Известия Гомельского государственного университета имени Ф.Скорины. — 1999. — №1(15) Вопросы алгебры. — С. 18–36

УДК 512.552.1

Н. М. Губарени, В. В. Кириченко, У. С. Ревицкая

ПОЛУСОВЕРШЕННЫЕ ПОЛУДИСТРИБУТИВНЫЕ ПОЛУНАСЛЕДСТВЕННЫЕ КОЛЬЦА МОДУЛЬНО ОГРАНИЧЕННОГО ТИПА

Важную роль в теории колец, наряду с понятием радикала Джекобсона, играет понятие первичного радикала кольца (см., напр., [1],[2]).

Хорошо известно, что первичный радикал кольца является ниль-идеалом и содержится в радикале Джекобсона этого кольца.

Всюду в этой статье мы будем использовать следующие обозначения: A — ассоциативное кольцо с $1 \neq 0$, R — его радикал Джекобсона, I — первичный радикал кольца A. Говоря артиново, нетерово, полудистрибутивное и т.д. кольцо, мы всегда подразумеваем, что это артиново с двух сторон, нетерово с двух сторон, полудистрибутивное с двух сторон и т.д. кольцо. Полусовершенные полудистрибутивные полунаследственные кольца будем называть $SPSDSH$-кольцами.

Для исследования строения $SPSDSH$-колец используется понятие первичного колчана и, в частности, то обстоятельство, что первичный колчан $SPSDSH$-кольца является диаграммой конечного частично упорядоченного множества.

Статья состоит из четырех параграфов. Первый параграф посвящен рассмотрению первичного радикала и первичного колчана ассоциативного кольца.

Во втором параграфе рассматриваются $SPSDSH$-кольца с нетеровой диагональю. Отметим теорему, которая дает характеризацию нетеровых справа полупервичных полусовершенных полудистрибутивных колец ($SPSD$-колец) модульно ограниченного типа:

Нетерово справа полупервичное $SPSD$-кольцо модульно ограниченного типа эквивалентно в смысле Мориты прямому произведению нескольких тел и нескольких нетеровых первичных полусовершенных наследственных колец. Наоборот, все такие кольца являются кольцами модульно ограниченного типа.

Отметим, что все такие кольца являются полуцепными.

В §3, §4 устанавливается критерий того, что $SPSDSH$-кольцо с нетеровой диагональю является кольцом модульно ограниченного типа (м.о.т. кольцом). Этот критерий формулируется в терминах диаграмм Дынкина A_n, D_n, E_6, E_7, E_8 и конечных частично упорядоченных множеств, которые возникают при рассмотрении первичных колчанов таких колец.

В случае, когда A — артиново наследственное полудистрибутивное кольцо, доказательство критерия следует из результатов работ [3], [4], [5].

Методы, применяемые в §3, §4, впервые рассматривались в статье [6]. Это задачи о приведении систем матриц преобразованиями над дискретно нормированными кольцами и их общим телом частных.

В настоящей статье мы используем терминологию и факты из работ [7], [8], [9], [10].

§1. Первичный радикал и первичный колчан ассоциативного кольца.

В этом параграфе A означает ассоциативное кольцо (не обязательно полусовершенное) с $1 \neq 0, I$ — его первичный радикал.

Определение 1. Кольцо A называется *разложимым*, если оно раскладывается в прямое произведение двух колец. В противном случае кольцо A называется неразложимым.

Определение 2. Кольцо A называется *конечно разложимым* (FD-кольцом), если оно является конечным прямым произведением неразложимых колец.

Примерами FD-колец являются, в частности, нетеровы справа кольца. Полусовершенные кольца (которые могут быть и неартиновыми и ненетеровыми) всегда являются FD-кольцами.

Для FD-колец имеет место следующая теорема единственности (см., напр., [1]), которую мы сформулируем в удобном для нас виде.

Теорема 1.1. *Каждое FD-кольцо A единственным образом раскладывается в конечное прямое произведение неразложимых колец, т.е., если $A = B_1 \times \ldots \times B_s = C_1 \times \ldots \times C_t$ — два таких разложения, то $s = t$ и существует перестановка σ чисел $\{1, 2, \ldots, t\}$ такая, что $B_i = C_{\sigma(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, t)$.*

Определение 3. Факторкольцо $\overline{A} = A/I$ будем называть *диагональю* кольца A.

Отметим, что диагональ кольца A всегда является полупервичным кольцом (т.е. кольцом, в котором нет нильпотентных идеалов) [1, гл.3, §3.2].

Определение 4. Кольцо A будем называть *кольцом с конечно разложимой диагональю* (*FDD-кольцом*), если его диагональ является FD-кольцом.

Предложение 1.2 [11], [8]. *Пусть I — первичный радикал кольца A, $e^2 = e \in A, e \neq 0$. Тогда eIe совпадает с первичным радикалом кольца eAe.*

Учитывая это предложение и теорему 1.1, можно построить стандартное двустороннее пирсовское разложение первичного радикала I произвольного FDD-кольца A следующим образом:

Пусть $\overline{A} = \overline{A_1} \times \ldots \times \overline{A_t}$ — разложение диагонали FDD-кольца в конечное прямое произведение неразложимых колец и $\overline{1} = \overline{f_1} + \ldots + \overline{f_t}$ — соответствующее разложение $\overline{1} \in \overline{A}$ в сумму попарно ортогональных идемпотентов. Поскольку первичный радикал произвольного ассоциативного кольца является нильидеалом, то согласно [1,гл.3, §3.6] идемпотенты $\overline{f_1}, \ldots, \overline{f_t}$ можно поднять по модулю I с сохранением ортогональности, т.е. имеет место равенство $1 = f_1 + \ldots + f_t$, где $f_i f_j = \delta_{ij} f_i (i, j = 1, \ldots, t)$ и $\overline{f_i} = f_i + I (i = 1, \ldots, t)$. Ясно, что $A_{ij} = f_i A f_j \subset I (i \neq j; i, j = 1, \ldots, t)$ и $I_k = f_k I f_k$ — первичный радикал кольца $A_k = f_k A f_k (k = 1, \ldots, t)$. Поэтому двустороннее пирсовское разложение первичного радикала I кольца A имеет вид:

$$I = \begin{bmatrix} I_1 & A_{12} & \ldots & A_{1t} \\ A_{21} & I_2 & \ldots & A_{2t} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{t1} & A_{t2} & \ldots & I_t \end{bmatrix}, \qquad (*)$$

причем $\overline{A} = A/I = A_1/I_1 \times \ldots \times A_t/I_t$, т.е. $\overline{A_k} = A_k/I_k$ $(k = 1, \ldots, t)$.

