Известия Гомельского государственного университета имени Ф.Скорины. — 1999. — №1(15) Вопросы алгебры. — С. 71–77

УДК 512.542

Т. И. Васильева

ПОЛУРАДИКАЛЬНЫЕ ФОРМАЦИИ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

В настоящее время в исследованиях по теории классов групп важное место занимают радикальные формации (или формации Фиттинга), т.е. формации, замкнутые относительно операций взятия нормальных подгрупп и их произведений (см.[1,2]). Однако многие классические формации (например, всех сверхразрешимых групп, всех групп с нильпотентным коммутантом и т.д.) не являются радикальными. Вопрос о частичной радикальности такого вида формаций решается путем введения определения слабой R_t-замкнутости [1]. Появление новых примеров формаций, состоящих из необязательно разрешимых групп [3], показывает, что понятия радикальности и слабой радикальности не исчерпывают все возможности соединения нормальных подгрупп в произвольных группах.

В настоящей работе вводится понятие полурадикальной формации и исследуется задача построения полурадикальных формаций с помощью полурадикальных экранов.

Определение. Непустой класс групп $\mathfrak{F}$ назовем *полурадикальным*, если $\mathfrak{F}$ S_n-замкнут и содержит всякую группу G, представимую в виде произведения своих нормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп H и K таких, что фактор-группы G/H и G/K не имеют общих (с точностью до изоморфизма) абелевых композиционных факторов.

Экран f будем называть *полурадикальным*, если $f(H)$ — полурадикальная формация для любой простой группы H.

Теорема 1. *Пусть f — максимальный внутренний локальный экран формации $\mathfrak{F}$. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ является полурадикальной, когда полурадикальна формация $f(p)$ для любого простого p.*

Следствие. *Группа G, представимая в виде произведения своих нормальных π-сверхразрешимых подгрупп H и K таких, что фактор-группы G/H и G/K не имеют общих (с точностью до изоморфизма) абелевых композиционных факторов, является π-сверхразрешимой.*

В работе [4] изучались радикальные композиционные формации. Развитием теоремы 1 из [4] является

Теорема 2. *Пусть h — внутренний композиционный экран формации $\mathfrak{F}$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *если полурадикален экран h, то полурадикальна формация $\mathfrak{F}$;*

2) *если полурадикальна формация $\mathfrak{F}$, то ее максимальный внутренний композиционнй экран полурадикален.*

Примером полурадикальной композиционной формации является класс $\mathfrak{U}_c$ всех c-сверхразрешимых групп (см. [3,5]). Напомним, группа G называется c-сверхразрешимой [3], если она обладает главным рядом, все факторы которого — простые группы.

Теорема 3. *Пусть $\mathfrak{F}$ — композиционная формация, замкнутая относительно расширений простых неабелевых групп с помощью $\mathfrak{F}$-групп, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{S}_c$ и φ — максимальный внутренний композиционный экран $\mathfrak{F}$. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ полурадикальна, когда полурадикальна формация $\varphi(p)$ для любого простого p.*

Эта теорема позволяет строить примеры полурадикальных формаций. Обозначим через $\mathfrak{S}_c$ класс всех тех групп, у которых каждый неабелев главный фактор есть простая группа. Тогда класс всех $\mathfrak{S}_c$-групп G таких, что G индуцирует на своих разрешимых главных факторах абелевы группы автоморфизмов, является полурадикальной композиционной формацией.

Рассматриваются только конечные группы. Определения и обозначения, связанные с формациями, можно найти в [1].

Лемма 1 [5]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — формация и N — минимальная нормальная подгруппа группы G такая, что $|N| = p^\alpha$ для некоторого простого числа p. Если N содержится в подгруппе H группы G и $H/C_H(U/V) \in \mathfrak{F}$ для любого H-главного фактора U/V группы N, то $H/C_H(N) \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{F}$.*

Лемма 2 [4]. *Пусть f — композиционный экран, M — некоторая нормальная подгруппа группы G. Если $M \in \langle f \rangle$, то каждый G-главный фактор группы M f-централен в M.*

Лемма 3. *Пусть группа G имеет неабелеву единственную минимальную нормальную подгруппу N такую, что $G/N \in \mathfrak{S}_c$. Если $G = HK$, где H и K — нормальные $\mathfrak{S}_c$-подгруппы из G, то $G \in \mathfrak{S}_c$.*

