Гомельский государственный университет им. Франциска Скорины
Физический факультет
Кафедра теоретической физики

Дей Е.А.

Руководства для лабораторных занятий по курсу «Вычислительные методы и компьютерное моделирование»

для студентов специальности
1-02 01 07-02 Английский язык. Информатика
(4 курс, 2 семестр)
(электронная версия)

Гомель 2016

Содержание

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА ВМКМ(и)-2016 – 01
ПОВТОРЕНИЕ ПРАВИЛ РАБОТЫ В ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ СРЕДЕ MATHCAD. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ В СРЕДЕ MATHCAD

Цель работы: изучение основных правил и приемов работы в вычислительной среде Mathcad

Внимательно прочитайте информацию об элементах Mathcad. При чтении текста обязательно сразу самостоятельно повторите те действия и вычисления, которые описываются.

Повторяя численные примеры, вы по результатам контролируете правильность своих действий и приобретаете опыт работы с Mathcad.

Отчетом по работе будет являться правильно оформленный Mathcad-документ, состоящий из двух частей:

1. Повторение численных примеров

2. Выполнение задания

1. Запуск и структура экрана среды MathCAD

Mathcad - это универсальная программа для выполнения численных и аналитических вычислений, сопровождаемых текстовыми пояснениями и графическим отображением результатов.

Документ в среде МС состоит из отдельных прямоугольных участков, называемых *блоками*. Типы блоков соответствуют отдельным элементам решения задач: текстовый, вычислительный, графический, программный, символьный.

Блоки автоматически обрабатываются в порядке «сверху-вниз, слева-направо», так что **результат работы любого блока можно использовать в других блоках ниже и правее его**. Пользователь создает нужные блоки в порядке, необходимом для решения задачи.

Для запуска программы достаточно выбрать имя программы в списке

Пуск – Все Программы –Mathcad 15

В результате открывается окно Mathcad, имеющее все стандартные элементы Windows-приложения.

Панели инструментов в среде МС и их назначение. Основные команды, управляющие работой системы, реализованы в виде *кнопок* графического интерфейса и собраны в *панель инструментов*, расположенную в верхней части экрана (Рисунок 1)

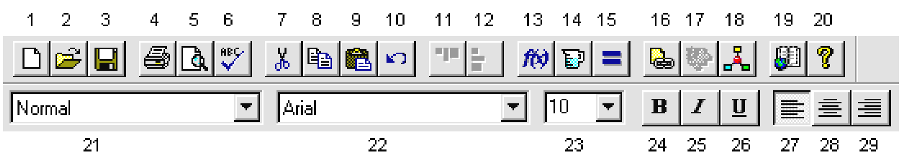


Рисунок 1 – Панель инструментов Mathcad

Помимо стандартных кнопок Windows-приложения (номера 1-10), МС содержит ряд кнопок палитры, связанных непосредственно с вычислениями:

11 – горизонтальное расположение блоков
12 – вертикальное расположение блоков
13 – вставка функции (из списка)
14 – вставка физических единиц (из списка)
15 – выполнение вычислений
19 – вызов Resource Center (таблицы, примеры)
20 – вызов справочной системы

Математическая палитра. Все необходимые для проведения расчетов элементы собраны в отдельные палитры кнопок. **Каждой палитре соответствует одна управляющая кнопка на основной математической панели, которая вызывается в меню <Вид> - <Панели инструментов> - <Математика>** (Рисунок 2). Для вызова на экран нужной палитры следует нажать управляющую кнопку. Повторное ее нажатие удаляет палитру с экрана.

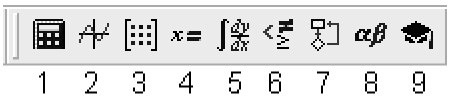


Рисунок 2 – математическая палитра

Назначение управляющих кнопок математической панели:

1 - вызов палитры арифметических вычислений («Калькулятор»)
2 - вызов палитры графических шаблонов
3 - вызов палитры команд обработки векторов и матриц
4 - вызов палитры команд определения и вычисления величин
5 - вызов палитры шаблонов вычислительных математических операций
6 - вызов палитры знаков логических операций (boolean)
7 - вызов палитры операторов языка программирования
8 - вызов палитры греческого алфавита
9 - вызов палитры команд аналитических вычислений

Упражнение. Расположите все математические палитры на экране. Внимательно рассмотрите их содержимое.

Оставьте открытыми палитру «Калькулятор» и палитру греческого алфавита, остальные – закройте.

2. Создание текстовых блоков

Любой МС-документ удобно начинать с текстового блока, содержащего краткое описание документа. Кроме того, отдельные этапы выполняемых вычислений и получаемые результаты полезно сопровождать текстовыми пояснениями, и комментариями.

Для создания текстового блока в документе следует:

– указать курсором место в документе, где должен появиться текстовый блок и выполнить команду меню <Вставка> - <Регион текста>. На экране появится шаблон текстового блока с текстовым курсором: .

– переключить клавиатуру на русский шрифт и набрать нужный текст внутри текстового блока.

Границы текстового блока автоматически раздвигаются при наборе текста. Важно помнить, что пока курсор находится в текстовой области, все вводимые символы, в том числе математические формулы, воспринимаются как текст. Для перехода к вычислениям нужно вывести курсор из текстового блока и переключить клавиатуру на английский шрифт.

Упражнение. Создайте в начале документа текстовый блок, наберите в нем название и цель лабораторной работы и свои данные (группа, фамилия, номер варианта).

Далее создайте новый текстовый блок с надписью «Повторение примеров».

При чтении текста повторите все вычисления в своем МС-документе.

ОТЧЕТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №1
«АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ В СРЕДЕ MATHCAD»
Выполнил: . . . . Группа: . . . . Вариант: . . .
Цель работы: . . .

I. Повторение примеров

Упражнение. Сохраните документ на диск D: в папку группы и далее в папку под своей фамилией (Главное меню – Файл – Сохранить как . . .).

В ходе дополнения документа нажимайте кнопку «Сохранить» в стандартной панели инструментов.

3. Ввод данных и вывод результатов

Каждой *переменной* соответствует место (ячейка) в оперативной памяти, где можно хранить численное значение, изменять его и использовать его в последующих вычислениях. Доступ к этой области памяти выполняется по имени переменной.

Имя переменной – это последовательность символов (букв и цифр), начинающаяся с буквы. Для задания числовых значений, которые будут использованы в вычислениях, используют переменные и команду присваивания. Команда присваивания **:=** набирается нажатием **одной** клавиши [**:**]

Набираем на клавиатуре a:3 b:5

Вид на экране в МС $a := 3$ $b := 5$

При наборе чисел дробная часть отделяется от целой части *точкой*.

В среде МС **различаются** большие и малые буквы и символы разных шрифтов, так что, например, AB, aB, Ab, ab – разные переменные.

Для выполнения арифметических действий нужно указать имена переменных и набрать соотношение с использованием знаков [+ - * /] на экране.

Для ***вывода на экран*** численного значения любой переменной или выражения достаточно набрать знак равенства =. Таким образом, знак = является в МС *командой вывода* численного значения.

$$a + b = 8 \qquad a - b = -2 \qquad a \cdot b = 15 \qquad \frac{a}{b} = 0.6$$

Если числовые значения в определениях переменных изменить на экране, то МС сразу *пересчитает* все последующие результаты.

Использование переменных составляет основу работы в вычислительной среде МС, так как позволяет хранить все промежуточные результаты и при необходимости использовать их в дальнейших вычислениях, указав только имя нужной переменной.

$$c := 4.8 \qquad z := c \cdot (2a + 3 \cdot b) \qquad w := (c - 2.5) \cdot (z + a \cdot b \cdot c) \qquad w = 397.44$$

Перенос и копирование и блоков. Отдельный блок перетаскивается по документу с помощью мыши. При установке на границу блока курсор принимает вид руки, держащей блок. При нажатой левой клавише мыши блок передвигается по документу.

Фрагмент документа, состоящий из *нескольких блоков* любого типа, можно выделить мышью и затем быстро удалить, скопировать, перенести в другое место.

Перетаскивание и перенос блоков используют для удобного оформления документа.

4. Набор сложных формул и выполнение расчетов

Обозначения алгебраических операций (возведение в степень, извлечение корня и т.д.) можно набирать с помощью соответствующих кнопок палитры «Калькулятор» или с помощью клавиатуры:

Математическое обозначение	Набрать на клавиатуре	Шаблон
$\frac{a}{b}$	a/b	$\frac{\blacksquare}{\blacksquare}$
( )	’	$(\blacksquare)$
$\lvert x\rvert$	$\vert$x	$\lvert\blacksquare\rvert$
x^y	x^y	$\blacksquare^{\blacksquare}$
$\sqrt{x}$	\x	$\sqrt{\blacksquare}$
$\sqrt[n]{x}$	[Ctrl] \ x	$\sqrt[\blacksquare]{\blacksquare}$

Следует учитывать, что в формуле элементы располагаются **на разных уровнях** (числитель, знаменатель, показатель степени, индексы), так что курсор необходимо установить на нужный уровень, а затем продолжить набор. Перевод курсора на другой уровень выполняется **клавишей «пробел»** (при необходимости – многократно).

$$\frac{12}{(3.4^2 + 1.2)} \qquad \frac{12}{(3.4^2 + 1.2)} \qquad \frac{12}{(3.4^2 + 1.2)} \qquad \frac{12}{(3.4^2 + 1.2)}$$

При наборе математических выражений, содержащих скобки, рекомендуется вначале создать пару скобок клавишей «апостроф» ['], а затем заполнить ячейку ввода заключенного в скобки выражения.

Для перехода к *следующей ячейке ввода* следует нажать клавишу **[Tab]**.

Пример. Отдельные этапы вычисления результата

$$\frac{\blacksquare}{\blacksquare} \qquad \frac{12.5}{\blacksquare} \qquad \frac{12.5}{7.3} \qquad \frac{12.5}{7.3} = 1.712$$

Пример. Арифметические вычисления

$$2.7\cdot\left(13.2+\frac{64.5}{7.4}\right) = 59.174 \qquad \frac{15.6\cdot(3.28+11.2)}{1.5\cdot1.6\cdot1.7+5} = 24.878$$

Формат результата. По умолчанию в Mathcad все результаты выводятся с 3 цифрами после десятичной точки.

Если нужен более подробный вывод, следует указать курсором нужный результат и в пункте меню **<Формат>-<Результат>-<Число десятичных знаков>** установить требуемое количество десятичных цифр.

Пример вычислений с выводом 5 цифр в дробной части:

$$\frac{23.6125\cdot(7.24-4.7865)}{12.87+2.381} = 3.79865 \qquad \sqrt{87.235} = 9.33997 \qquad 177^{\frac{4}{3}} = 993.79702$$

Встроенные константы и переменные. МС содержит встроенные (то есть, уже определенные и имеющие значение) константы и переменные.

Константа	Значение	Клавиатура	Палитра
π	3,1415926…	[Ctrl]+[Shift]+[p]	«Греческий»
e	2,71828…	e	
%	0,01	%	
∞	10307	[Ctrl]+[Shift]+[z]	«Калькулятор»

Символом ∞ обозначается «компьютерная бесконечность» - наибольшее число, реализованное в MathCAD.

Пример. Вычисления с использованием встроенных констант

$$\frac{1.92\cdot15.3}{3.45+4.56} = 3.667 \qquad \frac{\pi-1}{e+1} = 0.576 \qquad \frac{14.6\cdot0.144}{1.9\pi+7.98\cdot2.7} = 0.076$$

5. Встроенные функции среды МС

МС содержит множество встроенных функций, относящихся к алгебраическим, статистическим, численным расчетам.

Назначение функции - вычисление результата в соответствии с заданными значениями аргументов.

Обозначение функции состоит из *имени* и (в скобках) *списка аргументов*. Аргументы в обозначении функции называются формальными, они показывают, сколько элементов и какого типа необходимо указать при вызове функции.

Математическое обозначение	Mathcad	Математическое обозначение	Mathcad
Алгебраические функции		Различные функции	
e^z	exp(z)	отбрасывание дробной части	trunc(x)
ln z	ln(z)	Округление с избытком	ceil(x)
$\log_a z$	log(z,a)	Округление с недостатком	floor(x)
lg z	log(z)	остаток от деления x на y	mod(x,y)
Тригонометрические функции		Гиперболические функции	
sin z	sin(z)	sh x	sinh(x)
cos z	cos(z)	ch x	cosh(x)
tg z	tan(z)	th x	tanh(x)
ctg z	cot(z)	cth x	coth(x)
arcsin x	asin(x)	arsh x	asinh(x)
arccos x	acos(x)	arch x	acosh(x)
arctg x	atan(x)	arth x	atanh(x)
arcctg x	acot(x)	arcth x	acoth(x)

Примечание 1. Аргумент тригонометрических функций должен быть выражен в **радианах.**

Примечание 2. Аргумент функции всегда записывается в скобках (это и есть признак функции). Без скобок написание рассматривается как имя новой переменной, например: sinx – переменная, sin(x) – функция.

Для использования (вызова) функции необходимо в записи вычислительного блока набрать имя функции, а в качестве параметров указать те элементы, которые должны быть использованы в данном вычислении (фактические параметры). Например:

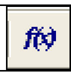
$\log(1.2) = 0.079$

$a := \cos(0.34 + \exp(-0.8))$ $\qquad$ $\mathrm{floor}(1.99) = 1$

$\sinh(a) + \mathrm{atan}\left(a^2 + 9.345\right) = 2.234$ $\qquad$ $\mathrm{ceil}(3.01) = 4$

Для алгебраических функций имя функции можно вставить из палитры «Калькулятор».

Полный список встроенных функций можно просмотреть в режиме вставки функции.

- или меню:	<Вставка> - <Функция>
- или кнопка:	

В отдельном окне функции собраны по категориям, для выделенного имени функции выводится краткое пояснение. Имя нужной функции с ячейками для указания аргументов будет вставлено в документ по нажатию клавиши [OK].

Примечание 3. Важно помнить, что имя и список фактических аргументов образуют единое обозначение вызова функции **имя(параметры)**. Поэтому при возведении функции в степень показатель степени ставится *после скобок*, в которых заключен аргумент.

Математическое обозначение	Выражение в МС
$\sin x^2 + \sin^2 x$	$\sin\left(x^2\right) + \sin(x)^2$

Использование встроенных функций позволяет выполнять достаточно сложные вычисления.

Диапазонные переменные в среде МС. Во многих случаях вычисления необходимо выполнить для нескольких значений аргумента, изменяющихся *регулярным образом*. Для этого в среде МС используют *диапазонные переменные*, определение которых состоит из следующих элементов:

ИМЯ **:=** <u>Начальное значение</u>**,** <u>Следующее значение</u> **. .** <u>Последнее значение</u>

▪ Знаки **:=** и **..** набираются нажатием **одной** клавиши **[:] и [;]** соответственно.

▪ Если следующее значение не указано, то переменная изменяется на 1.

Все последующие блоки, содержащие диапазонную переменную, выполняются для каждого ее значения.

Например:

$x := 1, 1.2..\,2$

x =	sin(x) =
1	0.841
1.2	0.932
1.4	0.985
1.6	1
1.8	0.974
2	0.909

$k := 1..\,4$

k =	k^2 =	k^3 =
1	1	1
2	4	8
3	9	27
4	16	64

СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЯ

ЗАДАЧА 1. Продолжить работу с МС-документом.

Создать текстовый блок «**II. Выполнение задания**». Выполнить указанные вычисления:

▫ Вычислить результат для следующих примеров:
456*12/117= 123/29-3.4*6= 1.5^3*2.5^5= (4.5+3.1*4.2)/(2.3*6.1-0.98)=

▫ Вычислить значения функции $\sqrt{x}$ для значений x, взятых на отрезке [0;4] с шагом 0.5.

▫ Вычислить значения функции $\cos^2 x$ для множества значений x на отрезке [-π; π] с шагом π/4.

▫ Вычислить $\varepsilon = \sin(\ln k + 4.12d)$, где $d = \dfrac{ctg(x+y+z+8)}{x^2+y^2+z^2+6}$;

$k = e^{|z-y|}\left(\cos^2 z + 1{,}5x^4\right)$, а значения *x=-4.673; y=0.373; z=0.823*.

▫ Вычислить $k = m^2 tg(\mu + \pi/8)$, если x=1.625; y= -15.4; z=0.232,

$$\mu = \left(\sqrt{x} + 1.8\right)^2, \quad m = \frac{\cos(2x+y) - \dfrac{x+y}{y+z}}{\sqrt{2x^3 + 3y^2 + 4z + 3.67z^3}} + \left(\frac{\cos^2 y + 3.456x}{\sin^2 x + z^2}\right)^{2/3}.$$

▫ Используя перенос блоков, расположите их в документе наиболее удобным образом.

ЗАДАЧА 2. Выполнить вычисления с использованием шаблонов палитры математических операций (дифференцирование, интегрирование и др.). Результаты выведите в формате 6 цифр после десятичной точки.

\# **Варианты** вычислений берутся из книги:

Воробьева Г.Н., Данилова А.Н. Практикум по вычислительной математике. М., 1990.

▫ стр. 127-129;
▫ стр. 132-134;
▫ стр. 137-138.

Указание. *Встроенная переменная* TOL определяет точность промежуточных вычислений. По умолчанию она равна 10^{-3}. Перед использованием численных методов (вычисление интегралов) рекомендуется переопределить переменную TOL в сторону повышения точности результатов, например, TOL:=10^{-6}.

Составил: Дей Е.А. v2.8 2012-2016

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА ВМКМ(и)-2016 - 02
ВЫЧИСЛЕНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ВЕКТОРОВ И МАТРИЦ В СРЕДЕ MATHCAD

Цель работы: изучение и практическое применение правил вычислений с использованием векторов и матриц, изучение способов построения графиков функций

Внимательно прочитайте описание новых элементов Mathcad. Создайте новый документ и при чтении обязательно самостоятельно повторите все численные примеры. Затем выполните задание, приведенное в конце текста.

Такой подход к изучению материала позволяет наиболее быстро получить навыки практических вычислений.

Отчетом по работе будет являться правильно оформленный Mathcad-документ, состоящий из двух частей:

1. Повторение численных примеров

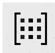
2. Выполнение задания

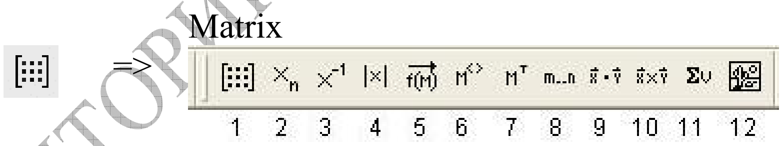
1 Определение векторов и матриц в МС-документе

В среде МС *вектором* считается ***столбец*** (но не строка) чисел (одномерный массив), а *матрицей* - прямоугольная *таблица* чисел (двумерный массив).

Кроме того, вектор можно рассматривать как матрицу, состоящую из одного столбца, а матрицу - как набор столбцов-векторов.

По умолчанию элементы вектора и строки матрицы нумеруются сверху вниз, а номера столбцов слева направо, **начиная с 0.**

Шаблоны математических действий для обработки матриц содержатся в палитре “Matrix”, которая вызывается при нажатии кнопки  на главной палитре.



Назначение кнопок палитры:

1 – создание вектора или матрицы
2 - создание индекса элемента
3 – вычисление обратной матрицы
4 - модуль вектора или матрицы
5 – операция векторизации
6 – выделение столбца матрицы
7 – транспонирование матрицы
8 – шаблон диапазонной переменной
9 – скалярное произведение векторов
10 – векторное произведение векторов
11 – суммирование элементов вектора
12 – графическое отображение величины элементов матрицы

Определить вектор или матрицу *явным* образом - значит указать место в документе, записать нужное имя матрицы, команду присваивания и вставить шаблон матрицы. Затем шаблон заполняется числами.

Имя:= *Шаблон*

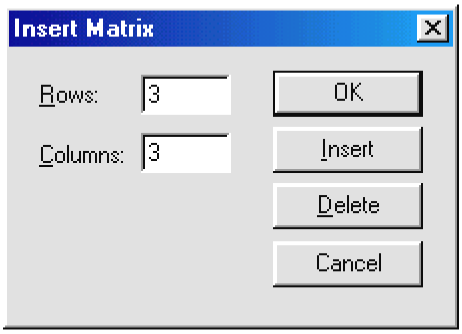
Вставить шаблон матрицы можно несколькими способами:

-*Или* выбрать в меню <Вставить>-<Матрица>

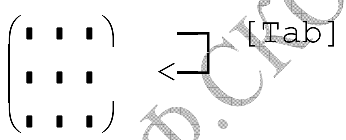
-*Или* нажать клавиши [Ctrl]+[M]

-*Или* щелкнуть по кнопке 1 палитры «Matrix»

На экране появится окно диалога, в котором нужно указать количество строк (Rows) и столбцов (Columns). Для вектора Rows обозначает количество элементов, а Columns=1.