Дадим определение первичного колчана $PQ(A)$ произвольного FDD-кольца A, используя обозначения этого параграфа.

Определение 5. Пусть $W = I/I^2$. Сопоставим идемпотентам $\overline{f_1}, \ldots, \overline{f_t}$ вершины $1, \ldots, t$, соединяя вершину i с вершиной j стрелкой с началом в i и концом в j тогда и только тогда, когда $\overline{f_i} W \overline{f_j} \neq 0$. Полученный конечный ориентированный граф $PQ(A)$ будем называть *первичным колчаном FDD-кольца A*.

Очевидно, что $PQ(A) = PQ(A/I^2)$ и $PQ(A)$ определен однозначно с точностью до перенумерации вершин. Кроме того, первичные колчаны FDD-колец, эквивалентных в смысле Мориты, совпадают.

Отметим, что говоря колчан, мы, следуя Габриелю, подразумеваем конечный ориентированный граф. Приведем важное определение T-нильпотентности, данное Бассом [12]. Мы следуем монографии [13, гл.11].

Определение 6. Правый (левый, двусторонний) идеал J называется *T-нильпотентным слева (справа)*, если для любой последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ элементов $a_i \in J$ существует натуральное число k такое, что произведение $a_k a_{k-1} \ldots a_1 (a_1 \ldots a_{k-1} a_k)$ равно нулю. Идеал J будем называть T-нильпотентным, если он T-нильпотентен справа и слева.

Отметим следующие два результата, доказанные в [14].

Теорема 1.3. *Следующие условия равносильны для кольца A с T-нильпотентным первичным радикалом I :*

(a) *кольцо A неразложимо;*

(b) *фактор-кольцо A/I^2 неразложимо.*

Напомним, что колчан Q называется связным, если множество его вершин нельзя представить в виде объединения двух непустых непересекающихся подмножеств, между которыми нет стрелок.

С учетом теоремы 1.1 и определений этого параграфа, следствие 2.4 [14] можно сформулировать следующим образом:

Следствие 1.4. *Пусть A является FDD-кольцом. Первичный колчан FDD-кольца A с T-нильпотентным первичным радикалом I связен тогда и только тогда, когда кольцо A неразложимо.*

§2. $SPSD$-кольца

Приведем основные сведения о полусовершенных полудистрибутивных кольцах ($SPSD$-кольцах) [15], [8], [10].

Напомним, что модуль M называется дистрибутивным, если для любых его подмодулей K, L, N справедливо равенство:

$$K \cap (L + N) = K \cap L + K \cap N.$$

Теорема 2.1 [15]. *Модуль дистрибутивен тогда и только тогда, когда цоколь каждого его фактормодуля содержит не более одного экземпляра каждого простого модуля.*

Прямая сумма дистрибутивных модулей называется полудистрибутивным модулем.

Кольцо A называется полудистрибутивным справа (слева), если модуль $A_A(_AA)$ полудистрибутивен. Полудистрибутивное справа и слева кольцо называется полудистрибутивным.

Идемпотент e кольца A называется локальным, если кольцо eAe локально.

Определение 7 [16]. Полусовершенное полупервичное нетерово справа кольцо A называется *полумаксимальным*, если для каждого локального идемпотента $e \in A$ кольцо eAe является дискретно нормированным кольцом (не обязательно коммутативным).

Теорема 2.2 [8]. *Следующие условия равносильны для полусовершенного полупервичного нетерова справа кольца A :*

(a) *кольцо A полудистрибутивно;*

(b) *кольцо A является прямым произведением полупростого артинова кольца и полумаксимального кольца.*

Кольцо A называется первичным, если произведение любых двух ненулевых идеалов этого кольца отлично от нуля. Ясно, что всякое первичное кольцо полупервично.

Пусть O — дискретно нормированное кольцо с телом частных D, $M_n(D)$ — кольцо всех квадратных матриц порядка n с коэффициентами из тела D.

Обозначим через A кольцо всех матриц $(a_{ij}) \in M_n(D)$ таких, что $a_{ij} \in \pi^{\alpha_{ij}}O$ (α_{ij} — целое число).

Поскольку A является кольцом, то $\alpha_{ij} = 0$ и $\alpha_{ij} + \alpha_{jk} \geq \alpha_{ik}$ для всех i, j, k.

Матрица $N(A) = (\alpha_{ij})$ называется матрицей показателей первичного полумаксимального кольца A.

Кольцо A будем записывать в виде $A = \{N(A), O\}$. Ясно, что кольцо A — нетерово с двух сторон.

Следующая теорема дает описание полумаксимальных колец.

Теорема 2.3 [16]. *Следующие условия равносильны для полусовершенного полупервичного кольца A :*

(a) *кольцо A полумаксимально;*

(b) *кольцо A изоморфно конечному прямому произведению первичных полумаксимальных колец вида $\{N(A), O\}$.*

Следствие 2.4. *Нетерово справа полупервичное $SPSD$-кольцо — нетерово слева.*

Пусть O — дискретно нормированное кольцо, $\pi O = O\pi$ — его единственный максимальный идеал. Обозначим через $H_s(O)$ кольцо матриц вида:

$$H_s(\mathbf{O}) = \begin{bmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \pi\mathbf{O} & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \pi\mathbf{O} & \pi\mathbf{O} & \dots & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \pi\mathbf{O} & \pi\mathbf{O} & \dots & \pi\mathbf{O} & \mathbf{O} \end{bmatrix}.$$

Ясно, что

$$N(H_s(O)) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Как следует из [17], всякое нетерово наследственное полупервичное полусовершенное кольцо эквивалентно в смысле Мориты конечному прямому произведению колец вида $H_s(O)$ и нескольких тел. Наоборот, все такие кольца являются полупервичными полусовершен- ными нетеровыми наследственными кольцами.