Доказательство. Ясно, что $N \subseteq H \cap K$. Пусть R — минимальная нормальная подгруппа группы H, содержащаяся в N. Так как $H \in \mathfrak{S}_c$, то R — простая неабелева группа. Прямой проверкой устанавливается, что $R^g \lhd H$ для любого $g \in G$. Из $N \lhd G$ следует, что произведение $R^x R^y ... R^z \subseteq N$, где $x, y, ..., z$ — все элементы группы G. Из минимальности N получаем $N = R^x R^y ... R^z$. Выберем элементы $g_1, g_2, ..., g_n$ группы G так, чтобы $N = R^{g_1} R^{g_2} ... R^{g_n}$ и $R^{g_i} \neq R^{g_j}$ для любых $i \neq j$. Ввиду простоты R имеем $R^{g_i} \cap R^{g_j} = 1$ для $i \neq j$, т.е. $N = R^{g_1} \times R^{g_2} \times ... \times R^{g_n}$. Аналогично минимальная нормальная подгруппа L группы K, содержащаяся в N, обладает следующими свойствами: L — простая неабелева группа; $L^h \lhd K$ для любого $h \in G$; $N = L^{h_1} \times L^{h_2} \times ... \times L^{h_m}$, где $h_1, h_2, ..., h_m$ — элементы группы G такие, что $L^{h_i} \neq L^{h_j}$ для любых $i \neq j$. Ввиду утверждения a) леммы 13.16 из [6, гл. X] и простоты L для любого $i \in \{1, 2, ..., m\}$ имеем $L^{h_i} = R^{g_k}$ для некоторого $k \in \{1, 2, ..., 3\}$. Тогда из $N = R^{g_1} R^{g_2} ... R^{g_n} = L^{h_1} L^{h_2} ... L^{h_m}$ получаем, что $n = m$, т.е. $\{R^{g_1}, R^{g_2}, ..., R^{g_n}\} = \{L^{h_1}, L^{h_2}, ..., L^{h_m}\}$. Так как $L^{h_1} = R^{g_k}$ для некоторого $k \in \{1, 2, ..., n\}$, то $N_G(L^{h_1}) = N_G(R^{g_k}) \supseteq HK = G$. Из минимальности N получаем, что $L^{h_1} = N$ и N — простая группа. Отсюда и из $G/N \in \mathfrak{S}_c$ следует, что $G \in \mathfrak{S}_c$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Необходимость. Пусть $\mathfrak{F}$ является полурадикальной формацией. По теореме 4.7 из [1] $f(p)$ S_n-замкнута для любого простого числа p. Предположим, что найдется такое p, для которого $f(p)$ не полурадикальна. Возьмем группу G наименьшего порядка такую, что $G \notin f(p)$, $G = HK$, где H и K — нормальные $f(p)$-подгруппы из G, G/H и G/K не имеют общих (с точностью до изоморфизма) абелевых композиционных факторов.

Рассмотрим регулярное сплетение $B = P \wr G = [N]G$, где $|P| = p$ и N — элементарная абелева p-группа. Так как f — максимальный внутренний локальный экран формации $\mathfrak{F}$, то $NH \in \mathfrak{N}_p f(p) = f(p) \subseteq \mathfrak{F}$. Аналогично $NK \in \mathfrak{F}$. Поскольку $B/NH \simeq G/H$ и $B/NK \simeq G/K$, то B/NH и B/NK не имеют общих (с точностью до изоморфизма) абелевых композиционных факторов. Из полурадикальности формации $\mathfrak{F}$ следует, что $B \in \mathfrak{F}$. Отсюда по теореме 4.5 из [1] $B/F_p(B) \in f(p)$. Тогда $B/N \simeq G \in f(p)$. Противоречие.

Достаточность. Пусть для любого простого p формация $f(p)$ является полурадикальной. Тогда $\mathfrak{F}$ S_n-замкнута ввиду теоремы 4.7 из [1]. Предположим, что $\mathfrak{F}$ неполурадикальная формация. Выберем группу G наименьшего порядка такую, что $G \notin \mathfrak{F}$, но $G = HK$, где H и K — нормальные $\mathfrak{F}$-подгруппы из G такие, что G/H и G/K не имеют общих (с точностью до изоморфизма) абелевых композиционных факторов.

Пусть N — минимальная нормальная подгруппа группы G. Так как $G/H \simeq K/K \cap H \in \mathfrak{F}$ и $G/K \simeq H/K \cap H \in \mathfrak{F}$, то $G/H \cap K \in \mathfrak{F}$. По выбору G фактор-группа $G/N \in \mathfrak{F}$. Тогда N — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G, $N = G^{\mathfrak{F}}$ и $N \subseteq H \cap K$.

