Известия Гомельского государственного университета имени
Ф.Скорины. — 1999. — №1(15) Вопросы алгебры. — С. 111–115

УДК 519.41/47

С. А. Довженко

ЛОКАЛЬНО КОНЕЧНЫЕ И ЛОКАЛЬНО ПОЧТИ РАЗРЕШИМЫЕ ГРУППЫ С ДОПОЛНЯЕМЫМИ НЕФРАТТИНИЕВЫМИ ПОДГРУППАМИ

Вопросы дополняемости тех или иных подгрупп занимали и занимают значительное место в исследованиях по теории групп. Хорошо известно, что подгруппа Фраттини конечной группы не содержит отличных от единицы дополняемых в группе подгрупп. В работе [1] автором получено описание строения конечной группы G, в которой дополняемы все подгруппы, не принадлежащие к ее подгруппе Фраттини $\Phi(G)$. В настоящей работе установлено строение локально конечной и локально почти разрешимой групп $G \neq \Phi(G)$ с тем же условием. Основными ее результатами являются следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть G — локально конечная группа. Тогда и только тогда $G \neq \Phi(G)$ и каждая подгруппа $H \not\subseteq \Phi(G)$ группы G дополняема в ней, когда G либо отличная от единицы вполне факторизуемая группа, либо циклическая p-группа порядка $> p$, либо группа порядка p^3 вида $G = (< a > \times < c >) \leftthreetimes < b >$, где $|a| = |b| = |c| = p$, $c^b = ca$, $a^b = a$ (p — произвольное простое число).*

Теорема 1 существенно используется в доказательстве следующего предложения.

Теорема 2. *Пусть G — локально почти разрешимая (в частности, локально разрешимая) группа. Тогда и только тогда $G \neq \Phi(G)$ и каждая подгруппа $H \not\subseteq \Phi(G)$ группы G дополняема в ней, когда G либо отличная от единицы вполне факторизуемая группа, либо циклическая p-группа порядка $> p$, либо группа порядка p^3 вида $G = (< a > \times < c >) \leftthreetimes < b >$, где $|a| = |b| = |c| = p$, $c^b = ca$, $a^b = a$ (p — произвольное простое число).*

В доказательствах теорем 1 и 2 используются следующие леммы 1–8.

Лемма 1. *Подгруппа Фраттини $\Phi(G)$ группы G не имеет отличных от единицы дополняемых в G конечнопорожденных подгрупп.*

Доказательство. Действительно, если для конечного множества K элементов $\Phi(G)$ и некоторой подгруппы H группы G $G =< K > H$, то $G =< K \cup H >$. Поскольку произвольный элемент подгруппы $\Phi(G)$ можно удалить из любой системы образующих группы G (см., например, [2], теорема 2.2.6), то $G = H$. Следовательно, H может дополнять $< K >$ в G лишь в случае, когда $< K >= 1$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть G — группа и N — ее нормальная подгруппа. Тогда $N\Phi(G)/N \subseteq \Phi(G/N)$.*

Доказательство. Можно считать, что $G/N \neq \Phi(G/N)$. Пусть H/N — произвольная максимальная подгруппа факторгруппы G/N и $\Phi(G/N) = K/N$. Очевидно, H — максимальная подгруппа группы G. Следовательно, $\Phi(G) \subseteq H$ и, значит, $N\Phi(G)/N \subseteq H/N$. Поэтому ввиду произвольности H/N, $N\Phi(G)/N \subseteq K/N$. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть G — вполне факторизуемая группа. Тогда $\Phi(G) = 1$.*

Доказательство. Действительно, для произвольного $g \in \Phi(G)$ подгруппа $< g >$ дополняема в G и, значит, ввиду леммы 1, $g = 1$. Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть N — нормальная подгруппа группы G и $G/N \neq \Phi(G/N)$. Если каждая подгруппа группы G, не принадлежащая к $\Phi(G)$, дополняема в G, то каждая подгруппа группы G/N, не принадлежащая к $\Phi(G/N)$, дополняема в G/N.*