Определение 8. Модуль M называется *конечно представимым*, если существует точная последовательность $P_1 \mapsto P_0 \mapsto M \mapsto 0$, где P_0 и P_1 — конечнопорожденные проективные модули.

Обозначим через $\mu_A(M)$ минимальное число образующих A-модуля M.

Определение 9 [18]. Кольцо A называется *кольцом модульно ограниченного типа* (*м.о.т. кольцом*), если существует натуральное число N такое, что $\mu_A(M) \leq N$ для любого неразложимого конечно представимого модуля M.

Отметим, что если м.о.т. кольцо A артиново, то оно является кольцом конечного типа, т.е. имеет, с точностью до изоморфизма, конечное число неразложимых конечнопорожденных модулей.

Теорема 2.5. *Нетерово справа полупервичное $SPSD$-кольцо A является м.о.т. кольцом тогда и только тогда, когда A является полуцепным кольцом.*

Доказательство. Если кольцо A является полуцепным, то по теореме Дрозда-Уорфилда любой неразложимый конечно представимый A-модуль является полуцепным [19],[18]. Следовательно, кольцо A является м.о.т. кольцом.

Наоборот, по теореме 2.2 достаточно показать, что полумаксимальное м.о.т. кольцо A является полуцепным. Это следует из теоремы Михлера [17], дающей описание полупервичных полусовершенных нетеровых колец и следующей теоремы, доказанной в [20].

Теорема 2.6. *Полумаксимальное кольцо A является м.о.т. кольцом тогда и только тогда, когда A является нетеровым полусовершенным наследственным полупервичным кольцом.*

Следствие 2.7. *Нетерово справа полупервичное $SPSD$-кольцо модульно ограниченного типа эквивалентно в смысле Мориты прямому произведению нескольких тел и нескольких колец вида $H_s(O)$. Наоборот, все такие кольца являются м.о.т. кольцами.*

§3. $SPSDSH$-кольца

В этом параграфе мы рассмотрим полусовершенные полудистрибутивные полунаследственные кольца ($SPSDSH$-кольца) с нетеровой диагональю.

Предложение 3.1 [11], [21]. *Если A — наследственное (полунаследственное) $SPSD$-кольцо и $e^2 = e \in A, e \neq 0$, то кольцо eAe является наследственным (полунаследственным) $SPSD$-кольцом.*

Хорошо известно (см., напр., [11]), что полусовершенные полунаследственные кольца являются кусочными областями в смысле [22].

Колчан Q называется ацикличным, если в нем нет ориентированных циклов [23].

Стрелка $\sigma : i \mapsto j$ ацикличного колчана Q называется лишней, если существует путь из точки i в точку j длины больше единицы.

Определение диаграммы конечного частично упорядоченного множества (ч.у.м.) [21], [9].

Пусть $S = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ — конечное ч.у.м. с отношением порядка $\leq$, запись $\alpha_i < \alpha_j$ означает, что $\alpha_i \leq \alpha_j$ и $\alpha_i \neq \alpha_j$. Диаграммой ч.у.м S называется колчан $\Gamma(S)$ с множеством вершин $\{1, \ldots, n\}$ и из вершины i в вершину j $(i \neq j)$ идет стрелка тогда и только тогда, когда $\alpha_i < \alpha_j$ и не существует элемента α_k такого, что $\alpha_i < \alpha_k < \alpha_j$.

Предложение 3.2 [21], [9]. *Ацикличный колчан Q является диаграммой конечного ч.у.м. S тогда и только тогда, когда он не имеет кратных и лишних стрелок.*

В этом случае мы будем писать $Q = \Gamma(S)$.

Определение 10. Минимальный (максимальный) элемент ч.у.м. S будем называть *изолированным*, если в $\Gamma(S)$ из него выходит (в него входит) не более одной стрелки.

Элемент ч.у.м. S будем называть экстремальным, если он является либо минимальным, либо максимальным элементом.

Интервалом $[\alpha, \beta]$ ч.у.м. S называется множество $[\alpha, \beta] = \{\gamma \in S \mid \alpha \leq \gamma \leq \beta\}$.

Четырехэлементное ч.у.м. $R = \{a, b, c, d\}$ будем называть ромбом, если элементы b и c не сравнимы и $a < b < d$ и $a < c < d$.

Результаты [10] (следствия 3.22, 3.23, 3.24) можно сформулировать следующим образом.

Теорема 3.3. *Первичный колчан $PQ(A)$ полунаследственного $SPSD$- кольца A является диаграммой $\Gamma(S)$ конечного ч.у.м. S не содержащего ромбов.*

Пусть A — полунаследственное $SPSD$-кольцо с нетеровой диагональю.

В этом случае согласно [7], [8] представление (*) первичного радикала I кольца A имеет вид:

$$I = \begin{bmatrix} 0 & A_{12} & A_{13} & \dots & A_{1t-1} & A_{1t} \\ 0 & 0 & A_{23} & \dots & A_{2t-1} & A_{2t} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_{3t-1} & A_{3t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & A_{t-1t} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (**),$$

причем все кольца $A_k = f_k A f_k$ нетеровы справа, наследственны и первичны.

Поэтому каждое кольцо A_k эквивалентно в смысле Мориты либо телу, либо кольцу $H_s(\mathbf{O})$.

Обозначим через A_0 прямое произведение колец $A_1, \dots, A_t$. Ясно, что A_0 является диагональю кольца A, $A = A_0 \oplus I$ (знак прямой суммы означает прямую сумму абелевых групп).

Пусть $S = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ — конечное ч.у.м., элементы которого занумерованы таким образом, что $\alpha_i < \alpha_j$ тогда и только тогда, когда $i < j$.