Для любого H-главного фактора U/V группы N фактор-группа

$$H/C_H(U/V) \in f(U/V) = f(p).$$

По лемме 1 и теореме 3.3 из [1] имеем $H/C_H(N) \in \mathfrak{N}_p f(p) = f(p)$. Аналогично $K/C_K(N) \in f(p)$. Из полурадикальности формации $f(p)$ фактор-группа $G/C_G(N) \in f(p)$ как произведение нормальных $f(p)$-подгрупп $HC_G(N)/C_G(N) \simeq H/C_H(N)$ и $KC_G(N)/C_G(N) \simeq K/C_K(N)$, для которых фактор-группы $G/C_G(N)/HC_G(N)/C_G(N)$ и $G/C_G(N)/KC_G(N)/C_G(N)$ не содержат общих (с точностью до изоморфизма) абелевых композиционных факторов. Таким образом, фактор N является f-центральным в G. Так как $G/N \in \mathfrak{F}$, то получаем противоречие $G \in \mathfrak{F}$.

Пусть N — неабелева группа. Из того, что N — единственная минимальная нормальная подгруппа в G, следует $F(G) = 1$ и $C_G(N) = 1$. По лемме 4.5 из [1] имеем $H/F_p(H) \in f(p)$ для любого простого числа $p \in \pi(H)$. Покажем, что $F_p(H) = 1$ для любого простого $p \in \pi(N)$. Предположим, что существует такое простое $q \in \pi(N)$, что $F_q(H) \neq 1$. Тогда $F_q(H) \lhd G$ и $N \subsetneq F_q(H)$. Обозначим через F q-холловскую подгруппу q-нильпотентного радикала $F_q(H)$ группы H. Так как F характеристична в $F_q(H) \lhd G$, то $F \lhd G$. Откуда $N \subseteq F$, т.е. N является q'-группой. Это противоречит тому, что q делит $|N|$. Значит, $F_p(H) = 1$ для любого $p \in \pi(N)$. Аналогично $K/F_p(K) \in f(p)$ для любого простого числа $p \in \pi(K)$ и $F_p(K) = 1$ для всех $p \in \pi(N)$. Тогда $H \in f(p)$ и $K \in f(p)$ для любого простого $p \in \pi(N)$. Из полурадикальности $f(p)$ следует, что $G \in f(p)$. Таким образом, $G \in \mathfrak{F}$. Противоречие. Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Докажем пункт 1). Пусть h — полурадикальный экран. Допустим, что формация $\mathfrak{F}$ не является полурадикальной. Возьмем группу G наименьшего порядка такую, что $G \notin \mathfrak{F}$, $G = HK$, где H и K — нормальные $\mathfrak{F}$-подгруппы из G, G/H и G/K не имеют общих (с точностью до изоморфизма) абелевых композиционных факторов.

Обозначим через N минимальную нормальную подгруппу группы G. Легко проверяется, что для G/N все условия теоремы выполняются. Поэтому $G/N \in \mathfrak{F}$. Можно считать, что N — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G, $N \subseteq H \cap N$ и $N = G^{\mathfrak{F}}$. Так как N — G-главный фактор группы H, то по лемме 2 N f-централен в H, т.е. $H/C_H(N) \in h(N)$. Откуда $HC_G(N)/C_G(N) \simeq H/C_H(N) \in h(N)$. Аналогично $KC_G(N)/C_G(N) \simeq K/C_K(N) \in h(N)$. Отметим, что $G/C_G(N)/HC_G(N)/C_G(N)$ и $G/C_G(N)/KC_G(N)/C_G(N)$ не имеют общих (с точностью до изоморфизма) абелевых композиционных факторов. Так как $h(N) = \cap h(U/V)$, где U/V пробегает все композиционные факторы группы N, и h — полурадикальный экран, получаем, что $h(N)$ — полурадикальная формация. Значит, $G/C_G(N) \in h(N)$. Это означает, что N есть h-центральный фактор в G. Так как $G/N \in \mathfrak{F}$, то $G \in \mathfrak{F}$. Противоречие.

Покажем S_n-замкнутость формации $\mathfrak{F}$. Пусть G — группа наименьшего порядка такая, что $G \in \mathfrak{F}$ и в G есть нормальная подгруппа $M \notin \mathfrak{F}$. Возьмем в

M минимальную нормальную подгруппу N группы G. По индукции $M/N \in \mathfrak{F}$. Так как N h-центральный фактор в G, то $G/C_G(N) \in h(N)$. Из S_n-замкнутости $h(N)$ следует, что $MC_G(N)/C_G(N) \in h(N)$. Откуда $M/C_M(N) \in h(N)$. Таким образом, N h-централен в M. Поскольку $M/N \in \mathfrak{F}$, получаем противоречие $M \in \mathfrak{F}$. Пункт 1) доказан.

