условию $\mathfrak{L}$-композиционна, то согласно теореме 1 [2] $G\in\mathfrak{F}$. Значит, $G=A\times B$, где $A\in\mathfrak{M}$, $B\in\mathfrak{H}$. Отсюда $O_p(G)=O_p(A\times B)=(A\times B)_{\mathfrak{N}_p}=A_{\mathfrak{N}_p}\times B_{\mathfrak{N}_p}=O_p(A)\times O_p(B)$ и, кроме того, по свойству (9.4) главы А книги [7] $\Phi(O_p(G))=\Phi(O_p(A))\times\Phi(O_p(B))$. Поэтому

$$G/\Phi(O_p(G))=G/(\Phi(O_p(A))\times\Phi(O_p(B)))\simeq$$

$$\simeq A/\Phi(O_p(A))\times B/\Phi(O_p(B))\in\mathfrak{M}.$$

Значит, $B/\Phi(O_p(B))\in\mathfrak{M}$. Вместе с тем $B/\Phi(O_p(B))\in\mathfrak{H}$. Следовательно, $B=\Phi(O_p(B))$, откуда $B=O_p(B)=1$. Поэтому $G=A\times B=A\in\mathfrak{M}$. Таким образом формация $\mathfrak{M}$ $\mathfrak{L}$-композиционна. Аналогично можно показать, что формация $\mathfrak{H}$ $\mathfrak{L}$-композиционна.

Пусть $\mathfrak{F}=CF_{\mathfrak{L}}(f)$ и m — такой $\mathfrak{L}$-композиционный спутник, что

$$m(A)=\begin{cases}\mathfrak{M}, & \text{если } A\in\mathfrak{L}^-\bigcup\{\mathfrak{L}'\},\\ \varnothing, & \text{если } A\in\mathfrak{I}\setminus(\mathfrak{L}\bigcup\{\mathfrak{L}'\}),\\ f(A), & \text{если } A\in\mathfrak{L}^+\end{cases}$$

Пусть $\mathfrak{M}_1=CF_{\mathfrak{L}}(m)$. Покажем, что $\mathfrak{M}_1=\mathfrak{M}$. Предположим, что $\mathfrak{M}_1\not\subseteq\mathfrak{M}$ и пусть G — группа минимального порядка из $\mathfrak{M}_1\setminus\mathfrak{M}$. Тогда G монолитична с монолитом $R=G^{\mathfrak{M}}$. Допустим R — $(\mathfrak{L}')$-группа. Тогда $G_{E\mathfrak{L}}=1$ и $G\simeq G/G_{E\mathfrak{L}}\in m(\mathfrak{L}')=\mathfrak{M}$. Противоречие. Значит, R — (A)-группа. Если R — неабелева группа, то $G\simeq G/1=G/C^A(G)\in m(A)=\mathfrak{M}$, где $A\in\mathcal{K}(R)$. Противоречие. Значит, R — (Z_p)-группа, где $Z_p\in\mathfrak{L}^+$. Поэтому

$$G/C^p(G)\in m(Z_p)=f(Z_p).$$

Кроме того, $G/G_{E\mathfrak{L}} \in m(\mathfrak{L}') = \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F} = f(\mathfrak{L}')$. Значит, $G \in \mathfrak{F}$. Ввиду монолитичности группы G, либо $G \in \mathfrak{M}$, либо $G \in \mathfrak{H}$. Значит, $G \in \mathfrak{H}$. Тогда, согласно утверждению (4.14) главы IV книги [7], $Z_p \in \mathfrak{H}$. Отсюда $Z_p \in \mathcal{K}(\mathfrak{H})$. Легко видеть, что $\mathcal{K}(\mathfrak{M}) \bigcap \mathcal{K}(\mathfrak{H}) \bigcap \mathfrak{A} = \varnothing$. Значит, $Z_p \notin \mathcal{K}(\mathfrak{M})$ и поэтому $G/C^p(G) \in m(Z_p) = \varnothing$. Противоречие. Следовательно, $\mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{M}$.