Доказательство. Пусть H/N — подгруппа группы G/N, не принадлежащая к $\Phi(G/N)$. Так как ввиду леммы 2, $N\Phi(G)/N \subseteq \Phi(G/N)$, то $H \not\subseteq \Phi(G)$, и, значит, H дополняема в G с помощью некоторой подгруппы D. Тогда, очевидно, DN/N дополняет подгруппу H/N в G/N. Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть H — истинная подгруппа группы $G \neq 1$ и все подгруппы группы G, не лежащие в H, дополняемы в G; K — пересечение подгрупп H^φ по всем $\varphi \in \mathrm{Aut}G$. Тогда K — характеристическая подгруппа группы G с вполне факторизуемой факторгруппой G/K, и каждая подгруппа группы G, не принадлежащая к K, дополняема в G.*

Доказательство. Пусть L — произвольная подгруппа группы G, не принадлежащая к K . Тогда для некоторого $\varphi \in \mathrm{Aut}G$, $L \not\subseteq H^\varphi$, и, значит, $L^{\varphi^{-1}} \not\subseteq H$. Следовательно, $L^{\varphi^{-1}}$ дополняема в G с помощью некоторой подгруппы D. Тогда, очевидно, $L = (L^{\varphi^{-1}})^\varphi$ дополняема в G с помощью D^φ. Кроме того, если $K \subset L$, то L/K дополняема в G/K с помощью $D^\varphi K/K$. Ввиду произвольности выбора L, группа G/K — вполне факторизуемая. Лемма доказана.

Лемма 6. *Пусть в группе $G \neq \Phi(G)$ дополняема каждая подгруппа $H \not\subseteq \Phi(G)$. Тогда $G/\Phi(G)$ — вполне факторизуемая.*

Лемма 6 непосредственно вытекает из леммы 5.

Лемма 7. *Пусть H — истинная подгруппа группы $G \neq 1$ и все подгруппы группы G, не лежащие в H, дополняемы в G. Тогда каждый элемент g из разности $G \setminus H$ имеет конечный порядок.*

Доказательство. Пусть K та же, что в лемме 5. Так как факторгруппа G/K вполне факторизуема, то ее элемент gK имеет конечный порядок $n > 1$. Поскольку $g^{n+1} \notin K$, то ввиду леммы 5 подгруппа $< g^{n+1} >$ дополняема в G. Значит, ввиду леммы С.Н.Черникова она дополняема в $< g >$ с помощью некоторой подгруппы D. Если бы порядок элемента g был бесконечен, то бесконечная циклическая группа $< g >$ содержала бы подгруппу D порядка $n+1 \neq 1$, что невозможно. Лемма доказана.

Лемма 8. *Пусть $G = A \leftthreetimes B$ — группа, A — конечнопорождённая абелева без кручения и B — конечная. Если в G дополняема каждая ее подгруппа, содержащая B, то $A = 1$.*

Доказательство. В самом деле, пусть $A \neq 1$. Возьмем простое p, не делящее $|B|$. Пусть $R = \{g^p | g \in A\}$. Тогда, очевидно, $R \triangleleft G$, $|A : R| = p^n$, $n \geq 1$ и $|G : BR| = |A : R|$. Если BR дополняема в G с помощью некоторой подгруппы D, то $|D| = |G : BR|$ и, значит, $|D| = p^n$. Так как A без кручения, то $D \cap A = 1$. Следовательно, $D \cong DA/A \subseteq G/A \cong B$, и, значит, $|D|$ делит $|B|$. Таким образом, $D = 1$. Тогда $G = RB$, а потому ввиду леммы С.Н.Черникова $A = R(A \cap B) = R$, что невозможно. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Необходимость. Ввиду теоремы [1], можно считать, что G бесконечна. Пусть R — конечная подгруппа группы G, порядок которой делится не менее чем на четыре простых числа (не обязательно различных). Очевидно, G не является квазициклической группой и, значит, содержит конечную подгруппу K, которая не является примарной циклической. Пусть $g \in \Phi(G)$, $u \in G \setminus \Phi(G)$ и $F =< R, K, g, u >$. Тогда $F \not\subseteq \Phi(G)$ и, значит, F дополняема в G с помощью некоторой подгруппы D. Поскольку $|F| < \infty$, то $|G : D| < \infty$. Следовательно, ввиду теоремы Пуанкаре D содержит подгруппу $L \triangleleft G$, такую, что $|G : L| < \infty$. Так как $F \cap L = 1$, то F изоморфно вкладывается в G/L. Значит G/L не является примарной циклической группой и $|G/L|$ делится не менее чем на четыре простых числа. Ввиду леммы 4 в G/L, дополняема каждая подгруппа, не принадлежащая к $\Phi(G/L)$. Следовательно, в силу теоремы