Шаблон



Переход к следующей ячейке выполняется при нажатии клавиши [**Tab**] или клавишами управления курсором. Пример определения вектора и матрицы:

$$Res := \begin{pmatrix} 12 \\ 48 \\ -7 \end{pmatrix} \qquad W2a := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Отдельный элемент вектора или матрицы обозначается нижним индексом. Переход в режим набора индекса:

или клавиша “[“,

или кнопка 2 палитры «Matrix».

Возврат в основной уровень - клавиша «Пробел».

Для элемента матрицы указывают в индексе номер строки и номер столбца через запятую. (Например, нажатие клавиш M[1,2 дает в документе M1,2).

Отдельный элемент вектора или матрицы используется как обычная переменная: его значение можно вывести на экран, ему можно присвоить новое значение, его значение можно использовать в вычислениях. Например:

Набрать на клавиатуре:	Res[1=	W2a[2,2=	z:Res[2+3*W2a[1,1	Z=
Вид на экране:	$Res_1 = 48$	$W2a_{2,2} = 9$	$z := Res_2 + 3\,W2a_{1,1}$	$z = 8$

Неявный способ определения вектора или матрицы состоит в определении отдельного элемента. Как только определяется хотя бы один элемент нового вектора или матрицы, то его номер автоматически считается максимальным, и все предыдущие элементы считаются равными 0. Таким способом можно изменить размер и существующих матриц, например:

$$Fa_2 := 20 \qquad Matr_{1,3} := 99 \qquad Fa = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix} \qquad Matr = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 99 \end{pmatrix}$$

$$W2a_{2,4} := 50 \qquad W2a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 0 & 50 \end{pmatrix}$$

Неявный способ можно использовать и для вычисления всех элементов, если задать выражение, в котором используется диапазонная переменная, логически соответствующая номеру элемента

$$k := 0..3$$

$$V_k := (k+2)^3 \qquad W_k := \sin\left(\frac{\pi}{k+2}\right) \qquad V = \begin{pmatrix} 8 \\ 27 \\ 64 \\ 125 \end{pmatrix} \qquad W = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.866 \\ 0.707 \\ 0.588 \end{pmatrix}$$

Используя определенные в документе векторы и матрицы, можно вычислять новые результаты, выполняя нужные команды палитры «Matrix».

Для вычисления модуля вектора и определителя матрицы нужно использовать кнопку |**x**| в палитре «Калькулятор» (в версии Mathcad 15).

Например:

$$W1 := \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \\ 19 \end{pmatrix} \qquad W2 := \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 16 \end{pmatrix} \qquad W1 \times W2 = \begin{pmatrix} 24 \\ -150 \\ 78 \end{pmatrix}$$

$$|W1| = 23.043 \qquad |W2| = 18 \qquad W1 \cdot W2 = 378$$

$$U := \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad U^T = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \qquad U^2 = \begin{pmatrix} 30 & 32 & 36 \\ 58 & 81 & 96 \\ 88 & 126 & 150 \end{pmatrix}$$

$$|U| = 6 \qquad U^{\langle 2 \rangle} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} \qquad U^{-1} = \begin{pmatrix} -0.5 & 1 & -0.5 \\ 1 & -5 & 3 \\ -0.5 & 3.667 & -2.167 \end{pmatrix}$$

Матричную структуру могут иметь и функции пользователя.

$$\alpha(x) := \begin{pmatrix} x^2 - 1 \\ \sin(x+1) \end{pmatrix} \qquad \alpha(2.8) = \begin{pmatrix} 6.84 \\ -0.612 \end{pmatrix}$$

$$f(p,s) := \begin{pmatrix} p+s & p \cdot s \\ \sqrt{p} + \sqrt{s} & p - s \end{pmatrix} \qquad f(3,5) = \begin{pmatrix} 8 & 15 \\ 3.968 & -2 \end{pmatrix}$$

Результат вычислений можно сохранять как самостоятельный вектор

$$res := \alpha(2.8) \qquad res = \begin{pmatrix} 6.84 \\ -0.612 \end{pmatrix}$$

или как вектор отдельных переменных

$$\begin{pmatrix} ta \\ tb \end{pmatrix} := \alpha(2.8) \qquad ta = 6.84 \qquad tb = -0.612$$

Эти примеры отражают возможности Mathcad по созданию и обработке сложных структур данных.

Операция векторизации. Во многих случаях бывает необходимо вычислить функцию, параметром которой является числовая переменная, от каждого элемента вектора или матрицы, например: $\sqrt{V_1}$; $\sqrt{V_2}$; $\sqrt{V_3}$.

Последовательное перечисление всех элементов громоздко, поэтому в среде МС введено понятие **векторизации функции**, смысл которого заключается в **вычислении функции от каждого элемента вектора или матрицы.**

Для включения векторизации следует набрать имя и параметры функции, курсором подчеркнуть обозначение функции и нажать [CTRL **-**] или выбрать кнопку палитры “Matrix” $\overrightarrow{f(x)}$. Режим векторизации функции указывается стрелкой над обозначением функции (но это не обозначение вектора !).

$$\mathrm{Dan} := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{\sqrt{\mathrm{Dan}}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1.414 \\ 1.732 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{\tan(\mathrm{Dan})} = \begin{pmatrix} 1.557 \\ -2.185 \\ -0.143 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Cm} := \begin{pmatrix} 0.1\cdot\pi & 0.2\cdot\pi \\ 0.3\cdot\pi & 0.4\cdot\pi \end{pmatrix} \qquad \mathrm{Res} := \overrightarrow{\cos(\mathrm{Cm})} \qquad \mathrm{Res} = \begin{pmatrix} 0.951 & 0.809 \\ 0.588 & 0.309 \end{pmatrix}$$

При попытке вычислить алгебраическую функцию от вектора или матрицы без включения операции векторизации появляется сообщение об ошибке «*non-scalar value*».

2 Встроенные функции для обработки векторов и матриц

При описании встроенных функций обрабатываемый вектор обозначен именем V, обрабатываемая матрица – именем М. На практике пользователь при вызове функции указывает имя вектора или матрицы, *которые необходимо обработать в данном месте документа*. Конечно, вектор или матрица должны быть определены до выполнения функции.

Рассмотрим функции, позволяющие найти параметры векторов и матриц

Действие	Функция
Получение минимального элемента вектора или матрицы	min(V) min(M)
Получение максимального элемента вектора или матрицы	max(V) max(M)
Количество элементов вектора	length(V)
Номер последнего элемента вектора	last(V)
Количество строк матрицы	rows(M)

Количество столбцов матрицы	cols(M)
Вычисление следа квадратной матрицы (суммы диагональных элементов)	tr(M)

Примеры:

$$Wa := \begin{pmatrix} 12 & 15 & 19 \\ -3 & 5 & 7 \\ 21 & 23 & 38 \end{pmatrix} \qquad Vect := \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \end{pmatrix} \qquad length(Vect) = 3$$

$$last(Vect) = 2$$

$$min(Wa) = -3 \qquad rows(Wa) = 3 \qquad min(Vect) = 10$$

$$max(Wa) = 38 \qquad cols(Wa) = 3 \qquad max(Vect) = 30$$

$$tr(Wa) = 55$$

Рассмотрим функции, позволяющие выполнить формирование или преобразование векторов и матриц

Действие	Функция
Расположение элементов вектора V по возрастанию (сортировка, упорядочение эл-тов)	sort(V)
Расположение элементов вектора V в обратном порядке	reverse(V)
Формирование единичной квадратной матрицы размера n*n	identity(n)
Формирование квадратной матрицы, на диагонали которой расположены элементы вектора V, остальные элементы =0	diag(V)
Объединение двух или более матриц или векторов, имеющих одинаковое число строк, в одну (по горизонтали)	augment(M1,M2)
Объединение двух матриц, имеющих одинаковое число столбцов, в одну (по вертикали)	stack(M1,M2)
Выделение части матрицы в пределах номеров строк r1..r2 и столбцов c1..c2	submatrix(M,r1,r2,c1,c2)

Примеры:

$$RR := identity(2) \qquad Z := diag(Vect)$$

$$RR = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad Z = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 30 \end{pmatrix} \qquad Num := submatrix(Z, 0, 1, 1, 2)$$

$$Num = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 20 & 0 \end{pmatrix}$$

$$New1 := stack(Num, RR)$$

$$New2 := augment(RR, Num)$$

$$New2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 20 & 0 \end{pmatrix} \qquad New1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 20 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3 Решение систем линейных алгебраических уравнений в среде МС

Для многих численных методов решение системы линейных уравнений является одним из этапов. Как известно, систему линейных уравнений можно представить в матричной форме

AX=B,

где А – матрица коэффициентов системы, В - вектор правых частей уравнений.

Для решения системы линейных уравнений можно использовать метод обратной матрицы. Этот метод, являющийся достаточно громоздким, в МС реализуется одной строкой. В соответствии со свойством обратной матрицы $A^{-1}A=I$, где I-единичная матрица, получаем, что столбец неизвестных

$X{:}=A^{-1}B$.

Выполнив вычисление по этой формуле, далее в документе нужно вывести результат на экран и выполнить проверку (правая часть должна совпасть с вектором В).

Пример. Решение системы трех уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10 \\ -2x_1 + 5x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 18 \end{cases} \qquad A := \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 5 & -1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 18 \end{pmatrix}$$

вычисляем:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0.352 & -0.037 & -0.13 \\ 0.093 & 0.148 & 0.019 \\ -0.241 & -0.185 & 0.352 \end{pmatrix} \qquad X := A^{-1}\cdot B \qquad X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Проверка результата:

$$A\cdot X = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 18 \end{pmatrix}$$

Левая часть системы уравнений совпадает с правой.

Для решения системы уравнений можно использовать встроенную функцию *lsolve.* Матрицы А и В определяются так же, а затем находится вектор неизвестных *X:=lsolve(A,B).*

СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЯ

Выполнить (по вариантам) вычисления в задачах №1, №2.

Для удобства скопировать общее условие задачи и вариант задания в Mathcad-документ как изображение, а затем выполнить вычисления.

ЗАДАЧА 1. Выполнить действия по обработке заданных векторов и матриц с выводом на экран всех промежуточных результатов.

Векторы определять как **столбцы чисел**.

Для оформления решения скопировать **изображение** общего условия и своего варианта для каждой задачи в Mathcad-документ.

1) ra3=(1.2,-2.3,6.05); cz4=(-0.4,3.1,8.2);

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 9 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 7 \end{vmatrix} \qquad B = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 35 & 1 & 3 \\ -2 & -2 & 4 \end{vmatrix}$$

- вычислить скалярное произведение ra3 и cz4;
- вычислить модуль вектора a=2*ra3-3*cz4;
- расположить элементы вектора cz4 по возрастанию;
- вычислить определитель матрицы A;
- вычислить произведение матриц A^(-1) и B^2;
- объединить матрицы по горизонтали;

2) kq3=(3.6,-2.3,9.45); uv4=(-5.1,5.8,-8.4);

$$T = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 5 & 1 & -4 \\ 9 & 3 & -3 \end{vmatrix}; \qquad S = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 41 & -4 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix};$$

- вычислить модуль вектора a=6*kq3-2.3*uv4;
- вычислить скалярное произведение векторов kq3 и uv4;
- транспонировать матрицу 5*T-3*S
- вычислить произведение матриц T^2 и S^4
- вычислить след матрицы T^(-1);
- объединить векторы по горизонтали;

3) vx3=(6.6,-3.1,8.36); ca4=(-6.3,8.5,-3.3);

$$G = \begin{vmatrix} 9 & 5 & -2 \\ 13 & -3 & -3 \\ 6 & 7 & 4 \end{vmatrix}; \qquad H = \begin{vmatrix} 4 & 3 & -3 \\ 51 & 11 & 4 \\ 5 & -2 & 14 \end{vmatrix};$$

- вычислить максимальный элемент вектора b=3.4*vx3+2.3*ca4;
- вычислить скалярное произведение векторов b и vx3;
- вычислить определитель матрицы G+H
- вычислить произведение матриц (G-H) и (2G+H)
- расположить элементы вектора ca4 в обратном порядке;
- вычислить след матрицы (G+H);

4) dy3=(4.6,-2.7,2.48); se4=(-8.1,5.4,-9.3);

$$W = \begin{vmatrix} 19 & -4 & 2 \\ 25 & 1 & 4 \\ 9 & 4 & -3 \end{vmatrix}; \qquad D = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 11 & -4 & -8 \\ 2 & 5 & 13 \end{vmatrix};$$

- расположить элементы вектора c=dy3-se4 по возрастанию;
- вычислить скалярное произведение векторов (dy3+c) и se4;
- вычислить определитель матрицы 4*W+3*D;
- найти максимальные элементы матриц W и D;
- объединить матрицы W и D по вертикали;
- получить квадратную матрицу, на диагонали которой расположены элементы вектора se4;

5) qn3=(4.3,-7.3,7.21); um4=(-4.1,7.2,-7.9);

$$R = \begin{vmatrix} 31 & 5 & -7 \\ -5 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}; \qquad G = \begin{vmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 61 & -4 & -3 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix};$$

- вычислить модуль вектора d=2.9*qn3-5.3*um4;
- вычислить скалярное произведение векторов qn3 и um4;
- вычислить определитель произведения матриц R и G^2;
- вычислить матрицу G1, обратную матрице G;
- вычислить матрицу R1, вычислением функции sin от каждого элемента матрицы R;
- получить количество столбцов матрицы G;

6) fa3=(7.6,3.2,8.02); hi4=(-1.4,5.6,-6.4);

$$V = \begin{vmatrix} 24 & 7 & 8 \\ 15 & 14 & -9 \\ 4 & 3 & -1 \end{vmatrix}; \qquad B = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -6 \\ 54 & -3 & 5 \\ 5 & -2 & 7 \end{vmatrix};$$

- вычислить минимальный элемент вектора w=3.6*fa3-1.3*hi4;
- вычислить скалярное произведение векторов w и fa3;
- вычислить определитель матрицы V^2-3*B
- вычислить произведение матриц V^(-1) и B^2
- вычислить новую матрицу V1 путем вычисления функции cos от каждого элемента матрицы V;
- вычислить след матрицы (V+B)^2;

7) wa3=(3.6,-2.1,9.45); ek4=(-5.1,5.8,-8.4);

$$P = \begin{vmatrix} 11 & 4 & 7 \\ 5 & 1 & -4 \\ 15 & 3 & -3 \end{vmatrix}; \qquad R = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 \\ 31 & -4 & 3 \\ 3 & -3 & 1 \end{vmatrix};$$

- вычислить модуль вектора s=6*wa3-2.3*ek4;
- вычислить скалярное произведение векторов s и wa3;
- вычислить определитель и след матрицы R+2*P;
- вычислить минимальный элемент вектора wa3;
- вычислить новую матрицу R1 путем деления всех элементов исходной матрицы R на ее максимальный элемент;
- выполнить сортировку элементов 1-го столбца матрицы P;

8) bt3=(4.6,-3.1,4.45); up4=(-5.1,6.8,-7.8);

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 17 \\ 11 & 6 & -9 \\ 4 & 7 & -3 \end{vmatrix}; \qquad K = \begin{vmatrix} 8 & -3 & 5 \\ 27 & 4 & -3 \\ 3 & 13 & 8 \end{vmatrix};$$

- вычислить модуль вектора g=6*bt3-2.3*up4;
- вычислить скалярное произведение векторов g и (bt3-up4);
- вычислить определитель матрицы A-3*K
- вычислить произведение матриц A и K^(-1)
- получить минимальный элемент матрицы A;
- вычислить след матрицы (4*A-K)^6;

9) jx3=(1.6,-2.4,3.35); rd4=(-4.4,5.5,-6.7);

$$Q = \begin{vmatrix} 14 & 8 & -7 \\ 5 & 3 & 1 \\ -1 & 13 & 3 \end{vmatrix}; \qquad Z = \begin{vmatrix} 7 & -1 & -5 \\ 36 & 4 & 3 \\ 3 & -9 & 13 \end{vmatrix};$$

- вычислить минимальный элемент вектора h=jx3+rd4;

- вычислить скалярное произведение векторов (h-jx3) и rd4;
- вычислить определитель матрицы 3*Q-2*Z
- вычислить след произведения матриц (2Q+Z^4)(Q-4Z)
- вычислить новую матрицу Q1 путем умножения всех элементов исходной матрицы Q на ее определитель;
- транспонировать матрицу Z^(-1);

10) es3=(3.6,-2.1,9.45); ya4=(-5.3,5.8,-8.4);

$$C = \begin{vmatrix} -2 & 4 & 7 \\ 5 & 1 & -4 \\ 16 & 3 & -3 \end{vmatrix}; \qquad D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 71 & -4 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix};$$

- вычислить модуль вектора r=5*es3-2.9*ya4;
- вычислить скалярное произведение векторов r и (ya4-es3);
- вычислить произведение матриц (D-C) и (2D+3C);
- вычислить новую матрицу D1 путем умножения матрицы D на ее максимальный элемент;
- вычислить определитель матрицы 5*C+D;
- вычислить сумму нулевого и первого столбцов матрицы C;

11) hx3=(9.8,-7.1,5.34); mc4=(-4.3,5.9,-7.3);

$$A = \begin{vmatrix} 9 & 13 & 7 \\ -5 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & -1 \end{vmatrix}; \qquad B = \begin{vmatrix} 4 & 3 & -5 \\ 81 & -4 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix};$$

- вычислить максимальный элемент вектора y=6*hx3-mc4;
- вычислить скалярное произведение векторов y и (hx3+3*mc4);
- вычислить след и определитель матрицы A-2B;
- вычислить максимальный элемент матрицы (A-B)*(A+B);
- получить новую матрицу A1 путем вычисления функции sin от каждого элемента матрицы A;
- транспонировать матрицы A и B;

12) yk3=(9.6,-7.3,1.45); vs4=(-8.1,4.4,-3.4);

$$W = \begin{vmatrix} 7 & 4 & 2 \\ -5 & 11 & -4 \\ 8 & 3 & -3 \end{vmatrix}; \qquad F = \begin{vmatrix} 3 & -3 & -2 \\ 11 & 4 & 3 \\ 5 & -1 & 4 \end{vmatrix};$$

- вычислить минимальные элементы векторов;
- вычислить скалярное произведение векторов;
- вычислить определители матриц;
- транспонировать произведение матриц W^3 и F^4;
- получить вектор C путем вычисления функции cos от каждого элемента второго столбца матрицы W;
- получить количество строк и столбцов матрицы F;

ЗАДАЧА 2. Решить систему линейных уравнений средствами Mathcad. Результаты вывести на экран с точностью 0.0001.

Проверить результаты подстановкой.

Варианты условия задачи берутся из книги: Воробьева Г.Н., Данилова А.Н. Практикум по вычислительной математике.

А) стр. 32-33 – методом обратной матрицы;

Б) стр. 39-40 – с применением функции lsolve.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА ВМКМ(и)-03
ГРАФИКИ И ПРОГРАММНЫЕ БЛОКИ В СРЕДЕ MATHCAD

Цель работы: изучение правил создания и использования программных блоков в среде Mathcad

Внимательно прочитайте описание новых элементов МС. Создайте новый документ МС и при чтении обязательно самостоятельно повторите все примеры программных блоков и их использования.

Затем выполните задание, приведенное в конце текста.

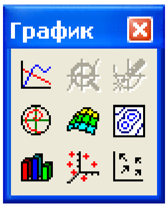
Отчетом по работе будет являться правильно оформленный Mathcad-документ, состоящий из двух частей:

1. Повторение примеров

2. Выполнение задания

1. Построение графиков функций одной переменной в декартовых координатах

Состав графической палитры. МС позволяет строить самые разнообразные графики в декартовой и полярной системах координат. Шаблоны графиков в МС собраны в палитре «График»:



Каждая кнопка палитры выполняет действие - вставка шаблона в документ в то место, которое указано курсором. После вставки шаблона следует заполнить его элементы, указав имена аргумента, функции, пределы из изменения. Положение графика в документе и размеры графика изменяются с помощью мыши.