Пусть $\mathfrak{M} \not\subseteq \mathfrak{M}_1$ и G — группа минимального порядка из $\mathfrak{M} \setminus \mathfrak{M}_1$. Тогда G монолитична с монолитом $R = G^{\mathfrak{M}_1}$. Допустим R — $(\mathfrak{L}')$-группа. Тогда $G_{E\mathfrak{L}} = 1$. Поэтому

$$G \simeq G/G_{E\mathfrak{L}} \in \mathfrak{M} = m(\mathfrak{L}').$$

Вместе с тем, поскольку $G/R \in \mathfrak{M}_1$, то имеем

$$(G/R)/C^A(G/R) = (G/R)/(C^A(G)/R) \simeq G/C^A(G) \in m(A),$$

где $A \in \mathcal{K}(G/R) \subseteq \mathcal{K}(G)$. Противоречие. Значит, R — (A)-группа. Если $R \in \mathfrak{L}^-$, то $C^A(G) = 1$. Следовательно,

$$G \simeq G/1 = G/C^A(G) \in \mathfrak{M} = m(A),$$

где $A \in \mathcal{K}(R)$. Кроме того, для всех $A \in \mathfrak{L} \bigcup \mathcal{K}(G)$ имеет место $C^A(G/R) = C^A(G)/R$. Последнее вместе с $G/R \in \mathfrak{M}_1$ влечет $G \in \mathfrak{M}_1$. Противоречие. Значит, R — (Z_p)-группа, где $Z_p \in \mathfrak{L}^+$. Поскольку $G \in \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F} = CF_{\mathfrak{L}}(f)$, то

$$G/C^A(G) \in f(Z_p) = m(Z_p).$$

Кроме того, $G/G_{E\mathfrak{L}} \in \mathfrak{M} = m(A)$. Следовательно, $G \in \mathfrak{M}_1$. Лемма доказана.

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \oplus \mathfrak{H}$ для некоторых формаций $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$. Если формация $\mathfrak{F}$ n-кратно $\mathfrak{L}$-композиционна (тотально $\mathfrak{L}$-композиционна), то формации $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ n-кратно $\mathfrak{L}$-композиционны (соответственно, тотально $\mathfrak{L}$-композиционны).*

Доказательство. При $n = 0$ теорема, очевидно, верна. Пусть формация $\mathfrak{F}$ n-кратно $\mathfrak{L}$-композиционна, где $n \geqslant 1$ и f — такой $\mathfrak{L}$-композиционный спутник формации $\mathfrak{F}$, все непустые значения которого $(n-1)$-кратно $\mathfrak{L}$-композиционны. Тогда по лемме формация $\mathfrak{M}$ композиционна и обладает $\mathfrak{L}$-композиционным спутником m, таким, что

$$m(A) = \begin{cases} \mathfrak{M}, & \text{если } A \in \{\mathfrak{L}'\} \bigcup \mathfrak{L}^-, \\ \varnothing, & \text{если } A \in \mathfrak{I} \setminus (\mathfrak{L} \bigcup \{\mathfrak{L}'\}), \\ f(A), & \text{если } A \in \mathfrak{L}^+ \end{cases}$$

Следовательно, согласно условию, все значения функции m на абелевых простых группах $(n-1)$-кратно $\mathfrak{L}$-композиционны, а это означает, ввиду леммы 2 [2], что формация $\mathfrak{M}$ n-кратно $\mathfrak{L}$-композиционна. Теорема доказана.

Заметим, что обратное утверждение теоремы неверно даже в случае $\mathfrak{L} = \mathfrak{I}$ (см. пример [6], а также [8]).

Summary

I.V.Bliznets. On a class of $\mathfrak{L}$-composition formations // Proc. Gomel State Univ. — 1999. — №1(15) Problems in Algebra. — P. 116–120

All groups considered are finite.