Рассмотрим кольцо $B = B(S, D, u_{ij}, \overline{\omega_{ij}}) = B(S, D, U, \Omega)$, где D — тело, u_{ij} — косые матричные единицы (skew matrix units), $\overline{\omega_{ij}}$ — автоморфизмы тела $D, \overline{\omega_{ij}} = id, U = (u_{ij}), \Omega = (\overline{\omega_{ij}}) (i = 1, \dots, t) u_{ij} \in U$ (или, что то же самое $u_{ij} \in B$) тогда и только тогда, когда $\alpha_i \leq \alpha_j$ и $u_{ij}u_{jk} = u_{ik}$, если $u_{ij}, u_{jk} \in U$. Кольцо B задается D-базисом u_{ij} (левым и правым) и соотношениями $du_{ij} = u_{ij}d^{\overline{\omega_{ij}}}, (\overline{\omega_{ij}} \in \Omega)$. Кроме того, $du_{ij}u_{jk} = u_{ij}d^{\overline{\omega_{ij}}}u_{jk} = u_{ij}u_{jk}d^{\overline{\omega_{ij}\omega_{jk}}} = u_{ik}d^{\overline{\omega_{ik}}}$, откуда $\overline{\omega_{ik}} = \overline{\omega_{ij}\omega_{jk}}$.

Следующие утверждения доказаны в [10].

Теорема 3.4. *Каждое наследственное полудистрибутивное артиново кольцо эквивалентно в смысле Мориты конечному прямому произведению неразложимых колец вида $B(S, D, U, \Omega)$, где S — конечное ч.у.м. без ромбов. Наоборот, каждое кольцо такого вида является наследственным полудистрибутивным артиновым кольцом.*

Обозначим через $\tilde{A}$ — классическое кольцо частных кольца A (если оно существует).

Теорема 3.5. *$SPSDSH$-кольцо A имеет классическое кольцо частных $\tilde{A}$, которое имеет вид: $\tilde{A} = \tilde{A}_0 \oplus I$.*

Следствие 3.6. *Классическое кольцо частных A полунаследственного $SPSD$-кольца A является артиновым наследственным полудистрибутивным* *кольцом и первичный радикал I кольца A совпадает с радикалом Джекобсона R кольца $\tilde{A}$.*

Следствие 3.7. *Первичный колчан $PQ(A)$ полунаследственного $SPSD$-кольца A совпадает с колчаном $Q(\tilde{A})$ наследственного артинова полудистрибутивного кольца $\tilde{A}$.*

Предложение 3.8. *Колчан кольца $B(S, D, U, \Omega)$ является диаграммой $\Gamma(S)$ ч.у.м. S.*

Определение 11. Пусть A — полунаследственное $SPSD$-кольцо с нетеровой диагональю. *Весом вершины k* будем называть число 0, если A_k эквивалентно в смысле Морити телу. Если A_k эквивалентно в смысле Морити кольцу $H_s(O)$, то весом вершины k будем называть число 1.

Вершину веса 1 мы будем обозначать $\odot$, а вершину веса нуль — $\bullet$.

Определение 12. Вершина i колчана Q называется *истоком* (*стоком*), если в нее не входит (из нее не выходит) стрелка ([23], §8.6).

В случае, когда $Q = \Gamma(S)$, где S конечное ч.у.м., это означает, что элемент i является минимальным (максимальным) элементом S.

Имеет место такая теорема ([24], теорема 2.1).

Теорема 3.9. *Наследственное справа $SPSD$-кольцо A — нетерово справа.*

Из теоремы 3.8 [21], используя терминологию настоящей статьи, получаем следующую теорему:

Теорема 3.10. *Первичный колчан $PQ(A)$ наследственного справа $SPSD$-кольца A является диаграммой $\Gamma(S)$ конечного ч.у.м. S, не содержащего ромбов, причем, если вес вершины колчана $\Gamma(S)$ равен единице, то эта вершина является минимальным элементом ч.у.м. S. Наоборот, если есть колчан $\Gamma(S)$, являющийся диаграммой конечного ч.у.м. S, удовлетворяющий указанным выше условиям, то существует наследственное справа $SPSD$-кольцо такое, что $PQ(A) = \Gamma(S)$.*

Отметим также, что наследственное справа $SPSD$-кольцо — полунаследственно слева и его диагональ нетерова.

Через $\overline{Q}$ обозначим неориентированный граф, полученный из колчана Q снятием ориентации.

Нам понадобятся следующие простые диаграммы Дынкина (см. рис. 1).