[1], G/L вполне факторизуема. Тогда ввиду леммы 3 $\Phi(G/L) = 1$. В силу леммы 2, $\Phi(G)L/L \subseteq \Phi(G/L)$. Следовательно, $\Phi(G)L/L = 1$, т.е. $\Phi(G) \subseteq L$, и, значит, $g \in L \subseteq D$. Тогда $g \in F \cap D = 1$. Ввиду произвольности g, $\Phi(G) = 1$. Поэтому G вполне факторизуема.

Достаточность с учетом леммы 3 устанавливается так же, как в доказательстве теоремы [1]. Теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть G — бесконечная локально конечная группа и $G \neq \Phi(G)$. В группе G каждая нефраттиниевая подгруппа дополняема тогда и только тогда, когда G вполне факторизуема.*

Доказательство теоремы 2. Пусть необходимость не имеет места. Возьмем произвольный элемент $u \in G \setminus \Phi(G)$. Ввиду теоремы 1 группа G не локально конечна. Поэтому, очевидно, в ней найдется бесконечная конечнопорожденная подгруппа H, содержащая u. Так как факторгруппа $G/\Phi(G)$ вполне факторизуема (лемма 6), то ввиду [3], [4] она локально конечна. Следовательно, $|H : H \cap \Phi(G)| < \infty$

Пусть K — инвариантная разрешимая подгруппа конечного индекса группы H и $L = K \cap \Phi(G)$. Тогда ввиду теоремы Пуанкаре, $|H : L| < \infty$. Далее, пусть M — наименьший член производного ряда подгруппы $L < u >$, имеющий конечный индекс в ней; R — следующий за ним член этого ряда; T/R — подгруппа, состоящая из всех элементов конечного порядка группы M/R. Так как $|H : M| < \infty$, то ввиду теорем Шрейера и Дика (см., например, [5], с.228, предложение II и с. 111), M конечнопорождена. Поскольку факторгруппа M/R абелева, бесконечна и конечнопорождена, то $M/R \neq T/R$. Следовательно, M/T — отличная от единицы конечнопорожденная абелева группа без кручения. Далее, ввиду леммы 7, $|u| < \infty$. Пусть X/T — произвольная подгруппа группы $F/T = (M/T) \leftthreetimes (< u > T/T)$, содержащая $< u > T/T$. Так как $X \not\subseteq \Phi(G)$, то подгруппа X дополняема в G, а, значит, ввиду леммы С.Н.Черникова — в F. Тогда, очевидно, X/T дополняема в F/T. В таком случае, ввиду леммы 8, $M/T = 1$. Противоречие. Необходимость доказана.

Достаточность настоящей теоремы с учетом леммы 3 устанавливается так же, как в доказательстве теоремы [1]. Теорема доказана.

Следствие 2. *Пусть G — бесконечная локально почти разрешимая (в частности, локально разрешимая) группа и $G \neq \Phi(G)$. В группе G каждая нефраттиниевая подгруппа дополняема тогда и только тогда, когда G вполне факторизуема.*

Summary

S.A.Dovzhenko. Locally finite and locally almost soluble groups with complemented non-Frattini subgroups // Proc. Gomel State Univ. — 1999. — №1(15) Problems in Algebra. — P. 111–115

In the paper it's obtained the description of the locally almost soluble groups G, in which every subgroup not belonging to the Frattini subgroup, has a complement.

Литература

1. *Довженко С.А.* К теореме Н.В.Черниковой о вполне факторизуемых группах // Укр. мат. журн. — 1999. — Т. 1, N 6.

2. *Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И.* Основы теории групп. М.: Наука. — 1982. — 288 с.

3. *Черникова Н.В.* Вполне факторизуемые группы // Докл. АН СССР. — 1953. — Т. 92, N 5. — С.877–880.

4. *Черникова Н.В.* Группы с дополняемыми подгруппами // Мат. сб. — 1956. — Т.39, N 3. — С.273–292.

5. *Курош А.Г.* Теория групп. — М.: Наука, 1967. — 648 с.

Брянский государственный
педагогический университет
им. акад. И.Г.Петровского

Поступило 01.03.99