Докажем пункт 2). Пусть $\mathfrak{F}$ — полурадикальная формация и φ — ее максимальный внутренний композиционный экран. Ввиду теоремы 3.2 из [1] нужно показать, что $\varphi(p)$ есть полурадикальная формация для любого простого p.

Предположим, что $\varphi(p)$ не является полурадикальной формацией для некоторого простого p. Выберем группу G наименьшего порядка такую, что $G = HK$, где H и K — нормальные $\varphi(p)$-подгруппы из G, G/H и G/K не имеют общих (с точностью до изоморфизма) абелевых композиционных факторов, $G \notin \varphi(p)$.

Рассмотрим регулярное сплетение $B = P \wr G$, где $|P| = p$. Тогда $B = [N]G$, где N — элементарная абелева p-группа. Фактор-группы $B/NH \simeq G/H$ и $B/NK \simeq G/K$ не имеют общих (с точностью до изоморфизма) абелевых композиционных факторов. По теореме 3.2 из [1] $NH \in \mathfrak{N}_p\varphi(p) = \varphi(p)$ и $NK \in \mathfrak{N}_p\varphi(p) = \varphi(p)$. Поэтому $NH \in \mathfrak{F}$ и $NK \in \mathfrak{F}$. Из полурадикальности формации $\mathfrak{F}$ получаем, что $B = NH \cdot NK \in \mathfrak{F}$. Рассмотрим любой B-главный фактор U/V группы N. Тогда $B/C_B(U/V) \in \varphi(U/V) = \varphi(p)$. Обозначим $D = \cap C_B(U/V)$, где U/V пробегает все B-главные факторы группы N. Имеем $B/D \in \varphi(p)$. Группа автоморфизмов $D/C_D(N)$ действует тождественно на каждом факторе некоторого субнормального $D/C_D(N)$-допустимого ряда. По лемме 3.10 из [1] $D/C_D(N)$ p-группа. Отсюда $B/C_B(N) \in \mathfrak{N}_p\varphi(p)$ как расширение p-группы $D/C_D(N)$ с помощью $\varphi(p)$-группы B/D. Значит, $B/C_D(N) \in \varphi(p)$. По свойству регулярного сплетения $C_G(N) = 1$. Итак, $B/C_B(N) = B/N \simeq G \in \varphi(p)$. Противоречие.

Докажем S_n-замкнутость $\varphi(p)$. Пусть $G \in \varphi(p)$ и M — нормальная подгруппа группы G. Рассмотрим $B = P \wr G = [N]G$, где $|P| = p$ и N — элементарная абелева p-группа. Так как $B/N \simeq G \in \varphi(p)$, то $B \in \mathfrak{N}_p\varphi(p) = \varphi(p)$. Откуда $B \in \varphi(p) \subseteq \mathfrak{F}$. Из S_n -замкнутости $\mathfrak{F}$ получаем, что $MN \in \mathfrak{F}$. Рассмотрим главный ряд группы NH:

$$NH \supset \ldots \supset N = N_0 \supset N_1 \supset \ldots \supset N_t = 1.$$

Пусть $C_i = C_{NM}(N_{i-1}/N_i)$. Так как $MN \in \mathfrak{F}$, то $NM/C_i \in \varphi(N_{i-1}/N_i) = \varphi(p)$. Из $N \subseteq C_i$ следует, что $NM/C_i \simeq M/M \cap C_i \in \varphi(p)$ для любого $i = 1, 2, \ldots, t$. Обозначим $D = \cap(M \cap C_i)$. Тогда $M/D \in \varphi(p)$. Так как $C_D(N) = 1$, то по лемме 3.10 из [1] D есть p-группа. Итак, $M \in \mathfrak{N}_p\varphi(p) = \varphi(p)$. Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3. Необходимость следует из теоремы 2.

Достаточность. Пусть для любого простого p формация $h(p)$ является полурадикальной. Допустим, что $\mathfrak{F}$ не полурадикальна. Возьмем группу G наименьшего порядка такую, что $G \notin \mathfrak{F}$, но $G = HK$, где H и K — нормальные $\mathfrak{F}$-подгруппы из G такие, что G/H и G/K не имеют общих (с точностью до изоморфизма) абелевых композиционных факторов.

Обозначим через N минимальную нормальную подгруппу группы G. Тогда $G/N \in \mathfrak{F}$. Можно считать, что N — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G, $N \subseteq H \cap N$ и $N = G^{\mathfrak{F}}$.