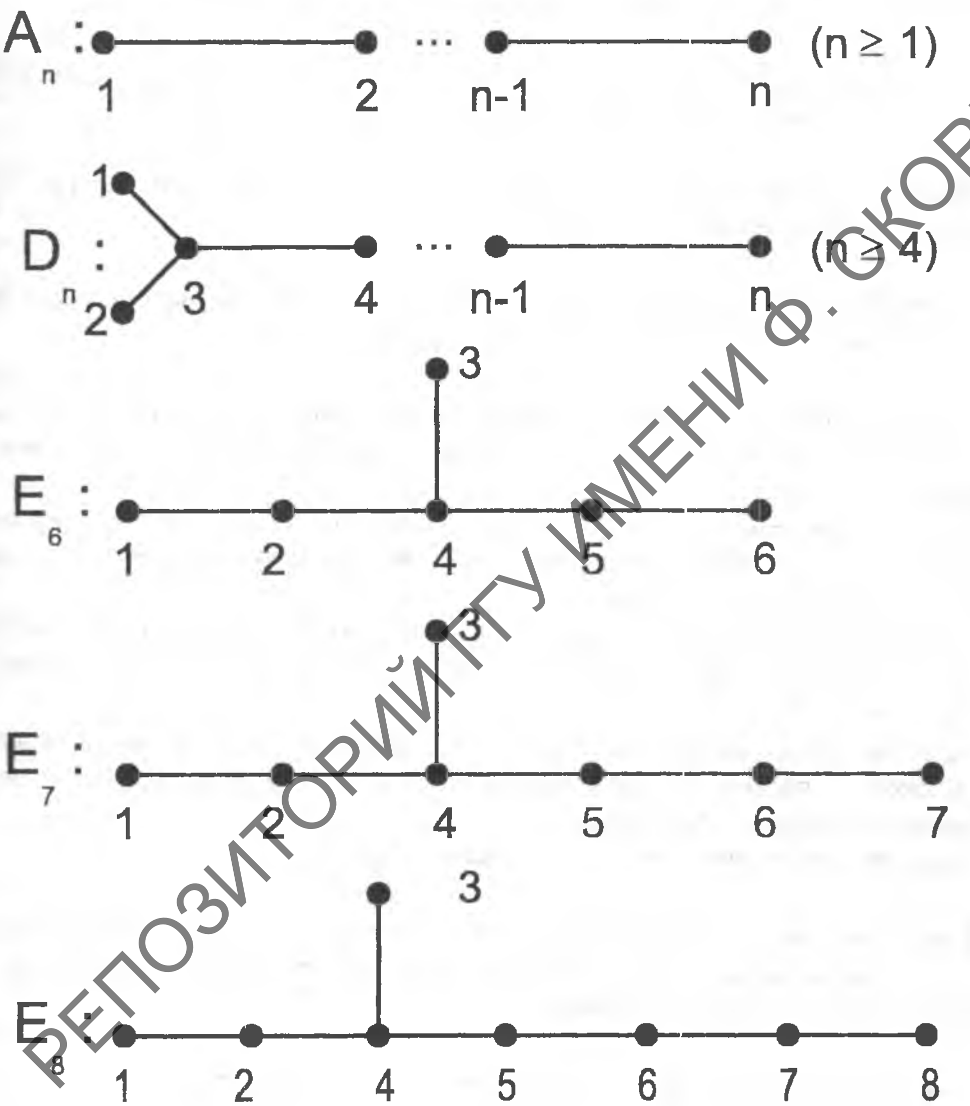

Рис. 1.

Нумерация вершин такая же, как в [25, с.242]. В силу представления (**) для первичного радикала $SPSDSH$-кольца A следует, что первичный радикал I такого кольца нильпотентен. Поэтому по следствию 1.4 кольцо неразложимо тогда и только тогда, когда его первичный колчан $PQ(A)$ связен.

Определение 13. [7]. Полусовершенное кольцо A называется *первичным блоком*, если его первичный колчан $PQ(A)$ связен.

Очевидно, первичный блок является неразложимым кольцом. Поэтому из теоремы 1.1 получаем следующую теорему

Теорема 3.11. *$SPSDSH$-кольцо единственным образом разлагается в конечное прямое произведение первичных блоков.*

Очевидно, конечное прямое произведение первичных блоков является м.о.т. кольцом тогда и только тогда, когда каждый первичный блок является м.о.т. кольцом.

Поэтому для описания $SPSDSH$-колец модульно ограниченного типа нам достаточно описать $SPSDSH$-кольца модульно ограниченного типа, которые являются первичными блоками.

Обозначим через t число вершин первичного колчана $PQ(A)$ полунаследственного $SPSD$-кольца A с нетеровой диагональю, которое является первичным блоком.

Из следствия 3.7 получаем, что, если $SPSDSH$-кольцо A является первичным блоком, то наследственное артиново полудистрибутивное кольцо A является блоком, т.е. колчан $Q(A)$ связен.

Нетрудно видеть, что справедлива такая теорема.

Теорема 3.12. *Если $SPSDSH$-кольцо A с нетеровой диагональю является м.о.т. кольцом, то артиновое наследственное полудистрибутивное кольцо A является кольцом конечного типа.*

Поэтому из результатов [3, 4, 5] получаем такое следствие.

Следствие 3.13. *Если первичный блок A является $\overline{SPSDSH}$-кольцом модульно ограниченного типа с нетеровой диагональю, то $\overline{PQ(A)}$ является одной из диаграмм Дынкина A_t, D_t, E_6, E_7, E_8.*

Замечание 1. *Если $\overline{PQ(A)} = E_k (k = 6, 7, 8)$, то $t = 6, 7, 8$.*

Замечание 2. *Всюду в дальнейшем нумерация вершин первичного колчана $PQ(A)$ кольца A, удовлетворяющего условиям следствия 3.13, такая же, как и нумерация вершин диаграммы Дынкина $\overline{PQ(A)}$ (см. наст. параграф).*

Отметим, что при этом клеточно-треугольный вид (**) не всегда сохраняется.

По теореме 3.3 в случае, когда A — первичный блок, $PQ(A) = \Gamma(S)$, где S — связное конечное ч.у.м., не содержащее ромбов. В формулировке следующей теоремы мы выделяем вершины веса 0 и 1 и дополнительно указываем, какие вершины $PQ(A)$ являются минимальными элементами ч.у.м. S. Эта необходимость возникает при появлении вершин веса 1. Напомним, что вершина веса 1 обозначается $\odot$, а вершина веса нуль — $\bullet$.

Еще раз подчеркнем, что первичный блок A — это полусовершенное кольцо A, первичный колчан которого связен.

Теорема 3.14. *Первичный блок A является наследственным справа $SPSD$-кольцом модульно ограниченного типа тогда и только тогда, когда $\overline{PQ(A)} = \overline{\Gamma(S)}$ является одной из следующих диаграмм Дынкина (см. рис. 2) с весами причем, все вершины веса 1 являются минимальными элементами ч.у.м. S.*

§4. SPSDSH-кольца модульно ограниченного типа

Лемма 4.1. *Если A полунаследственное $SPSD$-кольцо с нетеровой диагональю, e — ненулевой идемпотент кольца A, то кольцо eAe также является $SPSDSH$-кольцом с нетеровой диагональю.*

Доказательство следует из предложения 3.1 и представления (**) для первичного радикала I кольца A.