1 2 3 4 5 6 7 8 9

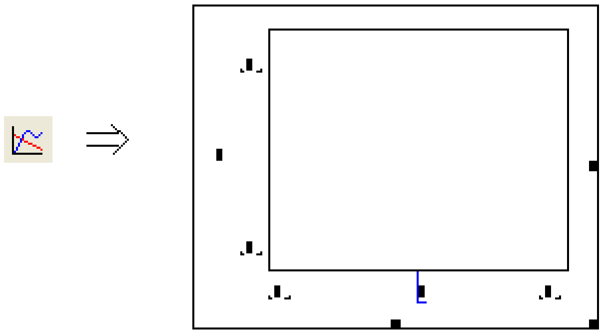
1 – шаблон графика функции одной переменной в декартовых координатах
2 – инструмент ‘Zoom’
3 – инструмент ‘Trace’
4 – шаблон графика функции одной переменной в полярных координатах
5 – шаблон «поверхность» для функции двух переменных
6 – шаблон «линии уровня» для функции двух переменных
7 – шаблон «объемная гистограмма» для функции двух переменных
8 – шаблон «точки в пространстве» для функции двух переменных
9 – шаблон «векторное поле» для функции двух переменных

Шаблон графика можно также вставить, используя пункты главного меню <Вставка> – <График> – <Тип графика>.

Существует несколько способов построения графиков, различающихся способом описания функции.

В каждом из них в документ вставляется **шаблон графика**, заполняются его ячейки, настраиваются параметры изображения графика.

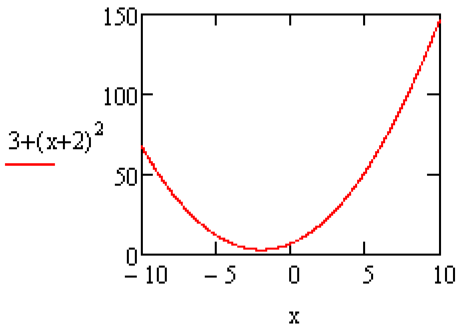
▫ Пределы по оси OY обычно не заполняют, они вычисляются автоматически.

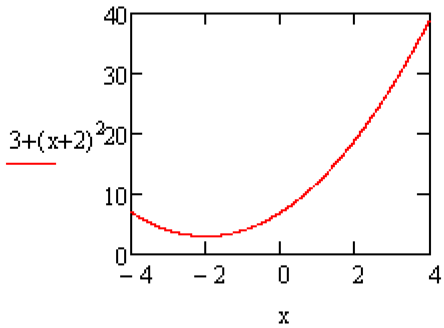


А) Быстрое построение графика. В шаблоне указывается только имя аргумента и вид функции (средние ячейки по осям OX и OY). В этом случае система *автоматически* выбирает пределы аргумента [-10;10] и вычисляет пределы по оси OY.

▫ Для построения графика нажимают клавишу **F9**.

▫ Пределы изменения аргумента можно изменить прямо в шаблоне графика.



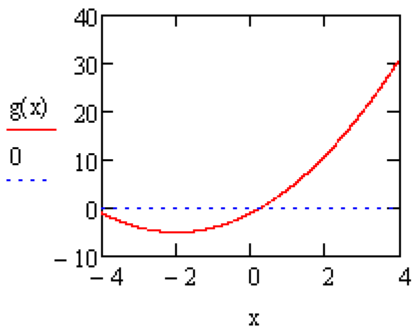


▫ Для изображения **графика нескольких функций** достаточно перечислить имена функций на вертикальной оси **через запятую**

▫ Для отображения оси OX на графике достаточно указать в качестве второй функции значение 0.

▫ Удобнее отображаемую функцию определить как собственную функцию пользователя, тогда по оси OY указывается только имя функции и ее аргумент.

$$g(x) := -5 + (x+2)^2$$



Б) График для значений аргумента в заданном диапазоне. В этом случае необходимо:

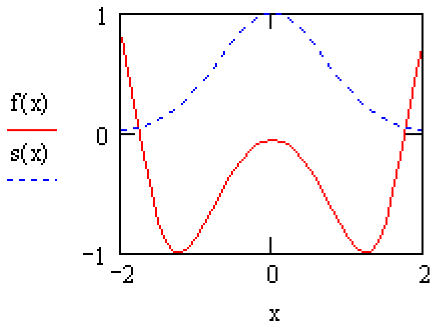
а) определить функции, для которых строится график;

б) определить диапазонную переменную, задающую значения аргумента (в дальнейшем легко изменить ее параметры);

в) вставить в документ шаблон графика, в нем указать диапазонную переменную в качестве аргумента и имена функций.

Так как график строится по точкам, которые соединяются отрезками прямых, то для получения плавной кривой следует брать малый шаг между точками.

$f(x) := \sin\left(x^2 + 3.2\right) \qquad s(x) := \exp\left(-x^2\right) \qquad x := -2, -1.9 .. 2$

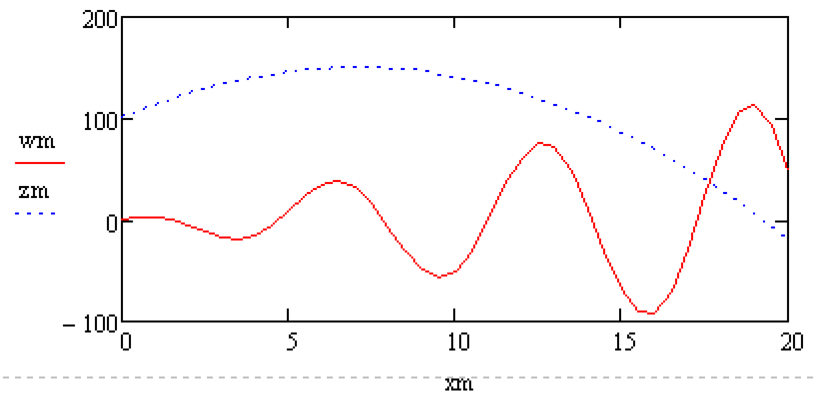


В) График с использованием векторов значений аргумента и функции. Этот вариант используется для отображения результатов вычислений или экспериментальных данных. При этом значения функции для отдельных значений аргумента могут быть известны, даже если явный вид функции неизвестен. Последовательность действий в этом случае:

- определить (вычислить) вектор значений аргумента
- определить (вычислить) вектор значений функции
- вставить в документ шаблон графика
- в шаблоне графика указать только имена векторов

$W(x) := 6 \cdot x \cdot \cos(x) \qquad Z(x) := -(x-7)^2 + 150$

$k := 0 .. 40 \qquad xm_k := 0 + k \cdot 0.5 \qquad wm_k := W(xm_k) \qquad zm_k := Z(xm_k)$



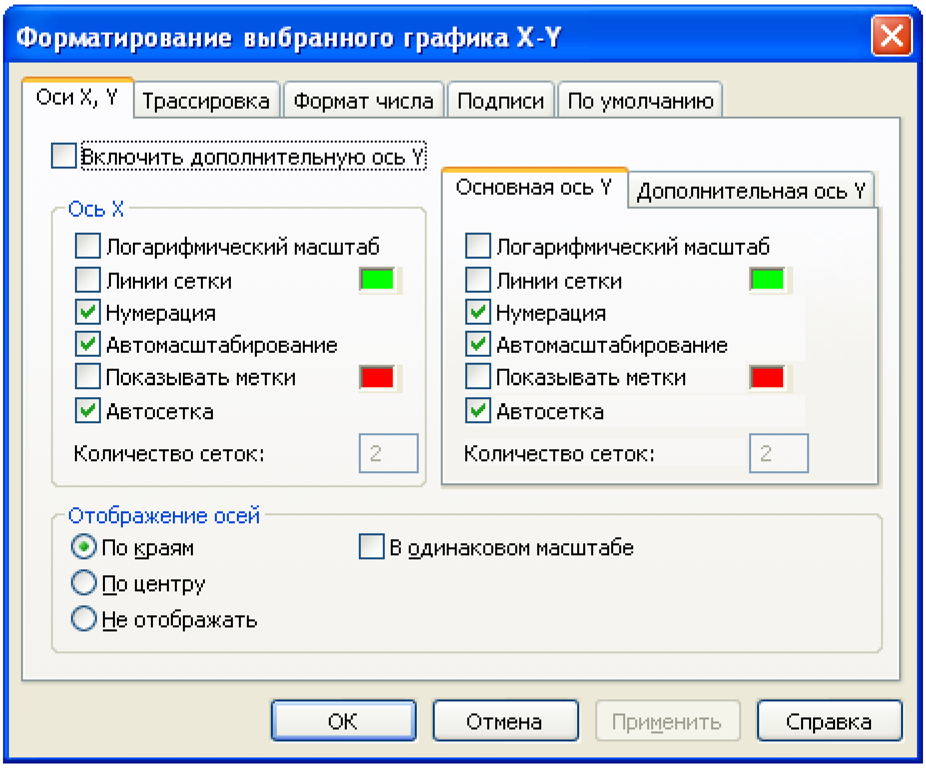
2. Управление формой и параметрами графика

График функций одной переменной имеет широкие возможности оформления. В частности, можно изобразить график: с масштабной сеткой и без нее, с линейным и логарифмическим масштабом осей, с отметками точек графика различными значками (прямоугольниками, ромбами и т.д.).

С помощью мыши можно изменить размеры графического блока или перенести его в другое место документа. При оформлении отчетов график можно скопировать в буфер и вставить в документ редактора Word.

Для изменения внешнего вида графика используется диалоговое окно «Форматирование графика» (вызывается или правой клавишей мыши, или в меню «Формат – график».

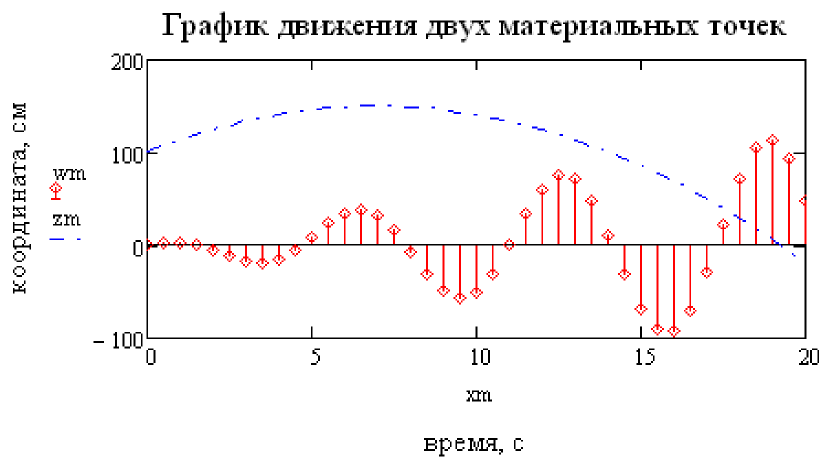
Параметры осей графика указываются в закладке «Оси X, Y»



Закладка «Трассировка» окна форматирования служит для изменения свойств линий графика: цвет, стиль линии, использование маркеров (символов, обозначающих точки данных), оформление

Закладка «Подписи» позволяет указать название (заголовок) самого графика и названия осей.

Упражнение. В построенном графике векторов wm, zm создать линии сетки, набрать заголовок графика и названия осей, включить маркеры и выбрать тип «отрезки с маркером» для первой линии, изменить стиль второй линии



3. Структура программных блоков и палитра «Программирование»

Вычислительные блоки МС-документа позволяют выполнить действия, записанные одной строкой. Однако, реализация любого численного метода требует выполнения нескольких вычислений последовательно по разным формулам.

Кроме того, в ходе численного исследования физической системы задачу приходится решать численным методом многократно, при различных значениях параметров.

В таких случаях удобно организовать вычисления с помощью **собственных функций**, **содержащих программные блоки**.

Преимущества такого подхода заключаются в следующем:

1) действия, заключенные в функции, можно описать любым количеством строк, в том числе с применением операторов выбора и цикла;

2) определение функции не выполняет никаких действий и не влияет на последующие вычисления в документе. Действия, записанные в функции, выполняются только в момент обращения к функции;

3) определение функции имеет достаточно общий характер, так как вычисления описываются с помощью параметров. При вызове функции подбором параметров функцию можно приспособить для решения текущей задачи. В качестве параметров указываются имена тех переменных, которые нужно обработать в данном месте. Одну и ту же функцию (программный блок) можно вызывать **многократно**.

4) Функции – программные блоки, которые реализуют стандартные действия, можно собрать в отдельный файл, который хранится отдельно от документа и вызывается указанием имени файла.

Основные элементы программных блоков.

а) Программный блок состоит из отдельных строк, ограниченных слева вертикальной чертой.

б) Каждая строка содержит отдельную команду, причем команда не набирается, а в строку вставляется **шаблон команды** из палитры «Программирование».

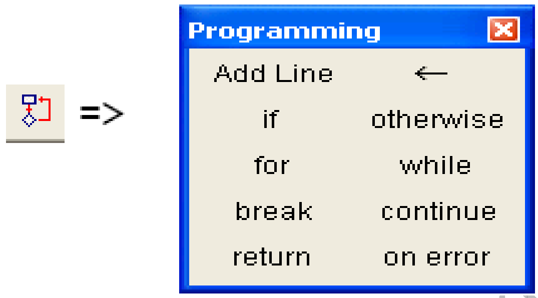
в) Операция присваивания значения (определения) переменной обозначается в программном блоке знаком «←». Это указывает на то, что такие переменные существуют **только в пределах блока**, их невозможно использовать в документе, они не влияют на переменные документа.

В то же время переменные, определенные в документе **до вызова** функции-программного блока, **можно использовать и внутри блока**.

г) В качестве результата работы из программного блока в документ передается значение той переменной, которая указана в последней строке программного блока.

```
Имя(Параметры) := | оператор
                  | оператор
                  | ...............
                  | результат
```

2 Элементы палитры «Программирование» и их применение
Шаблоны команд собраны в палитре «Программирование», вызов которой на экран выполняется нажатием кнопки на главной математической палитре.



Для создания программного блока следует указать курсором место в документе и нажать кнопку «Add Line» («добавить строку»).

Полезно создать сразу несколько строк, далее их заполнить командами, а ненужные затем удалить.

Каждая строка содержит ячейку ввода, в которую можно вставить шаблон команды.

Чтобы добавить строку внутри блока, следует полностью выделить курсором предыдущую строку и выполнить команду «Add Line».

Команда локального присваивания. Шаблон команды в строку программного блока вставляется нажатием кнопки ← . Затем ячейки шаблона заполняются: слева указывается имя локальной переменной, справа – формула для ее вычисления с использованием переменных документа и параметров функции.

Пример. Простейшая функция - программный блок

$W(a) := \left| \begin{array}{l} \blacksquare \leftarrow \blacksquare \\ \blacksquare \end{array} \right.$ $\quad W(a) := \left| \begin{array}{l} z \leftarrow a^2 + a^3 + a^4 \\ z \end{array} \right.$ $\quad W(3) = 117 \quad W(5) = 775$

Для передачи нескольких результатов из программного блока все результаты нужно объединить в общий вектор. Объединять можно даже элементы, имеющие различную матричную структуру.

Несколько матриц, имеющих одинаковое число строк (или столбцов) можно объединить в одну матрицу – результат с помощью функций augment или stack.

Пример. Два скалярных результата – вычисление гипотенузы и площади прямоугольного треугольника по заданным двум его катетам. Первый вызов функции сразу показывает результат, второй вызов организован так, чтобы результаты вычислений хранились в отдельных переменных.

$$f(a,b) := \left| \begin{array}{l} c \leftarrow \sqrt{a^2 + b^2} \\ S \leftarrow \dfrac{a \cdot b}{2} \\ \begin{pmatrix} c \\ S \end{pmatrix} \end{array} \right. \qquad f(3,4) = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} res1 \\ res2 \end{pmatrix} := f(4.5, 7.2)$$

$$res1 = 8.491 \qquad res2 = 16.2$$

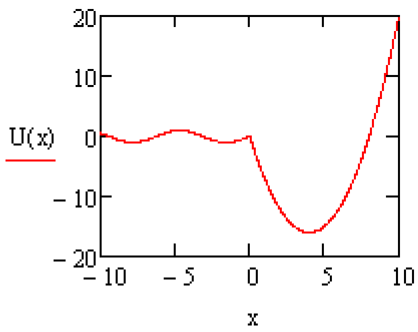
Оператор выбора имеет шаблон $\boxed{\blacksquare \text{ if } \blacksquare}$.

В левую ячейку шаблона записывают действие, в правую – условие. Действие выполняется, когда условие истинно.

Примечание. **Знаки сопоставления величин (<, > и другие) вставляются в шаблоны операторов из палитры «Булева алгебра».**

Пример. Кусочно-непрерывная функция

$$U(x) := \left| \begin{array}{l} R \leftarrow x^2 - 8 \cdot x \ \text{ if } \ x \ge 0 \\ R \leftarrow \sin(x) \ \text{ if } \ x < 0 \\ R \end{array} \right.$$



Оператор альтернативного действия otherwise содержит действия, выполняемые при нарушении условия оператора if, записывается в следующей строке и действует как продолжение оператора if.

Пример. Программирование двух вариантов вычисления

$$modul(x) := \left| \begin{array}{l} x \ \text{ if } \ x \ge 0 \\ -x \ \text{ otherwise} \end{array} \right. \qquad modul(3) = 3 \qquad modul(-3) = 3$$

Оператор назначения результата return используется для вывода нужного элемента. Это может быть число, вектор, строка символов в апострофах.

Пример. Функция – программный блок для вычисления вещественных корней квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ по заданным коэффициентам

$$roots(a,b,c) := \left| \begin{array}{l} diskrim \leftarrow b^2 - 4\cdot a\cdot c \\ \text{if } diskrim \ge 0 \\ \quad \left| \begin{array}{l} x1 \leftarrow \dfrac{-b + \sqrt{diskrim}}{2\cdot a} \\ x2 \leftarrow \dfrac{-b - \sqrt{diskrim}}{2\cdot a} \\ \text{return } \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \end{pmatrix} \end{array} \right. \\ \text{return "Вещественных корней нет" otherwise} \end{array} \right.$$

$$roots(1,-2,1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$roots(1,-2,-15) = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$roots(4,3,2) = \text{"Вещественных корней нет"}$$

Оператор выполнения вспомогательного действия в случае возникновения ошибки $\boxed{\blacksquare \text{ on error } \blacksquare}$ позволяет предусмотреть два варианта расчёта. Один основной и второй запасной, который выполняется при ошибке в основном варианте.

Пример. Вычисление величины с особенностью.

$$a(x) := \left| \begin{array}{l} a \leftarrow \infty \quad \text{on error } a \leftarrow \dfrac{1}{x-2} \\ a \end{array} \right.$$

$a(4) = 0.5$ $\quad a(0.4) = -0.625$

$a(2) = 1 \times 10^{307}$

Оператор арифметического цикла имеет шаблон $\boxed{\begin{array}{l} \text{for } \blacksquare \in \blacksquare \\ \quad \blacksquare \end{array}}$. После слова for указывается диапазон значений переменной цикла, ниже – повторяющиеся действия.

Оператор цикла необходим, когда по очереди вычисляются или используются все элементы вектора.

При этом переменная цикла одновременно является номером элемента вектора.

Расчет таблицы значений функции. Отрезок [a,b] делится на N частей, в каждой точке вычисляется значение аргумента и функции, для чего организуется цикл по номеру точки. Полученные два вектора объединяются в матрицу

```
Tablica(a,b,N,fun) := | h ← (b − a)/N
                      | for i ∈ 0..N
                      |    | x_i ← a + i·h
                      |    | y_i ← fun(x_i)
                      | augment(x,y)
```

$S(x) := x^2$

$R := \mathrm{Tablica}(1,2,5,S)$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1.2 & 1.44 \\ 1.4 & 1.96 \\ 1.6 & 2.56 \\ 1.8 & 3.24 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Сумма элементов вектора. Сумма – это новая величина, для ее хранения вводится отдельная переменная *S*. Начальное значение суммы (до вычислений) равно нулю. В цикле по очереди рассматриваются все элементы вектора, таким образом к сумме прибавляется каждый элемент

```
Sum(V) := | S ← 0
          | for k ∈ 0..last(V)
          |   S ← S + V_k
          | S
```

$$A := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{Sum}(A) = 6$

$\mathrm{Sum}(B) = 4$

Обратите внимание, что изменение индекса автоматически настраивается на номер последнего элемента переданного в качестве параметра вектора *last(V)*, поэтому программный блок может обрабатывать векторы любого размера

Таким же способом можно получить функцию, вычисляющую сумму квадратов элементов вектора

```
Sum2(V) := | S ← 0
           | for k ∈ 0..last(V)
           |   S ← S + (V_k)^2
           | S
```

$$A := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{Sum2}(A) = 14$

$\mathrm{Sum2}(B) = 30$

Несложно создать более мощную функцию, вычисляющую сумму заданных степеней элементов вектора

```
SumP(V,n) := | S ← 0
             | for k ∈ 0..last(V)
             |   S ← S + (V_k)^n
             | S
```

$\mathrm{SumP}(A,2) = 14$

$\mathrm{SumP}(A,3) = 36$

$\mathrm{SumP}(A,4) = 98$

Аналогично программируется вычисление **произведения** элементов вектора P. Начальное значение произведения берется равным 1. В цикле произведение **домножается** на очередной элемент.