Let $\mathfrak{L}$ be an arbitrary non-empty class of simple groups. Then every function $f : \mathfrak{L} \bigcup \{\mathfrak{L}'\} \to \{\text{formations of groups}\}$ is called $\mathfrak{L}$-composition satellite. For arbitrary set of simple groups $\mathfrak{T}$ the symbol $E(\mathfrak{T})$ denotes the class of groups in which all composition factors belong to $(\mathfrak{T})$. Symbol $C^A(G)$ denotes an intersection of all centralizers of such chief factors H/K of G that $A \in \mathcal{K}(H/K)$ ($C^A(G) = G$ if G has no such chief factors). Here $\mathcal{K}(H/K) = (\mathfrak{X})$ where $\mathfrak{X}$ is the set of all composition factors of H/K.

For an arbitrary $\mathfrak{L}$-composition satellite f it is supposed

$$CF_{\mathfrak{L}}(f) = \{G \mid G_{E\mathfrak{L}} \in f(\mathfrak{L}') \text{ and } G/C^A(G) \in f(A) \text{ for all } A \in \mathcal{K}(G)\}.$$

A formation $\mathfrak{F}$ such that $\mathfrak{F} = CF_{\mathfrak{L}}(f)$ for some $\mathfrak{L}$-composition satellite f is called a $\mathfrak{L}$-composition and f is called a $\mathfrak{L}$-composition satellite of it. Every formation is supposed to be 0-multiply $\mathfrak{L}$-composition. For $n \geqslant 1$ a formation $\mathfrak{F}$ is called n-multiply $\mathfrak{L}$-composition if $\mathfrak{F} = CF_{\mathfrak{L}}(f)$ where all values of f are $(n-1)$-multiply $\mathfrak{L}$-composition formations. A formation $\mathfrak{F}$ is called totally $\mathfrak{L}$-composition if it is n-multiply $\mathfrak{L}$-composition for all $n \in \mathbb{N}$.

If $\mathfrak{M} \bigcap \mathfrak{H} = (1)$, then $\mathrm{form}(\mathfrak{M} \bigcup \mathfrak{H})$ is denoted by $\mathfrak{M} \oplus \mathfrak{H}$. This formation consists of groups $A \times B$ where $A \in \mathfrak{M}$, $B \in \mathfrak{H}$.

In the paper we prove the following

Theorem. Let $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \oplus \mathfrak{H}$ for some formations $\mathfrak{M}$ and $\mathfrak{H}$. If $\mathfrak{F}$ is n-multiply $\mathfrak{L}$-composition (totally $\mathfrak{L}$-composition) then formations $\mathfrak{M}$ and $\mathfrak{H}$ are n-multiply $\mathfrak{L}$-composition (totally $\mathfrak{L}$-composition respectively).

Литература

1. *Скиба А.Н., Шеметков Л.А.* О минимальном композиционном экране композиционной формации // Вопросы алгебры. — Гомель: Изд-во ГГУ им. Ф.Скорины, 1992. — Вып. 7. — С. 39–43.

2. *Скиба А.Н., Шеметков Л.А.* Частично композиционные формации конечных групп // Докл. НАН Беларуси. — 1999. — Т. 43, № 4. — С. 5–8.

3. *Скиба А.Н.* Характеризация конечных разрешимых групп заданной нильпотентной длины // Вопросы алгебры. — Мн., 1987. — Вып. 3. — С. 21–31.

4. *Скиба А.Н.* О дополняемых подформациях // Вопросы алгебры. — Гомель: Изд-во ГГУ им. Ф.Скорины, 1996. — Вып. 9. — С. 55–62.

5. *Скиба А.Н.* Алгебра формаций. — Мн.: Беларуская навука, 1997. — 240 с.

6. *Близнец И.В., Воробьев Н.Н.* О прямых разложениях композиционных формаций // Вопросы алгебры. — Гомель: Изд-во ГГУ им. Ф.Скорины, 1998. — Вып. 12. — С. 105–112.

7. *Doerk K., Hawkes T.* Finite soluble groups. — Walter de Gruyter: Berlin-New York, 1992. — 889 p.

8. *Каморников С.Ф.* О двух задачах из "Коуровской тетради" // Матем. заметки. 1994. — Т. 55, № 6. — С. 59–63.

Гомельский государственный
университет им. Ф.Скорины
e-mail: bliznets@gsu.unibel.by

Поступило 22.06.99