Из результатов [10] получаем такое предложение

Предложение 4.2. *Если число вершин первичного колчана $SPSDSH$-кольца A не превосходит двух, то это полуцепное кольцо.*

Следствие 4.3. *Всякое $SPSDSH$-кольцо A, в первичном колчане которого не более двух вершин, является кольцом модульно ограниченного типа.*

Определение 14. *Конечное ч.у.м. S будем называть связным, если диаграмма $\Gamma(S)$ ч.у.м. S является связным колчаном.*

Если первичный колчан $SPSDSH$-кольца A связен и $t = 3$, то очевидно, $\overline{\Gamma(S)} = \overline{PQ(A)} = A_3$ и соответствующие ч.у.м. S имеют следующий вид (см. рис. 3):

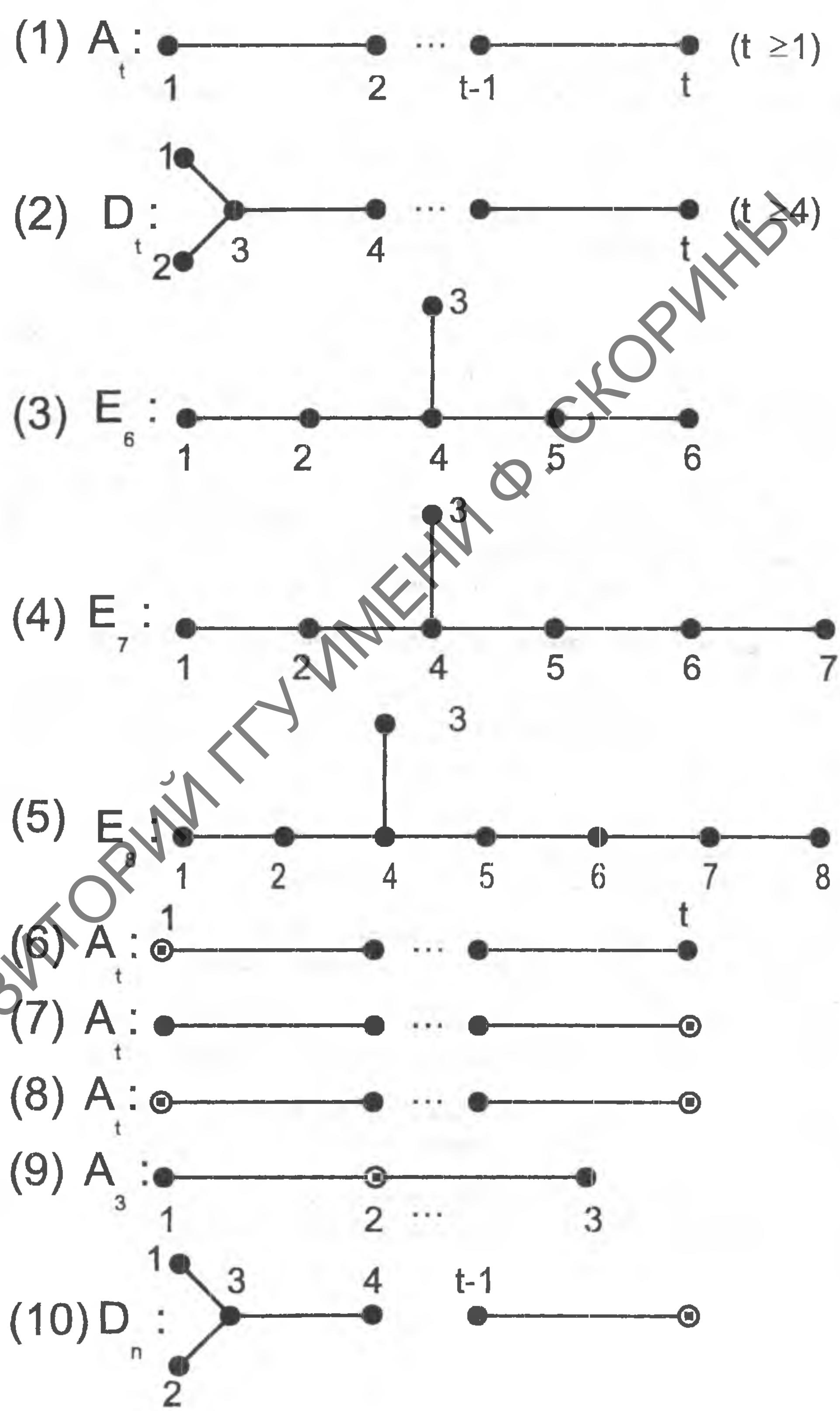
(1) A
t
:
1
2
t-1
t
(t ≥1)
(2) D
t
:
1
2
3
4
t
(t ≥4)
(3) E
6
:
3
1
2
4
5
6
(4) E
7
:
3
1
2
4
5
6
7
(5) E
8
:
3
1
2
4
5
6
7
8
(6) A
t
:
1
t
(7) A
t
:
(8) A
t
:
(9) A
3
:
1
2
3
(10) D
n
:
1
2
3
4
t-1

Рис. 2.

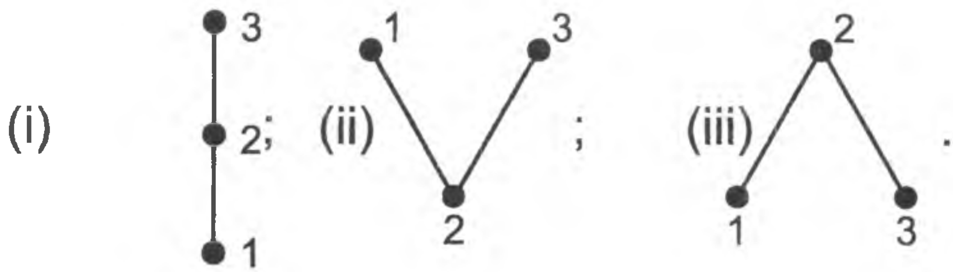

Рис. 3.

$$A = \left|\begin{array}{c|c|c} H_m(O_1) & 0 & \begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix} \\ \hline M_{n\times m}(D) & H_n(O_2) & \begin{matrix}D\\ \vdots\\ D\end{matrix} \\ \hline 0 & 0 & D \end{array}\right|$$

Рис. 4.

В случае (i) веса всех вершин могут быть произвольными. Такое кольцо всегда является полуцепным, и потому является кольцом модульно ограниченного типа.