Нахождение минимального элемента вектора. Для нахождения минимального элемента необходимо сравнить все элементы вектора между собой. Такое сравнение выполняется в ходе перебора всех элементов. Для хранения результата предыдущих сравнений вводится новая переменная *vmin*. Вначале эта переменная равна нулевому элементу вектора, но затем она сравнивается с последующими элементами, и если встречается элемент, меньших текущего значения *vmin*, то уже это меньшее значение сохраняется как минимальное. В итоге после просмотра всех элементов вектора в отдельной переменной будет храниться минимальное значение.

```
min_elem(V) := | vmin ← V_0
               | for i ∈ 1..last(V)
               |   vmin ← V_i  if  V_i < vmin
               | vmin
```

$$D := \begin{pmatrix} 2.4 \\ 6.8 \\ 9.2 \\ 1.9 \end{pmatrix}$$

min_elem(D) = 1.9

Аналогично программируется нахождение **максимального** элемента *vmax*, для чего изменяют знак неравенства на противоположный.

При обработке матриц в двойном цикле (цикл по номерам строк и в каждой строке цикл по номерам столбцов) по очереди рассматриваются все элементы матрицы. Изменение номеров строки и столбца автоматически настраивается на номер последней строки матрицы *rows(M)-1* и номер последнего столбца *cols(M)-1*, поэтому программный блок может обрабатывать матрицы любого размера

Подсчет количества нужных элементов. Найти число элементов матрицы, по значению больших или равных 2.

Количество нужных элементов – это новая величина, для ее хранения вводится отдельная переменная *k*.

Начальное значение *k* равно нулю. Если элемент матрицы соответствует заданному условию, количество нужных элементов *k* увеличивается на 1. Перебирая все элементы матрицы с помощью двойного цикла, для каждого элемента организуем проверку условия.

```
Prog1(M) := | k ← 0
            | for i ∈ 0..rows(M) − 1
            |   for j ∈ 0..cols(M) − 1
            |     k ← k + 1  if  M_i,j ≥ 2
            | k
```

$$H := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ -3 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Prog1(H) = 5

Оператор цикла с предусловием while имеет шаблон

```
while ▪
  ▪
```

. Справа записывается условие, при выполнении которого действия повторяются, внизу – сами действия.

При использовании этого оператора следует помнить, что сам оператор не формирует полного цикла. Полный цикл состоит из 4-х обязательных элементов:

- установка начальных значений параметра цикла и величин, участвующих в расчете
- проверка условия повторения действий
- рабочая область - действия, выполняемые каждый раз
- изменение параметра цикла

Оператор while содержит только второй и третий элементы цикла. Поэтому установку начальных значений и изменение параметра следует указывать дополнительно.

Пример. Вычисление суммы ряда с заданной точностью. $S=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k^2+1}$; $\varepsilon=10^{-7}$.

Решение. Расчет начинается со значения k=0, S=1. Далее повторяем вычисление нового номера k=k+1 и нового слагаемого $a_k=1/(k^2+1)$. Слагаемые добавляем к сумме, пока величина слагаемого больше, чем требуемая точность получения результата $|a_k|>\varepsilon$.

```
SumW(ε) := | k ← 0
           | a ← 1
           | S ← 0
           | while |a| > ε
           |     | S ← S + a
           |     | k ← k + 1
           |     | a ← 1/(k^2 + 1)
           | S
```

$\mathrm{SumW}\left(10^{-4}\right)=2.066624$

$\mathrm{SumW}\left(10^{-6}\right)=2.075674$

Примечание. Для вычисления модуля в программных блоках Mathcad-14 следует использовать шаблон модуля из палитры «Калькулятор».

Оператор досрочного завершения цикла break. С помощью этой команды можно моделировать оператор repeat…until, который отсутствует в МС. Для предыдущего примера конструкция выглядит следующим образом (не нужно вычислять a_k перед циклом).

Пример. Вычисление суммы ряда с заданной точностью

```
SumR(ε) := | k ← 0
           | S ← 0
           | while 1
           |     | a ← 1/(k^2 + 1)
           |     | S ← S + a
           |     | k ← k + 1
           |     | break if |a| < ε
           | S
```

$\mathrm{SumR}\left(10^{-4}\right)=2.066724$

$\mathrm{SumR}\left(10^{-6}\right)=2.075675$

Оператор перехода в конец цикла т.е. досрочного завершения отдельного шага цикла **continue** обычно используется совместно с оператором **if** внутри цикла.

Поиск ошибок в программном блоке.

При создании блока МС выдает сообщение о *синтаксической* ошибке в том месте блока, где ошибка обнаружена

При наличии *логических* ошибок программный блок не выдает результата, а сообщение об ошибке может носить не вполне отчетливый характер. В этом случае используют **команду поиска (трассировки) ошибок**, которая находится в контекстном меню, вызываемом нажатием **правой клавиши** мыши.

СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЯ

ЗАДАЧА 1. Построить график функции f1(x) и f2(x) (свой и предыдущий варианты) в области [0;10] с шагом 0.05 (значения x задать диапазонной переменной).

По графику определить количество корней для каждой функции в заданной области.

1 $(x+1)^2 \cdot \sin(x-0.3) + 6.2 = 0$

2 $x^2 \cdot \sin(x) - 0.5 \cdot \cos(x) + 4 \cdot x - 3 = 0$

3 $x \cdot \sin(x) - \exp\left(\frac{x}{4}\right) + 2.7 = 0$

4 $\cos(2 \cdot x + 0.1) - \exp(2 - x) + x \cdot \sin(x + 1.1) + 3 = 0$

5 $0.4 \cdot x^2 - 5.2 \cdot x \cdot \sin(x) - \frac{1}{x + 1.5} + 3.3 = 0$

6 $2 \cdot \cos(x-1) + \sin\left(\frac{x}{3} + 2\right) + 0.4 \cdot x - 2.5 = 0$

7 $(\sin(x+0.5))^2 - 0.3 \cdot x + \ln(3 \cdot x + 1) - 2.1 = 0$

8 $5 \cdot \cos\left(\frac{x}{2} + 0.5\right) \cdot \sin(x) - 0.5 \cdot \ln(2 \cdot x + 1) - 1.2 = 0$

9 $12 \cdot \cos\left(\frac{x}{3} + 0.5\right) \cdot \sin(x-1) - 0.5 \cdot \exp(-0.2 \cdot x) = 0$

10 $2 \cdot x^2 + 8 \cdot (x+1) \cdot \cos(x) - \exp\left(\frac{x}{2}\right) - 0.5 = 0$

ЗАДАЧА 2. Составить функцию - программный блок, выполняющую заданные действия (параметры задачи являются параметрами функции).

▫ Если результат состоит из нескольких величин, определить их как компоненты **вектора результатов**.

▫ Заданные углы при вызове программного блока указывать в градусах, а в начале блока выразить в радианах до выполнения вычислений.

▫ Вычисленные углы в программном блоке измеряются в радианах, а перед выводом результатов их нужно выразить в градусах.

▫ Проверить работу функции на 1 тестовом примере (ответ легко проверить), подобранном самостоятельно. Далее показать использование функции на 3 различных примерах, подобранных самостоятельно.

1. В треугольнике известны стороны a, b, c. Найти радиус вписанной окружности и угол А (в радианах), используя формулы:

$$r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}; \quad A = 2\arccos\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}; \quad \text{где } p = \frac{a+b+c}{2}.$$

2. В треугольнике известны три стороны a, b, c. Найти радиус описанной окружности и угол А (в радианах), используя формулы:

$$R = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}; A = 2arctg\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}, \text{ где } p = \frac{a+b+c}{2}.$$

3. В треугольнике известны сторона a и углы A, B и C (в градусах). Найти площадь треугольника, радиус вписанной окружности и полупериметр, используя формулы:

$$S = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2\sin A}; \quad r = \sqrt{\frac{S}{ctg\frac{A}{2}ctg\frac{B}{2}ctg\frac{C}{2}}}, \quad \text{где } p = \frac{S}{r}.$$

4. В правильной треугольной пирамиде известны сторона основания a и угол α (в градусах) наклона боковой грани к плоскости основания. Найти объем и площадь полной поверхности пирамиды, используя формулы (для вычислений угол перевести в радианы):

$$V = \frac{1}{3}S_{осн}H; \quad S_{полн} = S_{осн}\left(1+\frac{1}{\cos\alpha}\right), \text{ где } S_{осн} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}, \; H = \frac{a\sqrt{3}}{6}tg\alpha$$

5. В треугольнике известны три стороны a, b, c. Найти (в градусах) углы этого треугольника, используя формулы:

$$A = \arccos\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}; \quad B = \arcsin\frac{b\sin A}{a}; \quad C = 180^\circ - (A+B).$$

6. В треугольнике известны две стороны a и b и угол C (в градусах) между ними. Найти стороны c и площадь треугольника, используя формулы (для вычислений угол перевести в радианы):

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C; \quad S = p(p-c)tg\frac{C}{2}; \quad \text{где } p = \frac{a+b+c}{2}.$$

7. В треугольнике известны две стороны a и b и угол C (в радианах) между ними. Найти сторону c, углы A и B и площадь треугольника, используя формулы:

$$A = \arcsin\frac{a\sin C}{c}; \quad B = \arcsin\frac{b\sin C}{c}; \quad S = \frac{bc\sin A}{2};$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C.$$

8. В треугольнике известны сторона a и два угла B и C. Найти угол A, радиус описанной окружности и радиус вписанной окружности, используя формулы:

$$A = 180^\circ - B - C; \quad R = \frac{a}{2\sin A}; \quad r = 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

9. В треугольнике известны сторона a и углы A, B и C. Найти стороны b и c и радиус описанной окружности, используя формулы:

$$b = \frac{a\sin B}{\sin A}; \quad c = \frac{a\sin C}{\sin A}; \quad R = \frac{p}{4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}, \quad \text{где } p = \frac{a+b+c}{2}.$$

10. Треугольник задан на плоскости координатами своих вершин x1, y1, x2, y2, x3, y3. Найти длины сторон a,b,c, периметр и площадь треугольника. Вычисление площади треугольника по формуле Герона:

$$p = \frac{a+b+c}{2}; \qquad S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

ЗАДАЧА 3. Составить функцию - программный блок, выполняющий указанные действия по обработке вектора произвольного размера.

Проверить работу функции на 2 тестовых примерах, подобранных самостоятельно (векторы из 4 и 5 элементов). На экран вывести исходные векторы и результаты их обработки. Показать использование функции на 2 различных примерах, **подобранных самостоятельно** (во всех случаях - векторы разного размера).

Если результат состоит из нескольких величин, определить их как компоненты вектора результатов.

1. Получить новый вектор путем умножения всех элементов исходного вектора на его максимальный элемент.
2. Найти сумму минимального и максимального из значений вектора.
3. Найти сумму всех положительных и сумму всех отрицательных элементов вектора.
4. Найти количество элементов, больших среднего арифметического элементов вектора.
5. Найти количество и сумму квадратов положительных элементов вектора.
6. Найти произведение ненулевых элементов вектора.
7. Для заданного вектора V найти количество элементов, больших среднего арифметического значения всех элементов вектора.
8. Для заданного вектора V найти квадрат максимального элемента и число ненулевых элементов.
9. Для заданного вектора V найти количество и сумму квадратов положительных элементов.
10. Вычислить произведение элементов вектора, имеющих значение >2.
11. Найти количество и сумму квадратов элементов вектора, по модулю меньших 3.
12. Найти сумму квадратов максимального и минимального элементов вектора.

ЗАДАЧА 4*. Составить функцию-программный блок, выполняющий указанные действия по обработке матрицы произвольного размера.

Проверить работу функции на 1 тестовом примере, подобранном самостоятельно.

Показать использование функции на 3 различных примерах, подобранных самостоятельно (во всех случаях - матрицы разного размера).

Если результат состоит из нескольких величин, определить их как компоненты вектора результатов.

1. Найти сумму всех элементов матрицы, расположенных на главной диагонали
2. Найти минимальный элемент в каждом столбце и сумму квадратов этих минимальных элементов для всей матрицы.
3. Построить вектор, каждая координата которого равна максимальному элементу в соответствующем i-м столбце матрицы.
4. Найти количество и сумму квадратов положительных элементов матрицы, расположенных в столбцах с четными номерами.
5. Найти количество нулевых элементов, расположенных на главной диагонали, а также произведение и сумму всех недиагональных элементов.
6. Найти максимальное из произведений элементов каждого столбца матрицы.
7. Все положительные элементы матрицы заменить на 1; все отрицательные элементы заменить на 0.
8. Найти максимальный элемент в каждой строке матрицы и сумму этих элементов.
9. Вычислить произведение всех ненулевых элементов матрицы, стоящих в столбцах, в которых последний элемент принадлежит интервалу [1;5].
10. Вычислить количество и сумму всех положительных элементов матрицы.
11. Найти количество и произведение всех отрицательных элементов матрицы.
12. Вычислить полусумму всех отрицательных элементов и произведение всех положительных элементов матрицы.
13. Найти сумму всех элементов матрицы, расположенных в строках с четными номерами
14. Найти количество элементов матрицы, больших среднего арифметического всех ее элементов.

Составил: Дей Е.А. 2015 v1.2

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА ВМКМ(и)-2016 - 04
РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ
С ПРИМЕНЕНИЕМ ВСТРОЕННЫХ ФУНКЦИЙ MATHCAD

Цель работы: изучение численных методов безусловной оптимизации и их программной реализации в системе Mathcad. Решение задач оптимизации с применением собственных программных блоков и встроенных функций Mathcad

Внимательно прочитайте описание численных методов оптимизации и примеры их реализации в Mathcad. Создайте новый документ и при чтении обязательно самостоятельно повторите все численные примеры. Затем выполните задание, приведенное в конце текста.

Такой подход к изучению материала позволяет наиболее быстро получить навыки практических вычислений.

Отчетом по работе будет являться правильно оформленный Mathcad-документ, состоящий из двух частей:

1. Повторение численных примеров

2. Выполнение задания

1. Задачи оптимизации

Простейшими задачами *оптимизации* являются задачи на поиск экстремумов (минимумов и максимумов) функции одной переменной $F(x)$. Если непрерывная функция $F(x)$ имеет всего один экстремум, то задача его поиска оказывается достаточно простой - поскольку в точке экстремума производная $F'(x)=0$, то поиск экстремума сводится к решению указанного уравнения.

Однако если экстремумов несколько, то решение задачи резко усложняется. Самый высокий пик функции в этом случае именуют *глобальным максимумом*, а самый глубокий минимум - *глобальным минимумом*. Другие экстремумы называют *локальными*.

В практике серьезных расчетов основной интерес представляет оптимизация функций многих (N) переменных $F(x, y, z,...)$. Такая функция представляет собой ($N+1$)- мерную поверхность. Большое число задач в науке и в технике сводится к решению задачи на поиск максимума или минимума функции многих переменных - проектных параметров, обычно называемой целевой функцией.

В системе Mathcad для решения данной задачи используются функции Minimize, Maximize.

2. Встроенные функции Mathcad для решения задач безусловной оптимизации

Для решения задач безусловной и условной оптимизации используются две функции MathCAD:

Maximize(f,<список параметров>) – вычисление точки максимума;
Minimize(f,<список параметров>) – вычисление точки минимума,

где f – имя минимизируемого функционала, определенного до обращения к функции; <список параметров> – содержит перечисление (через запятую) имен параметров, относительно которых решается оптимизационная задача.

Обе эти функции реализованы достаточно универсальными алгоритмами оптимизации, которые не требуют вычисления производных функции f(x1, x2,...,xn), что не только упрощает запись алгоритмов, но и позволяет решать задачи, у которых вычисления производных по тем или иным соображениям нежелательны.

Эти функции должны использоваться в составе блока решения, открываемого словом Given, и возвращать вектор неизвестных, при котором заданная функция имеет максимальное или минимальное значение соответственно. Внутри блока могут быть различные ограничительные условия в виде равенств или неравенств.

Внимание! Перед обращением к функциям Maximize, Minimize необходимо обязательно задать начальное значение параметров оптимизации.

Пример. Определить значения x, y, z, при которых g(x, y, z) достигает минимального значения $g(x,y,z)=10\sqrt{x^2-2x+36+y^2+4y+3z^2-18z}$.

Решение в Mathcad:

$$g(x,y,z) := 10\cdot\sqrt{x^2 - 2\cdot x + 36 + y^2 + 4\cdot y + 3\cdot z^2 - 18\cdot z}$$

Начальное приближение: $x := 1$ $y := 1$ $z := 1$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} := \mathrm{Minimize}(g,x,y,z) \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad g(x,y,z) = 20$$

Пример. Дан функционал:

$$f(u,w)=\frac{1}{4\pi}e^{\frac{-41-32u-16u^2-4w^2+20w}{32}}.$$

Определить значения u, w, при которых f(u,w) достигает максимального значения.

Решение в Mathcad:

$$d(u,w) := \frac{1}{4\pi}\cdot\exp\left(\frac{-41-32u-16u^2-4w^2+20w}{32}\right)$$

Начальное приближение: $u := 0$ $w := 0$

$$\begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} := \mathrm{Maximize}(d,u,w) \qquad \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2.5 \end{pmatrix} \qquad d(u,w) = 0.07958$$

$$d(u+0.01u, w+0.01w) = 0.079567$$

$$d(u-0.001\cdot u, w-0.001\cdot w) = 0.079577$$

В последних строках документа выполнена проверка найденного решения на максимум.

3. Решение оптимизационных задач с ограничениями

При наличии в постановке задачи дополнительных условий используются те же функции Maximize, Minimize, но они входят уже в блок решения Given и перед ними размещаются ограничения в виде равенств или неравенств, определяющие допустимую область значений параметров оптимизации.

Пример $F(a,b) = 100(a-b)^2 - 50\dfrac{a}{b}$ $\quad a + 2b \le 5;\; b \ge 1;\; a \ge 0.$

Определить значения a, b, доставляющие максимальное значение и удовлетворяющие неравенствам.

В начале решения точка «старта» алгоритма берется из допустимой области, определяемой ограничениями

$F(a,b) := 100\cdot(a-b)^2 - 50\cdot\dfrac{a}{b}$

$a := 1 \qquad b := 1$ - начальное приближение

Given - вычислительный блок

$a + 2\cdot b \le 5 \qquad b \ge 1 \qquad a \ge 0$

$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} := \text{Maximize}(F, a, b)$

$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2.5 \end{pmatrix} \qquad F(a,b) = 625.002$ - результат

$a + 2\cdot b = 5$ - проверка выполнения условий

$a = 0 \qquad b = 2.5$

4. Условная оптимизация с использованием блока Given..Minerr

В оптимизационных задачах с ограничениями решение целесообразно определять из необходимых условий экстремума. Эти условия порождают систему уравнений (чаще всего нелинейных), которые располагаются в блоке Given, вместе с ограничениями, определяющими допустимую область. Само решение ищется с помощью функций Find, Minerr

Пример В качестве тестового функционала при поиске точки минимума часто используется функция Розенброка

$$f\,(x,y) = 100\,(y - x^2) + (1-x)^2.$$

Двумернй график этой функции напоминает глубокий овраг, что сильно осложняет работу многих алгоритмов минимизации. Требуется вычислить точку минимума функционала при ограничениях:

$x \ge 0; \quad y \ge 0; \quad y \le 9 - x.$

Документ MathCAD решения этой задачи

$$f(x,y) := 100\cdot\left(y - x^2\right)^2 + (1 - x)^2$$

$$x := 2 \qquad y := 3$$

Given

$$\frac{d}{dx}f(x,y) = 0 \qquad \frac{d}{dy}f(x,y) = 0$$

$$x \ge 0 \qquad y \ge 0 \qquad y \le 9 - x$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \mathrm{Minerr}(x,y) \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad f(x,y) = 0$$

СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЯ

ЗАДАЧА 1. Для заданной функции

- построить график и выделить интервалы унимодальности

- вычислить все точки максимумов (минимумов) методом поразрядного поиска с использованием созданного ранее программного блока с точностью 10^{-5}.