Пусть N — абелева p-группа для некоторого простого p. Для любого H-главного фактора U/V группы N имеем $H/C_H(U/V) \in h(U/V) = h(p)$. Используя лемму 1 и теорему 3.2 из [1], получаем $H/C_H(N) \in \mathfrak{N}_p h(p) = h(p)$. Аналогично $K/C_K(N) \in h(p)$. Рассмотрим группу $G/C_G(N)$. Ее нормальные подгруппы $HC_G(N)/C_G(N) \simeq H/C_H(N) \in h(p)$ и $KC_G(N)/C_G(N) \simeq K/C_K(N) \in h(p)$. Так как $G/C_G(N)/HC_G(N)/C_G(N)$ и $G/C_G(N)/KC_G(N)/C_G(N)$ не имеют общих (с точностью до изоморфизма) абелевых композиционных факторов, то $G/C_G(N) \in h(p)$. Значит, N является h-центральным фактором группы G. Отсюда и из $G/N \in \mathfrak{F}$ следует, что $G \in \mathfrak{F}$. Противоречие.

Предположим теперь, что N — неабелева группа. Из $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{S}_c$ имеем, что $H \in \mathfrak{S}_c$, $K \in \mathfrak{S}_c$, $G/N \in \mathfrak{S}_c$. По лемме 3 $G \in \mathfrak{S}_c$. Тогда N — простая группа. Из условия теоремы $G \in \mathfrak{F}$. Противоречие.

Докажем S_n-замкнутость формации $\mathfrak{F}$. Пусть G — группа наименьшего порядка такая, что $G \in \mathfrak{F}$ и в G существует нормальная подгруппа R, которая не принадлежит $\mathfrak{F}$. Выберем минимальную нормальную подгруппу N группы G, содержащуюся в R. По индукции $R/N \in \mathfrak{F}$.

Пусть N — абелева p-группа для некоторого простого p. Так как $G/C_G(N) \in f(p)$ и формация $f(p)$ S_n-замкнута, то $RC_G(N)/C_G(N) \simeq R/C_R(N) \in f(p) = f(N)$. Значит, N — f-центральный фактор в R. Отсюда и из $R/N \in \mathfrak{F}$ получаем противоречие $R \in \mathfrak{F}$.

Если N — неабелева группа, то N — простая группа, так как $G \in \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{S}_c$. Из условия теоремы $R \in \mathfrak{F}$. Противоречие. Теорема 3 доказана.

Summary

T.I.Vasil'eva. Semiradical formations of finite groups // Proc. Gomel State Univ. — 1999. — №1(15) Problems in Algebra. — P. 71–77

In the paper the following definition is given. A non-empty class $\mathfrak{F}$ of groups is called semiradical if the following conditions are satisfied:

1) $\mathfrak{F}$ is S_n-closed, i.e. $H \lhd G \in \mathfrak{F}$ implies $H \in \mathfrak{F}$;

2) if $G = HK$, $H \lhd G$, $K \lhd G$, $H \in \mathfrak{F}$, $K \in \mathfrak{F}$, G/H and G/K do not have common (isomorphic) abelian composition factors then $G \in \mathfrak{F}$.

The screen f is called semiradical if $f(G)$ is a semiradical formation for each simple group G.

Theorem 1. Let f be a maximal inner local screen of a formation $\mathfrak{F}$. The formation $\mathfrak{F}$ is semiradical if and only if $f(p)$ is a semiradical formation for each prime p.

Theorem 2. Let h be an inner composition screen of a formation $\mathfrak{F}$. Then the following assertions hold:

1) if h is a semiradical screen then $\mathfrak{F}$ is a semiradical formation;

2) if $\mathfrak{F}$ is a semiradical formation then its maximal inner composition screen is semiradical.

Литература

1. *Шеметков Л.А.* Формации конечных групп. — М.:Наука, 1978 — 272 с.

2. *Doerk K., Hawkes T.* Finite soluble groups. — Berlin-New York: Walter de Gruyter, 1992 — 898 p.

3. *Ведерников В.А.* О некоторых классах конечных групп // Докл. АН БССР. — 1988. Т. 32, № 10. — С. 872–875.

4. *Шеметков Л.А.* Композиционные формации и радикалы конечных групп // Укр. мат. ж. — 1988. Т.40. N3. — С. 369–374.

5. *Васильев А.Ф., Васильева Т.И.* О конечных группах, у которых главные факторы являются простыми группами // Известия ВУЗов. Математика. — 1997. № 11(426). — С. 10–14.

6. *Huppert B., Blackburn N.* Finite groups. III. — Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 1982. — 454p.

Белорусский государственный
университет транспорта

Поступило 23.06.99