В случаях (ii) и (iii), если веса всех вершин равны нулю, то, очевидно, кольцо A является артиновым наследственным полудистрибутивным кольцом. Поэтому по теореме 3.14 кольцо является артиновым кольцом конечного типа.

Следовательно, можно считать, что в случаях (ii) и (iii) вес хотя бы одной вершины равен 1.

Случай (ii). Предположим, что веса вершин 1 и 2 равны 1. Можно считать кольцо A приведенным. Тогда A имеет следующий вид (см. рис. 4), где $\mathbf{O_1}$ и $\mathbf{O_2}$ — дискретно нормированные кольца с общим телом частных D.

Задача описания конечно представимых A-модулей содержит, в частности такую задачу (см. рис. 5):

где A_1 и A_2 — матрицы с коэффициентами из тела D с одинаковым числом строк, причем, со строками матриц A_1 и A_2 можно производить любые элемен-

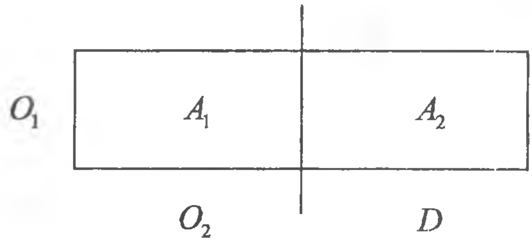

Рис. 5.

тарные преобразования над кольцом $\mathbf{O_2}$, над столбцами A_1 — любые элементарные преобразования над кольцом $\mathbf{O_1}$, над столбцами A_2 — любые элементарные преобразования над телом D.

Нетрудно видеть, что эта задача модульно неограниченного типа.

Точно также в случаях (ii) и (iii) веса двух последовательных вершин не могут иметь вес 1.

Поэтому имеет место следующее предложение.

Предложение 4.4. *Пусть A — неразложимое $SPSDSH$-кольцо с нетеровой диагональю модульно ограниченного типа, в первичном колчане которого три вершины. Тогда либо кольцо является полуцепным, либо веса двух последовательных вершин $PQ(A)$ не могут иметь вес* 1.

Наоборот, все кольца такого вида являются кольцами модульно ограниченного типа.

Из результатов [10] получаем следующую теорему.

Теорема 4.5. *Если все вершины первичного колчана $SPSDSH$-кольца A имеют вес* 0, *то A — артиново наследственное полудистрибутивное кольцо.*

Из этой теоремы и теорем 3.11 и 3.14 следует, что для описания м.о.т. $SPSDSH$-колец с нетеровой диагональю, нам остается описать неартиновы первичные блоки таких колец, причем, если первичный блок неартинов, то хотя бы одна вершина его первичного колчана имеет вес 1.

Рассмотрим первичные блоки указанных колец, в первичных колчанах которых четыре вершины. Обозначим через $\bar{A}_n$ диаграмму Эвклида $\bar{A}_n$ (см. рис. 6): (мы следуем терминологии и обозначениям [25, с. 242]).

Лемма 4.6. *Пусть $\Gamma(S)$ — диаграмма конечного связного ч.у.м. S, состоящего из четырех элементов. Тогда $\overline{\Gamma(S)}$ является либо диаграммой Эвклида A_3, либо одной из диаграмм Дынкина A_4, D_4.*

Рис. 6.

Доказательство леммы осуществляется простым перебором случаев.

В случае диаграммы Эвклида $\tilde{A}_3$ ч.у.м. S является следующим (см. рис. 7):

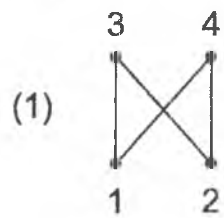

Рис. 7.

Как следует из [24, §2], $SPSDSH$-кольцо A с первичным колчаном $PQ(A) = \Gamma(S)$, где S — частично упорядоченное множество (1), является кольцом модульно неограниченного типа.

В случае диаграммы Дынкина D_4 ч.у.м. S является одним из следующих (см. рис. 8):

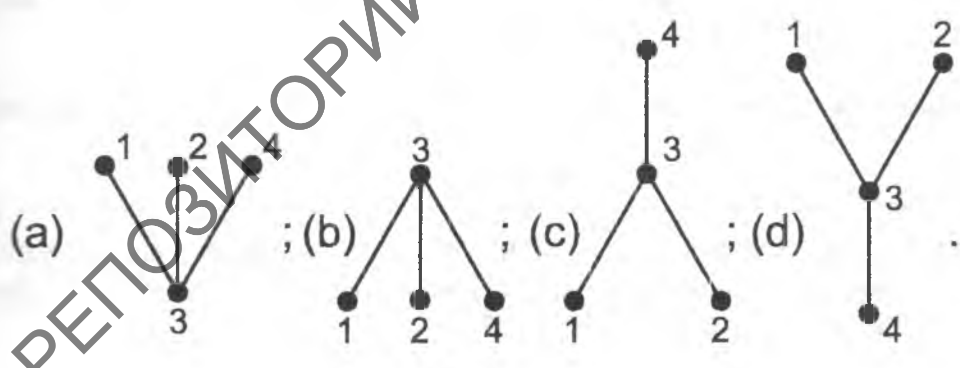

Рис. 8.

Именно такую нумерацию вершин первичного колчана $PQ(A)$ мы будем использовать в формулировке следующего предложения.

Предложение 4.7. *Если первичный блок A, в первичном колчане которого четыре вершины, является неартиновым м.о.т. $SPSDSH$-кольцом с нете-*

ровой диагональю, то $\overline{PQ(A)} = \overline{\Gamma(S)}$ *является одной из диаграмм Дынкина* A_4, D_4, *причем веса всех неизолированных экстремальных вершин равны нулю. Пусть* $\overline{PQ(A)} = \overline{\Gamma(S)} = D_4$. *Если точка 3 экстремальна, то ее вес равен нулю и вес лишь одной из вершин* $1, 2, 4$ *равен 1. В случае, если точка 3 не экстремальна и вес хотя бы одной из вершин 1 или 2 равен единице, то веса остальных вершин равны нулю. Если веса вершин 1 и 2 равны нулю, то веса вершин 3 и 4 могут быть произвольными.*

Наоборот, все первичные блоки с первичными колчанами с четырьмя вершинами, указанного вида, являются кольцами модульно ограниченного типа.