- вычислить все точки максимумов (минимумов) с использованием встроенных функций Mathcad

1	$(x+1)^2\cdot\sin(x-0.3) + 6.2 = 0$
2	$x^2\cdot\sin(x) - 0.5\cdot\cos(x) + 4\cdot x - 3 = 0$
3	$x\cdot\sin(x) - \exp\left(\frac{x}{4}\right) + 2.7 = 0$
4	$\cos(2\cdot x + 0.1) - \exp(2 - x) + x\cdot\sin(x + 1.1) + 3 = 0$
5	$0.4\cdot x^2 - 5.2\cdot x\cdot\sin(x) - \frac{1}{x + 1.5} + 3.3 = 0$
6	$2\cdot\cos(x-1) + \sin\left(\frac{x}{3} + 2\right) + 0.4\cdot x - 2.5 = 0$
7	$(\sin(x + 0.5))^2 - 0.3\cdot x + \ln(3\cdot x + 1) - 2.1 = 0$
8	$5\cdot\cos\left(\frac{x}{2} + 0.5\right)\cdot\sin(x) - 0.5\cdot\ln(2\cdot x + 1) - 1.2 = 0$
9	$12\cdot\cos\left(\frac{x}{3} + 0.5\right)\cdot\sin(x-1) - 0.5\cdot\exp(-0.2\cdot x) = 0$
10	$2\cdot x^2 + 8\cdot(x+1)\cdot\cos(x) - \exp\left(\frac{x}{2}\right) - 0.5 = 0$

ЗАДАЧА 2. Минимизировать функцию двух переменных

$$f(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2 + e^{cx_1^2 + dx_2^2}.$$

Значения параметров α, β, a, b, c, d приведены в таблице.

а) Построить трехмерное изображение поверхности заданной функции, подобрав пределы так, чтобы изображение содержало минимум функции в указанной области;

б) Построить контурный график функции, определить пределы по каждой переменной, внутри которых функция имеет только один минимум. Выбрать начальную точку для поиска минимума.

в) Использовать программный блок по методу градиентного спуска с дроблением шага.

г) С точностью 10^{-5} найти значения аргументов, при которых реализуется минимальное значение заданной функции

д) Вычислить значение функции в точке минимума

е) Вычислить результат с использованием встроенных функций Mathcad

№ вар.	a	b	c	d
1	2.0	–1.3	0.04	1.2
2	4.0	–1.5	0.16	1.4
3	6.0	–1.7	0.36	1.6
4	8.0	–1.2	0.64	1.8
5	10.0	–1.0	1.0	2.0
6	12.0	–0.8	1.44	2.2
7	14.0	–0.6	1.96	2.4
8	16.0	–0.4	2.56	2.6
9	18.0	–0.2	3.24	2.8
10	20.0	0.0	4.00	3.0
11	22.0	0.1	0.10	3.2
12	24.0	0.3	0.30	3.4

ЗАДАЧА 3. В соответствии с условием сформулировать целевую функцию. Построить график функции, выбрать начальную точку для поиска минимума. Используя свой программный блок, найти значение аргумента, при котором реализуется минимум целевой функции, и само значение функции в точке минимума.

1. Решить задачу об изготовлении контейнера, рассмотренную на лекции.

2. Спроектировать контейнер нового типа в форме кругового конуса без дна объемом 1 м3 (см. рис.). Каковы должны быть диаметр и высота контейнера, чтобы его боковая поверхность была минимальной?

3. Прямоугольный дорожный указатель размерами w и h изготовлен из металлического листа постоянной толщины. Площадь поля, содержащего изображение, должна составлять 1,5 м2. По нижней стороне указатель имеет поле 20 см, по трем остальным 10 см (см. рис.) Найти значения w и h, при которых для изготовления указателя потребуется минимальное количество листового материала.

4. Для оценки сопротивления дороги движению автомобиля при скорости v км/ч можно использовать эмпирическую формулу $f(v)=24-(3/5)v+(1/35)v^2$ (для шоссе). Определить скорость, при которой сопротивление будет минимальным.

5. Найти, при каком значении угла между заданными сторонами параллелограмма $a=2.4$, $b=3.8$ с его площадь будет иметь максимальное значение

6. Найти, при каком значении угла между сторонами параллелограмма его периметр будет минимальным, если его сторона $a=3.27$ и высота $h=1.68$ постоянны

7. Найти, при каком значении угла между сторонами параллелограмма его диагональ будет иметь минимальное значение, если сторона параллелограмма $a=3.27$ и высота $h=1.68$ постоянны (#)

8. Найти, при каком значении угла между заданными сторонами параллелограмма $a=2.4$, $b=3.8$ угол между его диагоналями будет иметь минимальное значение (#)

9. Окно имеет форму прямоугольника, завершенного полукругом. Периметр его равен $P=1$ м. Выяснить, при каких размерах окно пропускает наибольшее количество света.

10. Расходы на обслуживание пассажиров теплохода в течение рейса пропорциональны квадрату времени, которое затрачено на рейс. Расходы на амортизацию судна и топливо пропорциональны кубу скорости судна. При какой скорости V рейс длиной L будет наиболее экономичным? Каковы расходы d на рейс в этом случае?

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА ВМКМ(и)-2016 - 05
РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ В СИСТЕМЕ MATHCAD

Цель работы: Изучение и практическое применение методов решения задач линейного программирования в среде Mathcad

Внимательно прочитайте описание задач линейного программирования и примеры их реализации в Mathcad. Создайте новый документ и при чтении обязательно самостоятельно повторите все численные примеры. Затем выполните задание, приведенное в конце текста.

Отчетом по работе будет являться правильно оформленный Mathcad-документ, состоящий из двух частей:

1. Повторение численных примеров
2. Выполнение задания

1. Задачи линейного программирования

К математическим задачам линейного программирования приводят различные инженерные, технологические и экономические ситуации, которые требуют оптимального использования ограниченных ресурсов (задачи о проектировании технических устройств и приборов, о планировании выпуска продукции, о соотношении компонентов вещества, транспортная задача и т.д.)

В таких задачах все соотношения между величинами являются линейными математическими функциями. Термин «программирование» по традиции в таких задачах имеет смысл верной последовательности действий, позволяющей получить требуемый результат.

В задачах линейного программирования выделяют основную величину F, характеризующую процесс, для которой нужно реализовать минимальное или максимальное в существующих условиях значение. Например: минимальная масса прибора, максимальная дальность приема, минимальная потребляемая мощность, максимальный коэффициент полезного действия, и т.д.

Далее выделяют параметры, влияющие на результат. Эти проектные параметры обозначают $x_1, x_2, \dots, x_n$. Тогда искомая характеристика будет являться *линейной* функцией этих параметров (*целевая функция*)

$$F = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j. \qquad (1)$$

В общем случае *задача линейного программирования* может быть сформулирована следующим образом: найти максимум или минимум целевой функции

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j, \qquad (2)$$

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m, \end{aligned} \qquad (3)$$

при ограничениях

$$b_1 \geq 0, b_2 \geq 0, \dots, b_m \geq 0. \qquad (4)$$

В задачах линейного программирования все переменные обычно предполагаются неотрицательными

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0. \quad (5)$$

Решение задачи линейного программирования – это не одно число, а набор чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$, его иногда еще называют *оптимальным планом*.

Для решения задач линейного программирования разработано большое количество различных методов. При анализе моделей с двумя или тремя переменными часто используются графические построения на плоскости или в пространстве. Среди универсальных методов решения наиболее распространен *симплексный метод*.

Основные этапы решения задач линейного программирования:

– выбор проектных параметров;
– запись целевой функции;
– составление системы ограничений.

2. Встроенные функции Mathcad для решения задач линейного программирования

Система Mathcad имеет встроенные вычислительные средства для решения задач линейного программирования. Это вычислительные блоки **Given .. Minimize** и **Given .. Maximize**.

Перед блоками задаются начальные значения величин, внутри блоков приводятся математические линейные соотношения между величинами, которые должны выполняться по условию задачи.

Знаки математических соотношений: >< = ≠ ≤ ≥ вставляются в соотношения из палитры «Булева алгебра».

Результат получается в виде вектора, содержащего оптимальные значения искомых параметров.

3. Решение задач на оптимальное распределение ресурсов

Рассмотрим задачу на оптимальное распределение ресурсов для достижения максимальной прибыли от выпуска изделий.

Пусть цех малого предприятия должен изготовить 100 изделий трех типов. Каждого изделия нужно сделать не менее 20 штук. На изделия уходят соответственно 4, 3, 4 и 2 кг металла при его общем запасе 340 кг, а также по 4.75, 11 и 2 кг пластмассы при ее общем запасе 700 кг. Сколько изделий каждого типа x1, x2, и x3 надо выпустить для получения максимального объема выпуска в денежном выражении, если цена изделий составляет по калькуляции 4, 3 и 2 рубля?

Определение целевой функции и вычисление оптимального решения с помощью блока Given..Maximize в среде Mathcad реализуются следующим образом:

$f(x1,x2,x3) := 4\cdot x1 + 3\cdot x2 + 2\cdot x3$

Поиск максимума с помощью вычислительного блока

$x1 := 1 \quad x2 := 1 \quad x3 := 1$ - начальное приближение

Given -вычислительный блок

$x1 \geq 20 \quad x2 \geq 20 \quad x3 \geq 20$ -ограничения по величине

$4\cdot x1 + 3\cdot x2 + 2\cdot x3 \leq 340$ -условия-неравенства

$4.75\cdot x1 + 11\cdot x2 + 2\cdot x3 \leq 700$

$x1 + x2 + x3 = 100$

$R := \text{Maximize}(f, x1, x2, x3) \qquad R := \begin{pmatrix} 56 \\ 20 \\ 24 \end{pmatrix}$

-результат x1=56 x2=20 x3=24

Аналогичным образом решается задача такого же типа на оптимальное планирование выпуска продукции.

Пример. Фабрика выпускает три вида тканей стоимостью 80, 70 и 60 единиц за метр соответственно. Суточное плановое задание составляет не менее 90 м тканей первого вида, 70м - второго и 60 м - третьего. Суточные ресурсы 780 единиц производственного оборудования, 850 единиц сырья, 750 единиц электроэнергии. Определить, сколько метров ткани каждого вида следует выпустить, чтобы общая стоимость продукции была максимальной.

Решение в Mathcad имеет вид

$\text{ORIGIN} := 1$

$f(x) := 80\cdot x_1 + 70\cdot x_2 + 60\cdot x_3$

$x_1 := 10 \quad x_2 := 10 \quad x_3 := 10$

Given

$2\cdot x_1 + 3\cdot x_2 + 4\cdot x_3 \leq 780$

$x_1 + 4\cdot x_2 + 5\cdot x_3 \leq 850$

$3\cdot x_1 + 4\cdot x_2 + 2\cdot x_3 \leq 790$

$x_1 \geq 90 \quad x_2 \geq 70 \quad x_3 \geq 60$

$R := \text{Maximize}(f, x)$

$$R = \begin{pmatrix} 112.5 \\ 70 \\ 86.25 \end{pmatrix} \qquad f(R) = 1.907 \times 10^4$$

4. Решение задач на минимизацию используемых ресурсов

Значительную часть задач линейного программирования составляют задачи на минимизацию ресурсов производства. Примером такой задачей является задача минимизации стоимости смеси, например, бензина (задача о смеси компонентов).

Стандартом требуется, чтобы октановое число бензина А-76 было не ниже 76, а содержание серы – не более 0,3%. Для изготовления бензина используется смесь из четырех компонентов. Данные о компонентах приведены в таблице:

Характеристика	Компонент бензина			
	1	2	3	4
Октановое число	68	72	80	90
Содержание серы. %	0.35	0.35	0.3	0.2
Ресурсы, т	700	600	500	300
Себестоимость, руб/т	40	45	60	90

Требуется определить, сколько тонн каждого компонента следует использовать для получения 1000 т автомобильного бензина А-76, чтобы его себестоимость была минимальной. Ниже представлено решение задачи в системе Mathcad

$f(x1,x2,x3,x4) := 40\cdot x1 + 45\cdot x2 + 60\cdot x3 + 90\cdot x4$ - целевая функция

$x1 := 10 \quad x2 := 10 \quad x3 := 10 \quad x4 := 10$ - начальное приближение

Given

$x1 + x2 + x3 + x4 = 1000$ - условие получение заданного количества

$68\cdot x1 + 72\cdot x2 + 80\cdot x3 + 90\cdot x4 \ge 76\cdot 1000$ - ограничения по октановому числу

$0.35\cdot x1 + 0.35\cdot x2 + 0.3\cdot x3 + 0.2\cdot x4 \le 0.3\cdot 1000$ - ограничение по содержанию серы

$0 \le x1 \le 700 \quad 0 \le x2 \le 600$ - ограничения по числу компонентов

$0 \le x3 \le 500 \quad 0 \le x4 \le 300$

$(x1\ x2\ x3\ x4) := \mathrm{Minimize}(f, x1, x2, x3, x4)$ -получение оптимального результата

$x1 = 571.429 \quad x3 = 142.857$

$x2 = -2.842 \times 10^{-14} \quad x4 = 285.714$ - вычисленные массы компонентов

$f(x1,x2,x3,x4) = 5.714 \times 10^{4}$ - минимальная себестоимость

5. Математическая постановка транспортной задачи

На практике часто встречается так называемая транспортная задача. В n пунктах – складах поставщиков находится определенное количество S_i $(i = 1..n)$ единиц некоторого однородного продукта. Этот продукт потребляется m потребителями в определенном объеме B_j $(j = 1..m)$. Известны расходы на перевозку единицы продукта из i-го склада j-му потребителю, которые равны C_{ij} и приведены в *таблице транспортных расходов*. Требуется составить такой план перевозок, при котором полностью удовлетворяются заказы потребителей с минимальными транспортными затратами.

Разработать модель, описывающую затраты при перевозке грузов со складов потребителям и позволяющую оптимизировать затраты на транспортировку.

При решении задачи предполагается: пропускная способность дороги от каждого склада не ограничена; длительность перевозки от склада к потребителю не учитывается при выборе предпочтительного плана перевозок; общее количество грузов на складах всегда больше или равно заказу потребителей.

Введем обозначения:

- n – количество поставщиков;
- m – количество потребителей;
- A_i – поставки от i-го поставщика всем потребителям, ограниченные S_i – количеством груза на складе;
- B_j – заказ j-го потребителя – поставки ему от всех потребителей;
- X_{ij} – перевозки от i-го поставщика j-му потребителю;
- C_{ij} – цена поставки единицы груза от i-го поставщика j-му потребителю.

Требуется обеспечить полное выполнение всех заказов B_j при минимальных затратах на перевозку грузов. Общие затраты на перевозку равны

$$F(X) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} C_{i,j} X_{i,j},$$

где F(X) – минимизируемая функция, зависящая от n×m переменных $X_{i,j}$. Очевидно, что при этом должны выполняться ограничения:

$A_i = \sum_{j=1}^{m} X_{i,j} \le S_i$ – нельзя поставить груза больше, чем есть на складе.

$B_j = \sum_{i=1}^{n} X_{i,j}$ – потребитель должен получить точное количество заказанного груза.

$X_{i,j} \ge 0$ – товаропоток не может быть отрицательным.

6. Решение транспортной задачи в системе Mathcad

Математическая постановка соответствует решению задачи линейного программирования, условия оптимизации описываются системами линейных уравнений и неравенств. Решение задачи будем проводить в среде пакета Mathcad, используя универсальную встроенную функцию Minimize.

Пример. Пусть на трех складах хранится 310, 260 и 280 единиц груза соответственно. Требуется его доставить пяти потребителям, заказы которых равны 180, 80, 200, 160, 220 единиц. Стоимости перевозки единицы груза со склада потребителю указаны в транспортной таблице.

$ORIGIN := 1$

$S := \begin{pmatrix} 310 \\ 260 \\ 280 \end{pmatrix}$ - запасы продукции на складах

$B := \begin{pmatrix} 180 \\ 80 \\ 200 \\ 160 \\ 220 \end{pmatrix}$ - заказы потребителей

$C := \begin{pmatrix} 10 & 8 & 6 & 5 & 4 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 5 & 9 \end{pmatrix}$ - матрица транспортных расходов

$$fp(x) := \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{5} \left(C_{i,j} \cdot x_{i,j}\right)$$ - целевая функция общая сумма транспортных затрат

$$x := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$ - матрица начальных приближений

Given - вычислительный блок

$$\sum_{j=1}^{5} x_{1,j} \le S_1 \quad \sum_{j=1}^{5} x_{2,j} \le S_2 \quad \sum_{j=1}^{5} x_{3,j} \le S_3$$ - ограничения по запасам продукции на складах

$$\sum_{i=1}^{3} x_{i,1} = B_1 \quad \sum_{i=1}^{3} x_{i,2} = B_2$$ - требования выполнения заказов потребителей

$$\sum_{i=1}^{3} x_{i,3} = B_3 \quad \sum_{i=1}^{3} x_{i,4} = B_4 \quad \sum_{i=1}^{3} x_{i,5} = B_5$$

$x \ge 0$ - объем перевозок не может быть отрицательным

$R := \text{Minimize}(fp, x)$

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 80 & 220 \\ 0 & 0 & 180 & 80 & 0 \\ 180 & 80 & 20 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ - оптимальный план перевозок строка соответствует складу столбец соответствует потребителю элемент матрицы - объему перевозок

$fp(R) = 3.2 \times 10^3$ -минимальные транспортные затраты

СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЯ

Решить задачи № 1, № 2 в системе Mathcad (по вариантам).

ЗАДАЧА 1. Решение задач на оптимальное распределение ресурсов.

– Для заданного варианта сформулировать математическую постановку задачи линейного программирования.

– Решить задачу в среде Mathcad.

– Получить оптимальные значения проектных параметров и соответствующее им значение целевой функции.

– На основании полученных результатов сделать вывод по сути задачи.

1) Организация специализируется на разработке и установке компьютерных сетей четырех разных классов. Данные о параметрах процесса разработки и установки этих сетей приведены в таблице:

Название Проекта сети	Затраты на установку сети, тыс. руб.	Время на планирование сети, дни	Время на покупку оборудования, дни	Время, необходимое для установки, дни	Время на тестирование, дни	Стоимость проекта, тыс. руб.
Local	4000	2	3	3	2	6000
Corporate	7500	4	5	7	4	8000
Regional	12400	8	9	18	6	17000
Global	23700	16	13	30	10	45000

Средства организации, задействованные в течение года для установки сетей, не могут превосходить 500000 тыс. руб.

По условиям функционирования организации имеются ограничения на время планирования сетей - не более 50 дней, на закупку оборудования - не более 52 дней, на установку сетей - не более 110 дней, на тестирование сетей - не более 40 дней. Нужно выяснить, при каком количестве устанавливаемых сетей разных типов прибыль (пропорциональная стоимости выполненных проектов) организации будет максимальна.

2) Из 4 видов основных материалов (медь, цинк, свинец, никель) составляют 3 вида сплавов латуни: обычный, специальный и для художественных изделий. Цены на 1 ед. веса меди, цинка, свинца и никеля составляют 8 руб., 6 руб., 4 руб., 10 руб., а на 1 ед. веса сплава соответственно 20 руб., 30 руб., 40 рублей. Известно, что сплав для художественных изделий должен содержать не менее 6% никеля, не менее 50% меди и не более 30% свинца, специальный – не менее 4% никеля, не менее 70% меди, не менее 10% цинка и не более 20% свинца. В обычный сплав компоненты могут входить баз ограничений. Кроме того, известно, что производственная мощность предприятия позволяет выпускать (за определенный срок) не более 400 ед. веса обычного сплава, не более 700 ед. веса специального сплава и не более 100 ед. веса декоративного сплава.

Найти производственный план, дающий максимальную прибыль предприятию.

3) Определить набор продуктов в магазинах, дающий наибольшую общую прибыль по всем магазинам

Магазины	Время, затрачиваемое магазинами на продажу единицы продукта, ч			Возможное время работы магазина, ч	Примечание
	А	Б	В		
1 2 3	2 4 3	4 2 0	3 3 1	до 48 до 60 до 36	1. Все продукты могут быть проданы за указанное время
Уровень прибыли от продажи единицы продукта	6	4	3		2. Необходимо продать ровно 5 штук продукта Б, чтобы удовлетворить требования постоянного покупателя

4) Мебельная фабрика выпускает столы, стулья, кресла и книжные шкафы. При изготовлении этих товаров используется два различных типа досок, причем фабрика имеет в наличии 1500 м досок I типа и 1000 м досок II типа. Кроме того, заданы трудовые ресурсы в количестве 800 чел.-ч. Задана матрица нормативов затрат каждого из видов ресурсов на изготовление 1 ед. изделия и прибыль на 1 ед. изделия

Ресурсы	Затраты на 1 ед. изделия			
	столы	стулья	кресла	книжные шкафы
1. Доски I типа, м	5	1	9	12
2. Доски II типа, м	2	3	4	1
3. Трудовые ресурсы чел.-ч	3	2	5	10
Прибыль, руб./шт.	12	5	15	10

Определить оптимальный ассортимент, максимизирующий прибыль при дополнительных условиях, накладываемых на ассортимент: столов не менее 40, стульев - не менее 130, кресел - не менее 30, книжных шкафов - не более 10.

5) Диетолог занимается составлением диеты, содержащей по крайней мере 20 единиц белков, 30 единиц углеводов, 10 единиц жиров и 40 единиц витаминов. Как дешевле всего достичь этого при указанных в таблице ценах на 1 кг (или 1 л) пяти имеющихся продуктов

	Хлеб	Соя	Сушеная рыба	Фрукты	Молоко
Белки	2	12	10	1	2
Углеводы	12	0	0	4	3
Жиры	1	8	3	0	4
Витамины	2	2	4	6	2
Цена	12	36	32	18	10

6) Фирма рекламирует свою продукцию с использованием четырех средств: телевизора, радио, газет и афиш. Из опыта известно, что эти средства приводят к увеличению прибыли соответственно на 10, 3, 7 и 4 руб. в расчете на 1 руб., затраченный на рекламу. Определить оптимальное распределение рекламного бюджета если оно подчинено следующим ограничениям: а) полный бюджет не должен превосходить 500000 руб.; б) следует расходовать не более 40% бюджета на телевидение и не более 20% бюджета на афиши; в) вследствие привлекательности для подростков радио на него следует расходовать по крайней мере половину того, что планируется на телевидение.

7) Для выращивания некоторой культуры применяются 3 вида удобрений - фосфорные, азотные и калийные. Вся посевная площадь разбита на три почвенно - климатические зоны. Составить такой план распределения удобрений между посевными площадями, который обеспечивал бы максимальный суммарный прирост урожайности культуры. Условия задачи приведены в табл.

Зоны	Посевная площадь, га	Затраты удобрений на 1 га (в ц)			Прирост урожайности на 1 га (в ц)
		фосфорные	азотные	калийные	
I	100 000	2	1	1	12
II	150 000	1	2	5/4	14
III	200 000	1	1/2	0	10
Имеющиеся удобрения (в ц)		400 000	300 000	100 000	-

8) Для грузовых перевозок создается автоколонна. На приобретение автомашин выделено 600 тыс. ден. ед. Можно заказать машины трех марок – А, Б и В, характеризующиеся данными, приведенными в табл.

Марка автомашины	Стоимость машины, тыс. ден. ед.	Количество водителей, обслуживающих машину за смену	Число рабочих смен в сутки	Производительность машины за смену, т/км
А	10	1	3	2100
Б	20	2	3	3600
В	23	2	3	3780

Количество автомашин не должно превышать 30, а общее число водителей в автоколонне должно быть не более 144 человек. Сколько автомашин каждой марки следует заказать, чтобы автоколонна имела максимально возможную производительность (т/км) в расчете на одни сутки? Считать, что каждая машина будет использоваться в течение всех трех смен, а водители будут работать по одной смене в сутки.

9) Продукцией гормолзавода являются молоко, кефир и сметана, расфасованные в пакеты. На производство 1 т молока, кефира и сметаны требуется соответственно 1010, 1010 и 9450 кг молока. При этом затраты рабочего времени при разливе 1 т молока и кефира составляют 0,18 и 0,19 машино-ч. На расфасовке 1 т сметаны заняты специальные автоматы в течение 3,25 часа. Всего для производства цельномолочной продукции завод может использовать 136000 кг молока. Основное оборудование может быть занято в течение 21,4 машино-ч, а автоматы по расфасовке сметаны - в течение 16,25 ч. Прибыль от реализации 1 т молока, кефира и сметаны соответственно равна 3000, 2200 и 13600 руб. Завод должен ежедневно производить не менее 100 т расфасованного молока. На производство другой продукции не имеется никаких ограничений.

Требуется определить, какую продукцию и в каком количестве следует ежедневно изготовлять заводу, чтобы прибыль от ее реализации была максимальной.

10) Штат научно-исследовательской лаборатории (НИЛ) должен состоять из: 5…7 лаборантов, 8…10 инженеров, 11 младших научных сотрудников (м.н.с.), 3 старших научных сотрудников (с.н.с.), 2 ведущих научных сотрудников, и заведующего НИЛ. Общий месячный фонд зарплаты составляет 400 т.руб. Необходимо определить, какими должны быть оклады сотрудников НИЛ при

условии, что оклад лаборанта не должен быть меньше прожиточного минимума 6 т.руб.

В основу данной модели взять оклад лаборанта С, а остальные оклады вычислять, исходя из повышающих коэффициентов по отношению к окладу лаборанта.

11) Имеются два проекта на строительство жилых домов. Расход стройматериалов, их запас, и полезная площадь дома каждого проекта приведены в таблице. Определить, сколько домов первого и второго проекта следует построить, чтобы полезная площадь была наибольшей.

Стройматериалы	Расход стройматериалов ($м^3$) на один дом		Запас стройматериалов, $м^3$
	I	II	
Кирпич силикатный	7	3	1365
Кирпич красный	6	3	1245
Пиломатериалы	1	2	650
Полезная площадь, $м^2$	60	50	

12) Фирма производит два широко популярных безалкогольных напитка - «Лимонад» и «Тоник». Фирма может продать всю продукцию, которая будет произведена. Однако объем производства ограничен количеством основного ингредиента и производственной мощностью имеющегося оборудования. Для производства 1 л «Лимонада» требуется 0,02 ч работы оборудования, а для производства 1 л «Тоника» — 0,04 ч. Расход специального ингредиента составляет 0,01 кг и 0,04 кг на 1 л «Лимонада» и «Тоника» соответственно. Ежедневно в распоряжении фирмы имеется 24 ч времени работы оборудования и 16 кг специального ингредиента. Прибыль фирмы составляет 0,10 ден. ед. за 1 л «Лимонада» и 0,30 ден. ед. за 1 л «Тоника».

Сколько продукции каждого вида следует производить ежедневно, если цель фирмы состоит в максимизации ежедневной прибыли?

ЗАДАЧА 2. Решение транспортной задачи.

Для заданной таблицы транспортных расходов С, вектора столбца запасов А в пунктах отправления и вектора – строки потребностей В в пунктах назначения:

– осуществить математическую запись транспортной задачи;

– решить задачу с помощью программы MathCAD;

– получить оптимальные значения проектных параметров и соответствующее им значение целевой функции.

11	$C=\begin{pmatrix}7&9&1&5\\2&7&5&6\\3&5&10&8\\3&7&4&5\end{pmatrix}\begin{matrix}20\\30\\50\\30\end{matrix}$ 40 30 20 40	18	$C=\begin{pmatrix}2&3&4\\1&5&3\\6&4&2\\7&8&5\end{pmatrix}\begin{matrix}320\\280\\270\\350\end{matrix}$ 450 370 400
12	$C=\begin{pmatrix}1&7&9&5\\4&2&6&8\\3&8&1&2\end{pmatrix}\begin{matrix}120\\280\\160\end{matrix}$ 130 220 60 70	19	$C=\begin{pmatrix}6&7&3&2\\5&1&4&3\\3&2&6&2\end{pmatrix}\begin{matrix}150\\70\\140\end{matrix}$ 50 50 100 160

№ вар	Исходные данные	№ вар	Исходные данные
1	$C=\begin{pmatrix}7&15&4&6&5\\1&8&6&5&3\\6&13&8&7&4\end{pmatrix}\begin{matrix}180\\350\\20\end{matrix}$ 110 90 120 80 150	6	$C=\begin{pmatrix}2&3&4&3\\5&3&1&2\\2&1&4&2\end{pmatrix}\begin{matrix}90\\60\\150\end{matrix}$ 120 40 60 80
2	$C=\begin{pmatrix}1&2&4&1\\2&3&1&5\\3&2&4&4\end{pmatrix}\begin{matrix}50\\30\\10\end{matrix}$ 30 30 10 20	7	$C=\begin{pmatrix}4&5&2&8&6\\3&1&9&7&3\\9&6&7&2&1\end{pmatrix}\begin{matrix}115\\175\\130\end{matrix}$ 70 220 40 30 60
3	$C=\begin{pmatrix}4&5&3&7\\7&6&2&9\\1&3&9&8\\2&4&5&6\end{pmatrix}\begin{matrix}280\\175\\125\\130\end{matrix}$ 90 180 310 130	8	$C=\begin{pmatrix}3&9&4&5\\1&8&5&3\\7&2&1&4\\2&4&10&6\end{pmatrix}\begin{matrix}40\\10\\30\\25\end{matrix}$ 50 10 35 10
4	$C=\begin{pmatrix}2&3&4&2&4\\8&4&1&4&1\\9&7&3&7&2\end{pmatrix}\begin{matrix}140\\180\\160\end{matrix}$ 60 70 120 130 100	9	$C=\begin{pmatrix}2&4&7&9\\5&1&8&12\\11&6&4&3\end{pmatrix}\begin{matrix}200\\270\\130\end{matrix}$ 120 80 240 160
5	$C=\begin{pmatrix}2&7&7&6\\1&1&1&2\\5&5&3&1\\2&8&1&4\\3&2&1&5\end{pmatrix}\begin{matrix}20\\50\\10\\20\\15\end{matrix}$ 40 35 20 20	10	$C=\begin{pmatrix}5&1&7&6\\1&5&8&1\\5&6&3&3\\2&5&1&4\\3&7&9&1\end{pmatrix}\begin{matrix}30\\40\\10\\20\\10\end{matrix}$ 20 40 30 20

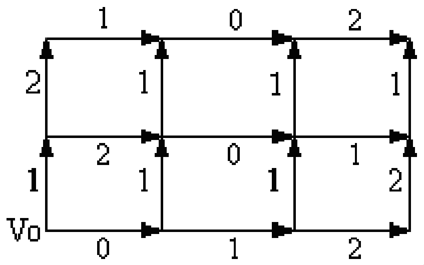
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА ВМКМ(и)-2016 - 06 РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ СЕТЕВЫХ СИСТЕМ В СРЕДЕ MATHCAD

Цель работы: изучение задач оптимизации сетевых систем и методов их решения в вычислительной среде Mathcad

1. Задача поиска кратчайшего пути в транспортной сети

Для представления различных технических объектов, описания процессов и функционирования систем часто используются графовые модели. К модели в виде графа можно свести и многие практические экономические задачи. К таким проблемам относятся задача поиска кратчайшего пути в заданной транспортной системе, задачи о распределении потока в сети, сетевые модели планирования последовательности работ, задача коммивояжера и другие.

В общем виде задача формулируется следующим образом. Имеется некоторое количество пунктов, соединенных определенным образом одно- или двунаправленными связями. Каждая связь имеет определенный вес – длину. Требуется найти кратчайший путь из пункта i в пункт j.



При составлении математической модели задачи необходимо учитывать, что маршрут должен быть непрерывным, а каждый промежуточный пункт на пути следования может быть посещен только один раз. Транспортная система в задаче является ориентированным графом – двухполюсной сетью, где N1 – вход, Nn – выход, весовые коэффициенты cij ребер δij являются длинами пути между пунктами i и j, требуется определить кратчайший путь из N1 в Nn.

Сопоставим каждому ребру графа булеву переменную, т.е. $\delta_{ij} \in \{0, 1\}$. Если ребро входит в маршрут, то $\delta_{ij} = 1$, иначе $\delta_{ij} = 0$. Тогда целевая функция, которая минимизируется при поиске кратчайшего пути, имеет вид:

$$F = \sum_i \sum_j c_{ij} \cdot \delta_{ij} \ .$$

Все пункты маршрута можно разделить на начальный, промежуточный и конечный. Очевидно, что в каждом промежуточном пункте должно быть по одному входящему и исходящему ребру, а для начального и конечного пунктов может быть только одно исходящее или входящее ребро соответственно. Математически эти ограничения могут быть записаны следующим образом:

– для перечисления всех k, входящих в i-ый пункт маршрута ребер :

$$\sum_k \delta_{ki} = 1, \quad i = 2, \ldots n;$$

– для перечисления всех j, исходящих из i-го пункта ребер:

$$\sum_j \delta_{ij} = 1, \quad i = 1,...n-1.$$

Если же i пункт не входит в кратчайший маршрут, то соответствующая сумма как для входящих, так и исходящих из вершины графа ребер должна быть равна нулю. Тогда для любого пункта сети, кроме начального и конечного, должно выполняться условие:

$$\sum_k \delta_{ki} - \sum_j \delta_{ij} = 0.$$

В начальном пункте – $\sum_j \delta_{1j} = 1$, в конечном – $\sum_k \delta_{kn} = 1$ и $\delta_{ij} \geq 0$ для всех i и j. От переменных δij достаточно потребовать только неотрицательности. Из-за указанных выше ограничений в решении могут быть получены только значения нуля либо единицы. В результате получаем обычную задачу линейного программирования, которую можно решить без наложения требований целочисленности.

Очевидно, что к подобной формулировке, а точнее, соответствующей математической модели можно свести самые разнообразные задачи, в том числе планирование последовательности выполнения технологических процессов и работ. Вес ребер графа при этом может иметь самый различный смысл: продолжительность, трудоемкость, стоимость и т.д.

Пример 1. Пусть требуется найти кратчайший маршрут из пункта А в пункт В, если схема движения и расстояния между объектами заданы (см. рисунок 1)

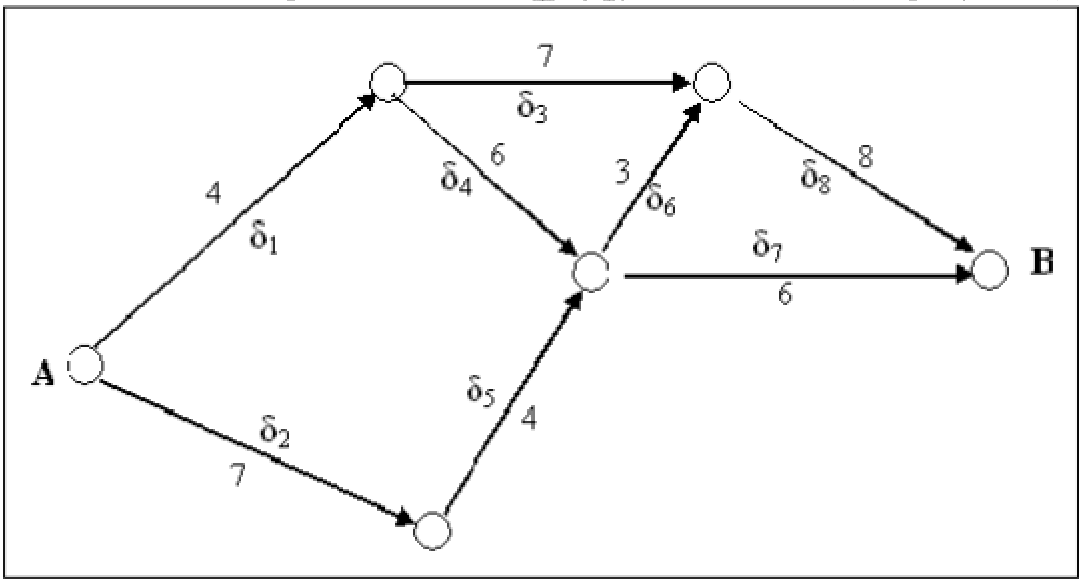


Рисунок 1 – схема транспортной сети

<u>Решение.</u> В системе Mathcad определим целевую функцию, содержащую коэффициенты реализации маршрута δ_1, δ_2, .. δ_8 и зафиксируем начальные значения этих коэффициентов, необходимые для начала поиска оптимальных значений блоком Given .. Minimize.

Внутри блока укажем требование положительности к значениям этих коэффициентов, а также соотношения-равенства, выражающие логику задачи.

Результатом будет вектор R, который выводится на экран в виде строки (транспонированного вектора) R^T.

$ORIGIN := 1$

$$f(\delta) := 4\cdot\delta_1 + 7\cdot\delta_2 + 7\cdot\delta_3 + 6\cdot\delta_4 + 4\cdot\delta_5 + 3\cdot\delta_6 + 6\cdot\delta_7 + 8\cdot\delta_8$$

$\delta_1 := 1 \quad \delta_2 := 1 \quad \delta_3 := 1 \quad \delta_4 := 1 \quad \delta_5 := 1 \quad \delta_6 := 1 \quad \delta_7 := 1 \quad \delta_8 := 1$

Given

$\delta_1 \geq 0 \quad \delta_2 \geq 0 \quad \delta_3 \geq 0 \quad \delta_4 \geq 0 \quad \delta_5 \geq 0 \quad \delta_6 \geq 0 \quad \delta_7 \geq 0 \quad \delta_8 \geq 0$

$\delta_1 + \delta_2 = 1 \qquad \delta_1 = \delta_3 + \delta_4 \qquad \delta_2 = \delta_5$

$\delta_4 + \delta_5 = \delta_6 + \delta_7 \qquad \delta_3 + \delta_6 = \delta_8 \qquad \delta_7 + \delta_8 = 1$

$R := \mathrm{Minimize}(f, \delta)$

$R^T = (1\ \ 0\ \ 0\ \ 1\ \ 0\ \ 0\ \ 1\ \ 0)$ - кратчайший маршрут - ребра № 1, №4, №7

2. Задача о распределении потоков в сетях

В задачах подобного типа требуется найти оптимальный вариант транспортировки продукта по сети определенной конфигурации. В этом случае элементы сети имеют следующие характеристики: c_{ij} – стоимость транспортировки единицы продукции для ребра сети между вершинами i и j, D_{ij} – пропускная способность этого ребра, в общем случае ограниченная в пределах $0 \leq D_{ij} \leq \infty$ (если ребро между данными вершинами i и j графа отсутствует, то пропускная способность равна нулю, если поток ничем не ограничен – то бесконечности).

Очевидно, что в этом случае должно выполняться требование сохранения потока: суммарный поток, входящий и выходящий из узла, должны быть равны.

Пусть x_{ij} – поток в ребре графа, тогда для промежуточной вершины сети

$$\sum_k x_{ki} - \sum_j x_{ij} = 0,$$

где k – перечисление всех входящих, j – всех исходящих ребер для вершины i.

Для потока в любом ребре требуется, чтобы

$$0 \leq x_{ij} \leq D_{ij}.$$

Для начальной и конечной вершины, очевидно, необходимо выполнение условия

$$\sum_j x_{1j} = A_1,$$

где A_1 – максимальный выходной поток, создаваемый исходной вершиной сети, необходимо, чтобы он был меньше, чем суммарная пропускная способность всех исходящих из вершины ребер,

$$\sum_k x_{kn} = B_n,$$

где B_n – максимальный поток, потребляемый конечной вершиной сети, он также не должен превышать пропускной способности входящих ребер.

Возможны различные постановки задачи оптимизации – минимизации стоимости транспортировки и максимизации потока. Получаем соответственно две формулировки математической модели задачи.

Минимизация стоимости:

$$F = \sum_i \sum_j c_{ij} \cdot x_{ij}$$

- минимизируемая целевая функция – общая стоимость транспортировки.

Ограничения:

а) $A_1 = B_n$ - поток не может накапливаться в промежуточных вершинах, т.е. $\sum_j x_{1j} = \sum_k x_{kn}$

б) $0 \le x_{ij} \le D_{ij}$ - по пропускной способности;

в) $\sum_k x_{ki} - \sum_j x_{ij} = 0$ - сохранение непрерывности потока.

Максимизация потока:

а) $F = \sum_k x_{kn}$ - максимизируемая целевая функция – суммарный поток, входящий в конечный узел.