В формулировке следующей теоремы A означает полунаследственное $SPSD$-кольцо A с нетеровой диагональю, являющееся неартиновым первичным блоком, в первичном колчане которого не менее пяти вершин. Предположим, что A — кольцо модульно ограниченного типа. В этом случае $\overline{PQ(A)} = \overline{\Gamma(S)}$ является либо диаграммой Дынкина A_t, либо диаграммой Дынкина D_t. Обозначим через $S_1 = \{1, 3, 4\}$ и $S_2 = \{1, 2, 4\}$ подмножества ч.у.м. S такого, что $\overline{\Gamma(S)} = D_t$.

Теорема 4.8. *Если кольцо A является м.о.т. кольцом, то веса всех неизолированных экстремальных вершин первичного колчана* $PQ(A)$ *равны нулю. Если* $\overline{PQ(A)} = \overline{\Gamma(S)} = D_t$, *то веса вершин 1 и 2 равны нулю. Если вершина не является экстремальной в* S, *то вес ее равен нулю в случае, когда она является экстремальной хотя бы в одном из подмножеств* S_1 *или* S_2. *Веса остальных вершин могут быть произвольными.*

Наоборот, все первичные блоки с первичными колчанами указанного вида являются кольцами модульно ограниченного типа.

Доказательство этой теоремы основывается на результатах работ [6] и [26].

Summary

N.M.Gubareni, V.V.Kirichenko, U.S.Revitskaya. Semi-perfect semi-distributive semi-hereditary rings of modular restricted type // Proc. Gomel State Univ. — 1999. — №1(15) Problems in Algebra. — P. 18–36

The criterion of bounded representation type for SPSDSH-rings (semi-perfect semi-distributive semi-hereditary rings) with Noetherian diagonal is obtained.

Литература

1. Ламбек И. Кольца и модули.— М.: Мир. — 1971. — 280с.

2. Фейс К. Алгебра: кольца, модули и категории.— М.: Мир, ч.2. — 1979. — 454с.

3. Gabriel P. Unzerlegbare Darstellungen I // Manuscripta Math. — 1972. — 6. — p.71–103.

4. Dlab V., Ringel C.M. On algebras of finite representation type // J.Algebra — 1975. — v.33, №2 — p.306–394.

5. Dlab V., Ringel C.M. Indecomposable representations of graphs and algebras. Memoires Amer.Math.Soc., 1976, v.173.

6. Губарени Н.М. Наследственные справа кольца модульно ограниченного типа. — Киев, 1977. — 48с. — (Препр.АН Украины.Ин-т электродинамики, 148).

7. Кириченко В.В., Самир Валио, Яременко Ю.В. Полусовершенные кольца и их колчаны // Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры. — Киев: Ин-т математики, 1993 — с.438–456.

8. Кириченко В.В., Хибина М.А. Полусовершенные полудистрибутивные кольца // там же — с.457–480.

9. Kirichenko V.V. Semi-perfect rings and their quivers // Analele Stiint., Univ. Ovidius, Constanza, v.4., 1996, f.2. — pp.89–97.

10. Kirichenko V.V. Semi-perfect semi-distributive rings, Algebras and Representations Theory, to appear.

11. Кириченко В.В. О полуцепных наследственных и полунаследственных кольцах // Зап.научн.сем. ЛОМИ АН СССР. — 1982, т.114, с.137 – 147.

12. Bass H. Finitistic dimension and homological generalization of semi-primary rings // Trans.AMS, v.95 — 1960 — pp.466–488.

13. Каш Ф. Модули и кольца — М.: Мир, 1981, 388с.

14. Кириченко В.В., Мащенко Л.З., Яременко Ю.В. Теоремы разложения для ассоциативных колец // Вопросы алгебры, Гомельский ун-т, вып.11, 1997, с.42–47.

15. Camillo V. Distributive modules // J.Algebra, v.36, 1975, pp.16–25.

16. Завадский А.Г., Кириченко В.В. Модули без кручения над первичными кольцами // Зап.науч.сем. ЛОМИ АН СССР — 1976, т.57, с.100–116.

17. Michler G. Structure of semi-perfect hereditary Noetherian rings // J.Algebra, v.13, №3 — 1969, pp.327–344.

18. Warfield R.B.Jr. Serial rings and finitely presented modules // J.Algebra, v.37, №2 — 1975, pp.187–222.

19. Дрозд Ю.А. Об обобщенно однорядных кольцах // Матем.заметки, т.18, №5 — 1975, с.705–710.

20. Грегуль О.Е., Кириченко В.В. Конечнопорожденные модули над полумаксимальными кольцами // Вестник КГУ, сер. механика и математика, т.27, 1985.

21. Кириченко В.В., Могилева В.В., Пирус Е.М., Хибина М.А. Полусовершенные слабопервичные кольца и кусочные области // Алгебраические исследования, Сборник статей, Ин-т математики НАН Украины, Киев, 1995, с.33–65.

22. Gordon R., Small L.W., Piecewise domains // J.Algebra, v.23, №3 — 1972, pp.555–564.

23. Пирс Р. Ассоциативные алгебры. — М.: Мир, — 1986. — 426с.

24. Кириченко В.В., Костюкевич П.П., Яременко Ю.В. Бирядные кольца и модули над ними // Алгебраические структуры и их применение. — Киев: УМК ВО, 1988. — с.43–74.

25. Auslander M., Reiten J., Smalш S., Representation Theory of Artin Algebras, Cambridge Univ.Press, 1995. — 423p.

26. Завадский А.Г., Ревицкая У.С. Об одной матричной задаче над дискретно нормированным кольцом, Киевский гос. ун-т стр-ва и арх., Препринт 98.2. Киев, 1998, 24с.

Киевский университет
им. Тараса Шевченко
e-mail: vkir@mechmat.univ.kiev.ua

Поступило 01.02.1999