б) $\sum_i \sum_j c_{ij} \cdot x_{ij} \le C_s$ - суммарные затраты не должны превысить величины имеющихся средств C_s.

Ограничения:

а) $A_1 = B_n$ - поток не может накапливаться в промежуточных вершинах, т.е. $\sum_j x_{1j} = \sum_k x_{kn}$

б) $0 \le x_{ij} \le D_{ij}$ - по пропускной способности;

в) $\sum_k x_{ki} - \sum_j x_{ij} = 0$ - сохранение непрерывности потока.

Пример 2. Рассмотрим задачу на поиск максимального потока для системы автодорог, представленной на рисунке 2, где цифрами обозначена максимальная пропускная способность участков транспортной сети (тысяч машин в день).

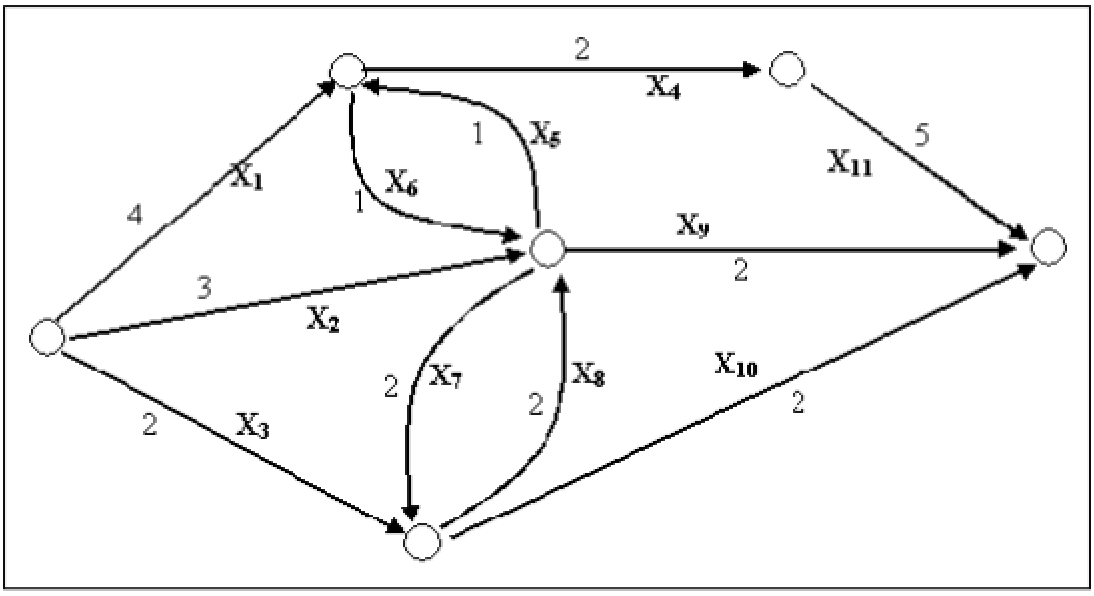


Рисунок 2 – систем дорог к задаче о максимальном потоке

Заданный граф частично ориентирован. Для того чтобы прийти к математической модели, необходимо преобразовать граф в ориентированную сеть. Это можно сделать, заменив каждое неориентированное ребро – дорогу с двусторонним движением двумя ориентированными – односторонними полосами движения, каждая с исходной пропускной способностью. Дороги x4 и x5 стали односторонними, так как возможность противоположного направления движения в данной задаче для них несущественна.

$f(x) := x_9 + x_{10} + x_{11}$ - целевая функция

$k := 1..11$

$x_k := 1$ - начальное приближение

Given

$0 \le x_1 \le 4 \quad 0 \le x_2 \le 3 \quad 0 \le x_3 \le 2 \quad 0 \le x_4 \le 2 \quad 0 \le x_5 \le 1 \quad 0 \le x_6 \le 1$

$0 \le x_7 \le 2 \quad 0 \le x_8 \le 2 \quad 0 \le x_9 \le 2 \quad 0 \le x_{10} \le 2 \quad 0 \le x_{11} \le 5$

$x_1 + x_5 = x_4 + x_6 \qquad x_4 = x_{11}$

$x_2 + x_6 + x_8 = x_5 + x_7 + x_9$

$R := \mathrm{Maximize}(f, x)$

$R^T =$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	2	2	1	2	1	1	1	1	2	2	2

- номер ребра
- поток по ребру

$f(R) = 6$ - максимальный поток в сети

Сравнение максимально возможного потока, исходящего из начального узла сети, с результатом решения (9>6) показывает, что данная транспортная сеть требует дополнительного расширения для его пропуска.

3. Сетевой график комплекса операций и правила его построения

Деятельность организаций, предприятий и их подразделений по выполнению комплекса различных работ должна быть подчинена единому плану. Только наличие такого плана может обеспечить организованное и своевременное проведение всех работ. Особое значение при этом имеет правильная организация всей системы управления ходом работ.

План проведения комплекса работ должен отражать все входящие в него этапы работ, их последовательность и взаимосвязь, длительность отдельных этапов и разработки в целом, а также трудоёмкость и стоимость отдельных работ и всего проекта.

Наиболее эффективными областями применения **сетевого планирования** являются: проектные, опытно-конструкторские и научно-исследовательские работы, подготовка производства новых изделий, строительство и реконструкция сложных объектов, технологические процессы изготовления сложных изделий, материально-техническое снабжение, административные мероприятия.

Основой метода является **сетевой график (сетевая модель)**, отражающий логическую взаимосвязь и взаимообусловленность входящих в него элементарных операций (работ).

Определение 1. Граф, в котором существует лишь одна вершина A_0, не имеющая входящих дуг, и лишь одна вершина A_n, не имеющая выходящих дуг, и каждой дуге которого приписано некоторое число, называется **сетевым графиком** или **сетью.** Числа, приписанные дугам, называются их **длинами**.

Определение 2. Последовательность дуг (A_0, A_1), (A_1, A_2), …, (A_{n-1}, A_n), в которой конец каждой предыдущей совпадает с началом последующей, называется **путём.** При этом вершина A_0 является началом, а вершина A_n – концом пути.

Длиной пути называется сумма длин последовательности его дуг.

Определение 3. Путь сетевого графика называется **полным**, если его начало совпадает с вершиной A_0, а конец – с вершиной A_n. Если начало некоторого пути совпадает с его концом, то такой путь называется **контуром.**

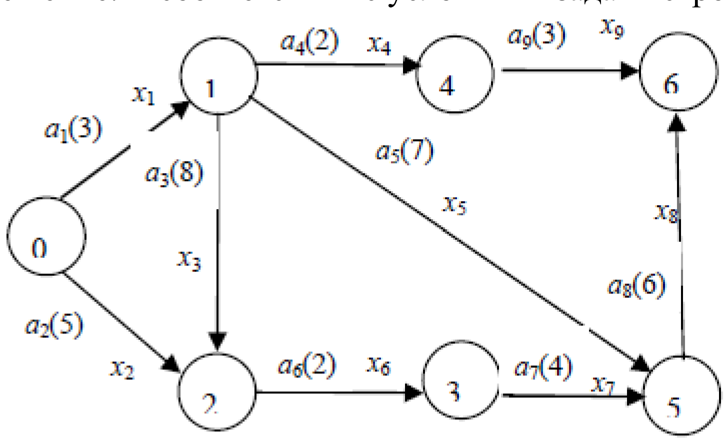
Как правило, сетевой график имеет большое число полных путей.

Обычно используют сетевые графики в терминах «дуги – работы» (или «дуги – операции»); в таких графиках вершины, называемые **событиями**, соответствуют моментам времени начала или окончания одной либо нескольких работ, а дуги – работам. События обозначаются кружками.

Пример 3. Сеть проекта представлена структурной таблицей комплекса работ. Найти критический путь (максимальный по времени). Сколько времени потребуется для завершения проекта?

Работа	Опирается на работы	Продолжит. работы
a_1	–	3
a_2	–	5
a_3	a_1	8
a_4	a_1	2
a_5	a_1	7
a_6	a_2, a_3	2
a_7	a_6	3
a_8	a_5, a_7	6
a_9	a_4	3

Решение. В соответствии с условиями задачи строим ориентированную сеть



В среде Mathcad определяем исходные данные, целевую функцию и выполняем вычисления.

$C := (3\ \ 5\ \ 8\ \ 2\ \ 7\ \ 2\ \ 4\ \ 6\ \ 3)$ - исходные данные

$X := (1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1)^T$

$z(X) := C \cdot X$ - целевая функция

Given

$X \ge 0$

$X_1 + X_2 = 1 \quad X_1 = X_3 + X_4 + X_5 \quad X_2 + X_3 = X_6$

$X_6 = X_7 \quad X_4 = X_9 \quad X_5 + X_7 = X_8 \quad X_8 + X_9 = 1$

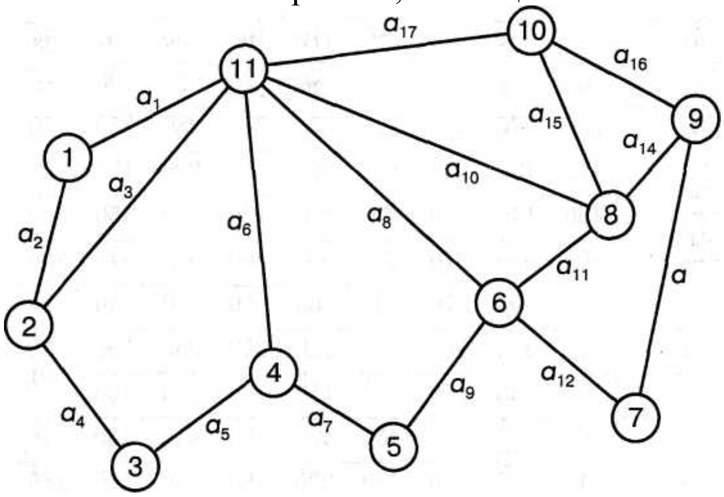
$K := \text{Maximize}(z, X)$

$K^T = (1\ \ 0\ \ 1\ \ 0\ \ 0\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 0) \qquad z(K) = 23$

С помощью функции Maximize находим критический путь. Вычисляем время завершения проекта z(K)=23. Критический путь проходит через события 0-1-2-3-5-6, $t_{кр}$=23. При этом критические работы: a_1, a_3, a_6, a_7, a_8.

СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЯ

ЗАДАЧА 1. Районной администрацией принято решение о газификации одного из небольших сел района, имеющего 10 жилых домов.



Расположение домов указано на рисунке. Числа в кружках обозначают условный номер дома. Узел 11 является газопонижающей станцией.

Разработать такой план газификации села, чтобы общая длина трубопроводов была наименьшей.

Варианты параметров задачи:

№ варианта Значения	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_1	200	180	220	150	170	190	230	160	210	240
a_2	60	70	50	40	80	70	30	100	90	40
a_3	250	270	290	220	230	240	280	250	260	300
a_4	110	130	120	140	100	150	200	170	190	180
a_5	150	140	110	100	120	130	160	150	140	110
a_6	300	320	310	350	330	360	340	310	290	370
a_7	80	90	70	100	60	50	70	40	50	90
a_8	350	370	360	390	340	380	330	390	360	400
a_9	120	130	140	190	150	180	170	160	140	160
a_{10}	400	440	420	430	470	450	410	460	440	470
a_{11}	210	190	200	210	220	180	230	170	180	190
a_{12}	40	50	30	60	80	70	90	80	50	40
a_{13}	120	130	150	120	100	170	160	70	90	110
a_{14}	30	40	50	60	30	50	80	70	90	40
a_{15}	70	50	40	60	30	80	70	90	40	50
a_{16}	20	40	30	50	30	70	20	60	40	50
a_{17}	550	580	570	590	530	520	560	630	600	610

ЗАДАЧА 2. На основании данных о проекте работ, представленных в таблицах, составить сетевой график выполнения работ. Найти критический путь (максимальный по времени). Определить, сколько времени потребуется для завершения проекта.

Содержание работы	Обо значение	Пре дыдущая	Прод олжи-
Исходные данные на изделие	а1		t1
Заказ комплектующих деталей	а2	а1	t2
Выпуск документации	а3	а1	t3
Изготовление деталей	а4	а3	t4
Поставка комплектующих	а5	а2	t5
Сборка изделия	а6	а4,а	t6
Выпуск документации на	а7	а3	t7
Испытание и приемка изделия	а8	а6,а	t8

Варианты параметров задачи:

№ варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
t1	30	33	36	35	25	20	15	30	25	20
t2	7	9	8	6	8	11	10	5	9	7
t3	15	17	18	14	16	20	12	13	20	19
t4	35	33	32	34	31	35	30	37	39	38
t5	25	24	21	20	22	23	26	25	18	21
t6	13	15	10	12	13	16	17	16	18	16
t7	12	16	9	11	9	14	19	14	15	19
t8	14	17	13	13	11	18	18	19	17	20

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА ВМКМ-2-07
РАЗЫГРЫВАНИЕ ЗНАЧЕНИЙ ДИСКРЕТНЫХ И НЕПРЕРЫВНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН В СРЕДЕ MATHCAD

Цель работы: изучение и программная реализация методов разыгрывания дискретных и непрерывных случайных величин в среде Mathcad.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ИЗУЧЕНИЯ ПО КОНСПЕКТУ ЛЕКЦИЙ:

1. Дискретные случайные величины и их характеристики.
2. Разыгрывание значений дискретных случайных величин методом интервалов.
3. Разыгрывание полной группы случайных событий.
4. Непрерывные случайные величины и их характеристики.
5. Разыгрывание значений непрерывных случайных величин методом обратной функции.

1. Функция – генератор случайных чисел в Mathcad

Функция ***rnd(x)*** генерирует одно случайное число, равномерно распределенное в интервале [0;x]. Следовательно, получение одного значения стандартной (базовой) случайной величины, равномерной на участке [0;1], выполняется по команде *r:=rnd(1)*, а в программном блоке *r←rnd(1)*.

2. Разыгрывание значений дискретных случайных величин

Дискретная СВ определяется таблицей вероятностей

X1	X2	X3	. . .	XN
P1	P2	P3	. . .	PN

Сумма всех вероятностей $\sum_{i}^{N} P_i = 1$.

Перед разыгрыванием значений дискретной СВ необходимо вычислить массив последовательных сумм вероятностей

$S_1=P_1$; $S_2=P_1+P_2$; $S_3=P_1+P_2+P_3$; . . . $S_N=P_1+P_2+...++P_N$;

Разыгрывание одного значения выполняется вызовом случайного числа r от ГСЧ. Если $S_{k-1} \le r \le S_k$, то $X=X_k$.

Например:

ORIGIN:= 1

$$X := \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \\ 40 \end{pmatrix} \qquad P := \begin{pmatrix} 0.27 \\ 0.18 \\ 0.24 \\ 0.31 \end{pmatrix} \qquad \sum_{i=1}^{\mathrm{last}(P)} P_i = 1$$

-контроль суммы вероятностей

$$\mathrm{Sum}(P) := \left| \begin{array}{l} S_1 \leftarrow P_1 \\ \text{for } i \in 2..\,\mathrm{last}(P) \\ \quad S_i \leftarrow S_{i-1} + P_i \\ S \end{array} \right.$$

-функция для вычисления вектора сумм вероятностей

$$S := \mathrm{Sum}(P) \qquad S = \begin{pmatrix} 0.27 \\ 0.45 \\ 0.69 \\ 1 \end{pmatrix}$$

-вызов функции

$$D(X,S) := \left| \begin{array}{l} r \leftarrow \mathrm{rnd}(1) \\ k \leftarrow 1 \\ \text{while } r > S_k \\ \quad k \leftarrow k + 1 \\ X_k \end{array} \right.$$

-функция для разыгрывания одного значения дискретной СВ

$$n := 1..7 \qquad V_n := D(X,S) \qquad V = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 30 \\ 20 \\ 40 \\ 10 \\ 40 \end{pmatrix}$$

- многократный вызов функции разыгрывания

3. Разыгрывание значений непрерывных случайных величин методом обратной функции

Если для непрерывной СВ задана функция вероятностей, то общий вид формулы разыгрывания

$x_i = F^{-1}(r_i)$.

Если задана функция плотности распределения вероятностей, то общий вид формулы разыгрывания

$$\int_{-\infty}^{x_i} f(x)dx = r_i$$

На основании общей формулы метода обратной функции необходимо выразить x_i через r_i и полученное выражение использовать для вычисления значений непрерывной случайной величины.

Например, для $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ соотношение имеет вид $\int_{-\infty}^{x_i} \lambda e^{-\lambda x}dx = r_i$, на основании чего получаем формулу для разыгрывания значений $x_i = -\frac{1}{\lambda}\ln(1 - r_i)$.

Пример 1. Для заданной плотности распределения непрерывной случайной величины

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ Cx^5, & 0 \le x \le 2 \\ 0, & x > 2 \end{cases}$$

выполнить:

а) найти константу C на основании условия нормировки, используя символьные вычисления в Mathcad;

б) получить формулу для разыгрывания значений случайной величины методом обратной функции, используя символьные вычисления в Mathcad.

Решение:

Границы области: $a := 0 \qquad b := 2$

Определение исходной функции: $fc(x,C) := C\cdot x^5$

Интеграл нормировки: $Norm(C) := \int_a^b fc(x,C)\,dx \rightarrow \frac{32\cdot C}{3}$

Плотность распределения с учетом C $f(x) := \frac{fc(x,C)}{Norm(C)} \rightarrow \frac{3\cdot x^5}{32}$

Соотношение метода обратной функции: $F(\xi) := \int_a^\xi f(x)\,dx \rightarrow \frac{\xi^6}{64}$

Вычисление корней уравнения:

$$F(\xi) = rnd(1) \text{ solve}, \xi \rightarrow \begin{bmatrix} 2\cdot rnd(1)^{\frac{1}{6}} \\ rnd(1)^{\frac{1}{6}}\cdot(1+\sqrt{3}\cdot i) \\ rnd(1)^{\frac{1}{6}}\cdot(-1+\sqrt{3}\cdot i) \\ -2\cdot rnd(1)^{\frac{1}{6}} \\ -rnd(1)^{\frac{1}{6}}\cdot(1+\sqrt{3}\cdot i) \\ -rnd(1)^{\frac{1}{6}}\cdot(-1+\sqrt{3}\cdot i) \end{bmatrix}$$

В качестве результата выбираем вещественный положительный корень, что дает формулу для разыгрывания значений непрерывной СВ, которые присваиваются элеметам вектора X

$ORIGIN := 1$

$k := 1..8$

$$X_k := 2 \cdot rnd(1)^{\frac{1}{6}} \qquad X = \begin{pmatrix} 1.752 \\ 1.503 \\ 1.828 \\ 1.728 \\ 1.835 \\ 1.845 \\ 1.502 \\ 1.778 \end{pmatrix}$$

4. Функции MathCAD вычисления частот значений случайной величины (построение гистограмм)

Для графического отображения распределения N значений непрерывной случайной величины $\{x_i\}$ используют разбиение диапазона всех возможных значений на небольшое число L<<N отрезков:

$$z_1 < z_2 < \cdots < z_L < z_{L+1}, \qquad z_1 \le \min\{x_i\};\ z_{L+1} \ge \max\{x_i\}$$

Тогда число значений x_i, попавших в интервал $[z_k,\ z_{k+1}]$, $k = 1,\ldots,L$, называется частотой n_k.

Очевидно, что

$$\sum_{k=1}^{L} n_k = N.$$

Величину

$$w_k = \frac{n_k}{N}$$

называют относительной частотой, для нее выполняется условие

$$\sum_{k=1}^{L} w_k = 1.$$

В качестве оценки плотности распределения вероятности непрерывной случайной величины X используют гистограмму относительных частот, т.е. систему прямоугольников, *k*-й из которых основанием имеет отрезок $z_{k+1} - z_k$, а высота p_k^* определяется по формуле

$$p_k^* = \frac{w_k}{z_{k+1} - z_k},\ k = 1,\ldots,L$$

и имеет место приближенное равенство значений относительной частоты и функции плотности вероятности для непрерывной случайной величины

$$p_k^* \cong p(x^*),$$

где x^* – некоторое число из интервала $[z_k,\ z_{k+1}]$. Поэтому при больших объёмах выборки и удачном выборе длин интервалов $[z_k,\ z_{k+1}]$ гистограмма является ступенчатой аппроксимацией плотности распределения $p(x)$.

Обычно интервалы берут равной длины $h = z_{k+1} - z_k$, и тогда узлы z_k определяются выражением:

$$z_k = \min\{x_i\} + h \cdot (k-1),\ k = 1,\ldots,L+1,\ \text{где}\quad h = \frac{\max\limits_i\{x_i\} - \min\limits_i\{x_i\}}{L}.$$

Значения w_k, p_k^* вычисляются по частотам n_k.

В Mathcad для определения n_k по выборке $\{x_i\}$ включена функция *histogram(Z,X).*

Параметры функции histogram(L,X):

- L - число интервалов на которое разбивается вся область значений.
- X – массив данных.

Результатом работы функций является матрица размером $L \times 2$, первый столбец содержит значения d_k (середины отрезков $[z_k, z_{k+1}]$, $k = 1,\ldots,L$, а второй столбец – значения n_k.

Значения d_k удобно использовать для дальнейшего графического отображения вычисленных величин n_k, w_k, p_k.

Пример 2. Для непрерывной СВ, рассмотренной в предыдущем примере, выполнить:

а) получить N=2000 значений непрерывной случайной величины, сохранив их в отдельном векторе;

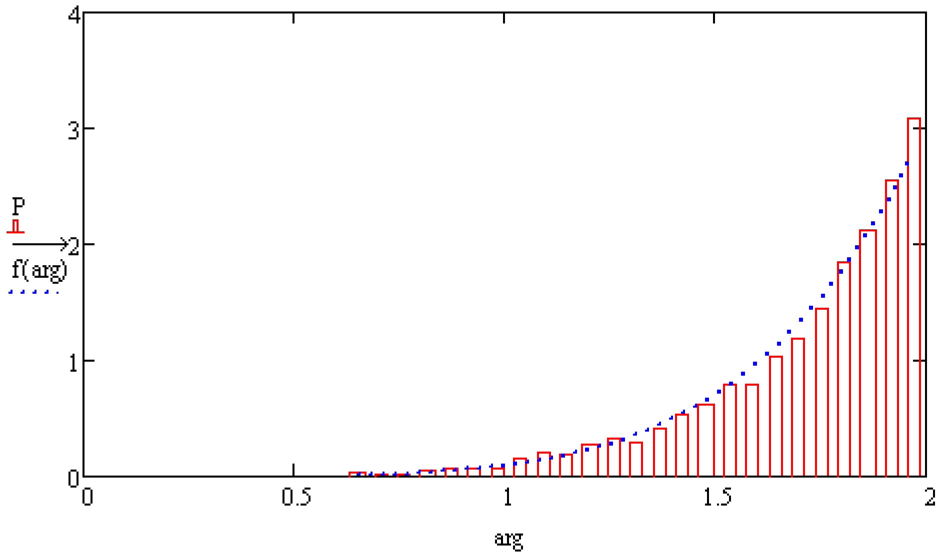
б) для разыгранных значений построить гистограмму относительных частот по 25 отрезкам и сравнить с графиком исходной функции плотности вероятности.

$ORIGIN := 1 \qquad N := 2000$

$k := 1..N \qquad X_k := 2\cdot rnd(1)^{\frac{1}{6}}$

$L := 25 \qquad H := histogram(L, X)$

$arg := H^{\langle 1\rangle} \qquad h := arg_2 - arg_1 \qquad P := \dfrac{H^{\langle 2\rangle}}{h\cdot N}$



Указание: в шаблоне графика указать пределы аргумента (a и b), в формате графика указать свойства отображения первой кривой «Трассировки» - «Тип» - «столбики», для второй кривой задать толщину линий 2.

СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЯ

ЗАДАЧА 1. Составить функцию – программный блок для разыгрывания N значений дискретной СВ с использованием встроенного ГСЧ. Элементы таблицы распределения вероятностей определить в документе как отдельные векторы. Вызывая программный блок, получить N=100 значений СВ и вывести их на экран (N - номер варианта). Подсчитать полное и относительное количество реализаций каждого значения и сопоставить его с теоретической вероятностью.

X	N+3	N+5	N+7	N+9
P	0,12+0,01N	0,18+0,01N	0,30-0,01N	0,40-0,01N

ЗАДАЧА 2. Для заданной функции плотности распределения f(x) непрерывной случайной величины X (см. Приложение) получить **аналитически** и записать в отчете:

а) найти константу C на основании условия нормировки, используя символьные вычисления в Mathcad;

б) получить формулу для разыгрывания значений случайной величины методом обратной функции, используя символьные вычисления в Mathcad.

в) получить N=1000 значений непрерывной случайной величины, сохранив их в отдельном векторе;

г) для разыгранных значений построить гистограмму относительных частот и сравнить с графиком исходной функции плотности вероятности.

Приложение. Функции плотности вероятности непрерывной СВ

ВАР-Т	ПЛОТНОСТЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СВ	ВАР-Т	ПЛОТНОСТЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СВ
1	$f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ Cx^2, & 0\le x\le 2\\ 0, & x>2\end{cases}$	**2**	$f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ C\sin x, & 0\le x\le \frac{\pi}{2}\\ 0, & x>\frac{\pi}{2}\end{cases}$
3	$f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ C(4x+5), & 0\le x\le 3\\ 0, & x>3\end{cases}$	**4**	$f(x)=\begin{cases}0, & x<1\\ C(3x-2), & 1\le x\le 2\\ 0, & x>2\end{cases}$
5	$f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ Cx^4, & 0\le x\le 3\\ 0, & x>3\end{cases}$	**6**	$f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ C(3x^2+3), & 0\le x\le 2\\ 0, & x>2\end{cases}$
7	$f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ Cx^4, & 0\le x\le 4\\ 0, & x>4\end{cases}$	**8**	$f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ Cx^5, & 0\le x\le 6\\ 0, & x>6\end{cases}$
9	$f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ C(3x^2+1), & 0\le x\le 2\\ 0, & x>2\end{cases}$	**10**	$f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ C(2x+1), & 0\le x\le 2\\ 0, & x>2\end{cases}$
11	$f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ C\sin x, & 0\le x\le \pi\\ 0, & x>\pi\end{cases}$	**12**	$f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ C\cos x, & 0\le x\le \frac{\pi}{2}\\ 0, & x>\frac{\pi}{2}\end{cases}$

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА ВМКМ-2-08
ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ МЕТОДОМ МОНТЕ-КАРЛО В СРЕДЕ MATHCAD

Цель работы: изучение, программная реализация и практическое применение методов приближенного вычисления определенных интегралов методом Монте-Карло.

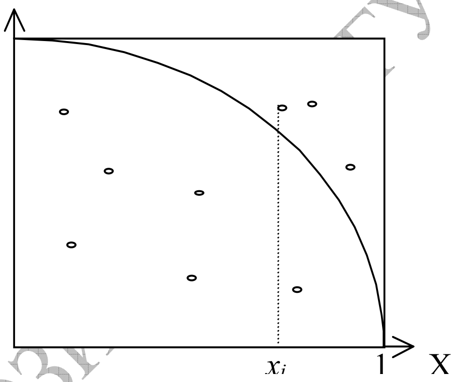
ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ ПО КОНСПЕКТУ ЛЕКЦИЙ

1. Вычисление площади сложной фигуры методом Монте-Карло.
2. Оценка значения определенного интеграла на основе геометрической аналогии.
3. Оценка значения определенного интеграла на основе теоремы о среднем значении функции.
4. Вычисление двумерных интегралов методом Монте-Карло.

СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЯ

ЗАДАЧА 1. Вычислить число π статистическим методом, используя датчик псевдослучайных чисел. Результаты вывести в формате 5 цифр дробной части**.**

Указание. Использовать тот факт, что точки, координаты которых вычисляются на основании равномерно распределенных на [0;1] случайных чисел (БСВ) $x_i = r_{1i}; \quad y_i = r_{2i}$, равномерно заполняют всю область единичного квадрата.



Рассмотрим в единичном квадрате четверть круга (сектор с углом π/4), имеющего радиус R=1. При равномерном распределении в квадрате N точек количество M точек, попавших внутрь сектора, пропорционально его площади S= π/4. На основании пропорции

$$\frac{M}{N} \approx \frac{S_{сектора}}{S_{квадрата}} = \frac{\pi/4}{1}$$

получаем $\pi \approx \dfrac{4.0 \cdot M}{N}$.

Для каждой из N точек необходимо разыграть координаты (x_i, y_i) и определить, попала ли точка внутрь круга. Использовать переменную M для подсчета числа попаданий.

Выполнить расчет для N=5000, 10000, 20000, выводя каждый раз на экран вычисленное значение π, а также его абсолютную и относительную погрешности.

Сделать вывод о точности полученных результатов.

ЗАДАЧА 2. Составить функцию – программный блок для вычисления приближенного значения определенного интеграла методом Монте-Карло, основанном на геометрической аналогии. Использовать встроенный датчик псевдослучайных чисел среды Mathcad (a, b - цифры варианта)

$$I = \int_1^4 \left[(a+2)x^2 + (2a+12-b)x + 1\right]dx,$$ где **a, b - цифры варианта**.

А) Получить аналитически точное значение интеграла средствами Mathcad.

Б) Вычислить приближенное значение интеграла методом Монте-Карло при N=100, 1000, 10000, 100000.

В) Для каждого численного результата рассчитать его абсолютную и относительную погрешность.

Г*) По результатам N=1000 испытаний оценить количество испытаний, требуемое для получения точности результата ε=0.01 при доверительной вероятности β=0.99.

Выполнить моделирование при полученном числе испытаний, получить абсолютную и относительную погрешности результата моделирования.

ЗАДАЧА 3. Выполнить те же действия с применением метода Монте-Карло, основанного на теореме о среднем значении функции.

ЗАДАЧА 4*. Составить функцию – программный блок для вычисления приближенного значения двумерного определенного интеграла методом Монте-Карло, основанном на использовании среднего значения подинтегральной функции

$$J = \int_0^2 dx \int_0^x \left[(a+3)x + (2a+b+3)y\right]dy,$$ где **a, b - цифры варианта**.

Получить аналитически точное значение интеграла.

Вычислить приближенное значение интеграла методом Монте-Карло при N=100, 1000, 10000, 100000.

Для каждого численного результата рассчитать его абсолютную и относительную погрешность.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА ВМКМ(и)-2016 - 09
РАСЧЕТ ХАРАКТЕРИСТИК СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ В СИСТЕМЕ MATHCAD

Цель работы: изучение и применение теоретических соотношений для расчета характеристик и исследования систем массового обслуживания

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ ПО КОНСПЕКТУ ЛЕКЦИЙ

1. Структура систем массового обслуживания.
2. Характеристики систем массового обслуживания.
3. Теоретический расчет простейших систем массового обслуживания.

1. Стандартные обозначения СМО

Для компактного описания систем массового обслуживания часто используются обозначения, предложенные Д. Кендаллом, в виде:

A/B/N/L ,

где A и B – задают законы распределений соответственно интервалов времени между моментами поступления заявок в систему и длительности обслуживания заявок в приборе; N – число обслуживающих приборов в системе (N = 1, 2,..,∞) ; L – число мест в накопителе, которое может принимать значения 0, 1, 2, … (отсутствие L означает, что накопитель имеет неограниченную ёмкость).

Для задания законов распределений A и B используются следующие обозначения:

G (General) – произвольное распределение общего вида;

M (Markovian) – экспоненциальное (показательное) распределение;

D (Deterministik) – детерминированное распределение;

U (Uniform) – равномерное распределение;

Ek (Erlangian) – распределение Эрланга k-го порядка (с k последовательными одинаковыми экспоненциальными фазами);

hk (hipoexponential) – гипоэкспоненциальное распределение k-го порядка (с k последовательными разными экспоненциальными фазами);

g (gamma) – гамма-распределение;

P (Pareto) – распределение Парето и т.д.

Примеры:

M/M/1 – одноканальная СМО с накопителем неограниченной ёмкости, в которую поступает однородный поток заявок с экспоненциальным распределением интервалов времени между последовательными заявками (простейший поток) и экспоненциальной длительностью обслуживания заявок в приборе.

M/G/3/10 – трёхканальная СМО с накопителем ограниченной ёмкости, равной 10, в которую поступает однородный поток заявок с экспоненциальным распределением интервалов времени между последовательными заявками (простейший поток) и длительностью обслуживания заявок, распределённой по закону общего вида.

D/E2/7/0 – семиканальная СМО без накопителя (ёмкость накопителя равна 0), в которую поступает однородный поток заявок с детерминированными интервалами времени между последовательными заявками (детерминированный поток) и длительностью обслуживания заявок в приборе, распределённой по закону Эрланга 2-го порядка.

Для обозначения более сложных СМО дополнительно могут использоваться обозначения, описывающие неоднородный поток заявок и приоритеты между заявками разных классов.

2. Теоретические соотношения для N-канальной СМО с отказами

Термин «СМО с отказами» означает, что в случае занятости всех N каналов обслуживания очередная заявка исключается из системы и не выполняется.

Исходные параметры системы: λ - интенсивность поступления требований, μ - интенсивность обслуживания, причем $\mu = \dfrac{1}{\bar{t}_{обсл}}$, где $\bar{t}_{обсл}$ - среднее время обслуживания одной заявки, $\rho = \lambda / \mu$ - коэффициент загрузки СМО.

Состояния такой системы и их вероятности обозначают:

S_0 – система свободна (с вероятностью P_0);
S_1 – в системе занят один канал (с вероятностью P_1);
S_2 – в системе заняты два канала (с вероятностью P_2);
. . . . .
S_N – в системе заняты все каналы (с вероятностью P_N);

Вероятность любого из состояний системы (в установившемся режиме) можно вычислить по формуле Эрланга:

$$P_k = \frac{\rho^k}{k!} \cdot \frac{1}{\sum_{s=0}^{N} \frac{\rho^s}{s!}}$$

В частном случае N=1 получаем вероятности состояний:

$$P_0 = \frac{1}{1+\rho} = \frac{\mu}{\mu+\lambda}; \qquad P_1 = \frac{\rho}{1+\rho} = \frac{\lambda}{\mu+\lambda}.$$

В частном случае N=2 получаем вероятности состояний:

$$P_0 = \frac{1}{1+\rho+\frac{\rho^2}{2!}}; \quad P_1 = \frac{\rho}{1+\rho+\frac{\rho^2}{2!}}; \quad P_2 = \frac{\rho^2}{2!}\frac{1}{1+\rho+\frac{\rho^2}{2!}}.$$

К основным характеристикам качества обслуживания N-канальной СМО с отказами относятся:

– вероятность отказа $P_{отк}$

$$P_{отк} = P_N = \frac{\rho^N}{N!} \cdot \frac{1}{\sum_{s=0}^{N} \frac{\rho^s}{s!}}$$

– среднее число занятых каналов обслуживания $M_{зан}$

$$M_{зан} = \rho(1 - P_N)$$

– среднее число свободных каналов обслуживания $M_{св}$

$$M_{св} = N - M_{зан}$$

В системах с отказами события отказа и обслуживания составляют полную группу событий, отсюда

$$P_{отк} + P_{обс} = 1$$

На основании приведенного выше выражения относительная пропускная способность (средняя доля заявок, обслуживаемых системой) определяется по формуле

$$q = P_{обс} = 1 - P_{отк} = 1 - P_N$$

Абсолютная пропускная способность СМО с отказами (среднее число заявок, обслуживаемых системой в единицу времени) равняется

$$A = \lambda q$$

Коэффициент занятости узлов обслуживания определяется отношением среднего числа занятых каналов к общему числу каналов:

$$K_{зан} = \frac{M_{зан}}{N}.$$

3. Пример расчете основных характеристик N-канальной СМО с отказами

ORIGIN := 1

Исходные параметры системы:

$N := 7 \qquad \lambda := 8 \qquad \mu := 5$

$\rho := \frac{\lambda}{\mu} \qquad \rho = 1.6$

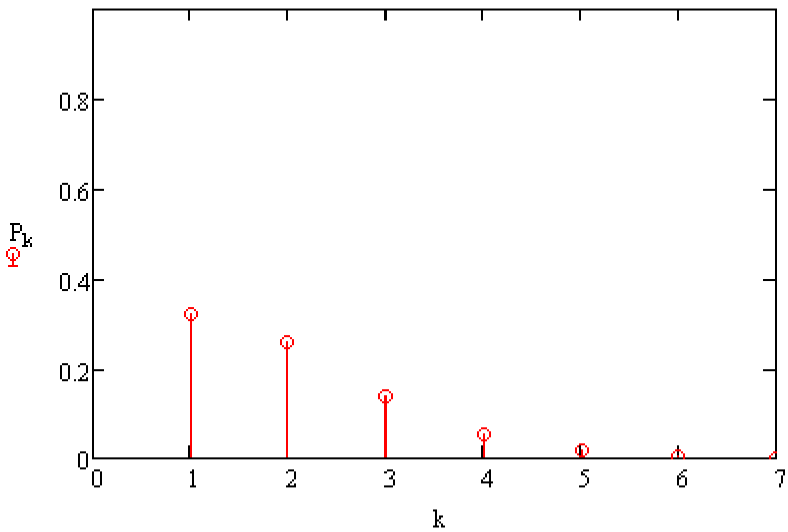
Расчет вероятностей различных состояний системы по формуле Эрланга:

$$PS(N,k,\rho) := \frac{\rho^k}{k!} \cdot \frac{1}{\sum_{s=0}^{N} \frac{\rho^s}{s!}}$$

$k := 1..N$

$$P_k := PS(N,k,\rho) \qquad P = \begin{pmatrix} 0.323 \\ 0.258 \\ 0.138 \\ 0.055 \\ 0.018 \\ 4.706 \times 10^{-3} \\ 1.076 \times 10^{-3} \end{pmatrix}$$

Графическое отображение вероятностей:



Расчет основных характеристик N-канальной СМо с отказами:

- вероятность отказа $Potk := PS(N, N, \rho) = 1.076 \times 10^{-3}$

- среднее число занятых каналов обслуживания $Mzan := \rho\cdot(1 - PS(N, N, \rho)) = 1.598$

- среднее число свободных каналов обслуживания $Msv := N - Mzan = 5.402$

- относительная пропускная способность $q := 1 - PS(N, N, \rho) = 0.999$

- абсолютная пропускная способность $A := \lambda\cdot q = 7.991$

- коэффициент занятости узлов $Kzan := \frac{Mzan}{N} = 0.228$

СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЯ

ЗАДАЧА 1. На вход N-канальной СМО с отказами поступает простейший поток требований с интенсивностью $\lambda = \frac{10}{N}\cdot\frac{1}{m}$. Выполнение требований производится с интенсивностью $\mu = \frac{5}{N}\cdot\frac{1}{m}$,

m - **номер варианта**.

Число каналов обслуживания:

m	1,7	2,8	3,9	4,10	5,11	6,12
N	5	6	8	9	10	11

1) Построить таблицу значений и график распределения P_k для системы
2) Вычислить характеристики системы:

Список использованных источников

1. Авсиевич, А.В. Методические указания к выполнению лабораторного практикума по дисциплине «Теория массового обслуживания» / А.В. Авсиевич – Самара: СамГАПС, 2004. – 23 с.

2. Алексеев, Г.В. Численное экономико-математическое моделирование и оптимизация: учебное пособие / Алексеев Г.В., Холявин И.И. – Гатчина: ГИЭФПТ, 2011. – 209 с.

3. Воскобойников Ю.Е., Очков В.Ф. Программирование и решение задач в пакете MathCAD: Учеб. пособие. – Новосибирск: НГАСУ, 2002. – 136 с.

4. Голик, Е.С. Математические методы системного анализа и теории принятия решений. Часть 2 / Е.С. Голик – СПб: Изд-во Северо-Западного заочного политехнического института, 2010. – 101 с.

5. Горбацевич, В.В. Современное линейное программирование / В.В. Горбацевич. – М.: Изд-во МАТИ, 1999. – 34 с.

6. Дьяконов, В.П. Новые информационные технологии. Часть 3. Основы математики и математическое моделирование / В. П. Дьяконов, И. В. Абраменкова, А. А. Пеньков. – Смоленск: СГПУ, 2003. – 192 с.

7. Методы условной оптимизации: Рек. к выполнению лаб. и практ. работ / Сост.: С.А. Шипилов: НФИ КемГУ.- 2-е изд. перераб. – Новокузнецк. 2002.- 48 с.

8. Пантелеев А. В., Летова Т. А. Методы оптимизации в примерах и задачах. – М.: Высш. шк., 2002.

9. Харитонова, Е. В. Графы и сети : учебное пособие / Е. В. Харитонова. – Ульяновск: УлГТУ, 2006. – 92 с.