Известия Гомельского государственного университета имени
Ф.Скорины. — 1999. — №1(15) Вопросы алгебры. — С. 37–40

УДК 512.542

С. Ф. Каморников, Ю. В. Кравченко

ФУНКТОРЫ ГАШЮЦА

Рассматриваются только конечные разрешимые группы. Используются определения и обозначения, принятые в [1, 2]. Напомним некоторые из них.

Пусть $\mathfrak{X}$ — непустой класс групп. Подгруппа H группы G называется $\mathfrak{X}$-проектором (или $\mathfrak{X}$-покрывающей подгруппой в терминологии работы [2]), если выполняются следующие условия:

1) $H \in \mathfrak{X}$;

2) из $H \subseteq U \subseteq G, U_0 \lhd U$ и $U/U_0 \in \mathfrak{X}$ всегда следует $HU_0 = U$.

В работе [3] Гашюц показал, что в любой группе существует единственный класс сопряжённых $\mathfrak{X}$-проекторов, если $\mathfrak{X}$ — непустая насыщенная формация. В [4] аналогичное утверждение доказано для классов Шунка. Напомним, что классом Шунка называется примитивно замкнутый гомоморф, т.е. класс групп $\mathfrak{X}$, обладающий свойствами:

1) каждая факторгруппа любой группы из $\mathfrak{X}$ также принадлежит $\mathfrak{X}$;

2) из того, что $G/M_G \in \mathfrak{X}$ для любой максимальной подгруппы M из G, следует всегда $G \in \mathfrak{X}$.

Выше через M_G обозначается ядро подгруппы M в группе G, т.е. наибольшая нормальная подгруппа группы G, содержащаяся в M.

В работе [5] Гашюц показал, что классами Шунка исчерпываются все проективные классы, т.е. классы $\mathfrak{X}$, относительно которых в любой группе существуют $\mathfrak{X}$-проекторы. В связи с этим результатом возникает вопрос: существуют ли в группах другие классы сопряжённых подгрупп, свойства которых сохраняются при гомоморфизмах и в содержащих их подгруппах групп. Отрицательный ответ на этот вопрос даётся в настоящей работе. При этом мы используем функциональный подход, основы которого заложены в работе [6].

Пусть A, B — группы, $\phi : A \to B$ — эпиморфизм. Пусть Ω — некоторая система подгрупп из A. В дальнейшем через Ω^ϕ обозначается множество $\{H^\phi \mid H \in \Omega\}$. Пусть Θ — отображение, которое ставит в соответствие каждой группе G некоторую непустую систему $\Theta(G)$ её подгрупп. Говорят [7], что Θ — подгрупповой функтор, если выполняется следующее условие абстрактности:

$$(\Theta(G))^\phi = \Theta(G^\phi)$$

для любого изоморфизма ϕ каждой группы G.

Будем говорить, что Θ — проективный подгрупповой функтор, если:

1) $\Theta(G)$ — класс сопряжённых подгрупп группы G;

2) $(\Theta(G))^\phi \subseteq \Theta(G^\phi)$ для любого эпиморфизма ϕ группы G;
3) если $H \in \Theta(G)$ и $H \subseteq U \subseteq G$, то $H \in \Theta(U)$.

Замечание. *1) В [6] Барнсом и Кегелем введено понятие так называемого включающего функтора, которое по сути совпадает с понятием проективного подгруппового функтора.*

2) Примером проективного подгруппового функтора является функтор, выделяющий в каждой группе множество всех её $\mathfrak{X}$-проекторов, где $\mathfrak{X}$ — класс Шунка. В [6] такие функторы называются функторами Гашюца.

Следуя [6], назовём собственным классом проективного подгруппового функтора Θ класс групп
$$\{G \mid \Theta(G) = \{G\}\}.$$

Барнс и Кегель изучили (см. [6]) ряд свойств собственного класса проективного подгруппового функтора. В частности, они показали, что такой класс замкнут относительно фраттиниевых расширений и конечных прямых произведений. Другие свойства собственного класса исследуются в данной работе.

Теорема 1. *Пусть Θ — проективный подгрупповой функтор. Тогда собственный класс функтора Θ является классом Шунка.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{X} = \{G \mid \Theta(G) = \{G\}\}$ — собственный класс проективного подгруппового функтора Θ. Тот факт, что $\mathfrak{X}$ — класс групп, следует из отмеченного выше условия абстрактности.

Пусть группа G принадлежит классу $\mathfrak{X}$. Это означает, что $\Theta(G) = \{G\}$. Тогда ввиду условия 2) определения проективного подгруппового функтора следует, что
$$GN/N = G/N \in \Theta(G/N)$$
для любой нормальной подгруппы N группы G. Так как $\Theta(G/N)$ — класс сопряжённых подгрупп, то $\Theta(G/N) = \{G/N\}$. Значит, $G/N \in \mathfrak{X}$ и класс $\mathfrak{X}$ является гомоморфом.

Пусть теперь $G/M_G \in \mathfrak{X}$ для любой максимальной подгруппы M группы G. Предположим, что $\Theta(G) \neq \{G\}$. Тогда в G найдётся собственная подгруппа R, принадлежащая $\Theta(G)$. Заключим R в некоторую максимальную подгруппу H группы G. Так как Θ — проективный подгрупповой функтор, то $RH_G/H_G \in \Theta(G/H_G)$. Отсюда и из равенства $\Theta(G/H_G) = \{G/H_G\}$ следует, что $RH_G/H_G = G/H_G$, а значит, $RH_G = G$. Но это невозможно, так как $RH_G \subseteq H$. Пришли к противоречию. Следовательно, $\Theta(G) = \{G\}$ и $G \in \mathfrak{X}$. Таким образом, класс $\mathfrak{X}$ является классом Шунка. Теорема доказана.

Замечание. *Так как классы Шунка замкнуты относительно фраттиниевых расширений, а разрешимые классы Шунка замкнуты относительно конечных прямых произведений, то теорема 1 включает соответствующие результаты работы [6].*

Теорема 2. *Пусть Θ — проективный подгрупповой функтор и $\mathfrak{X}$ — собственный класс функтора Θ. Тогда для любой группы G каждая подгруппа H из $\Theta(G)$ является $\mathfrak{X}$-проектором группы G.*

Доказательство. Ввиду условия 3) определения проективного подгруппового функтора следует, что $H \in \Theta(H)$. Так как все подгруппы из $\Theta(H)$ сопряжены, то $\Theta(H) = \{H\}$, а значит, $H \in \mathfrak{X}$.

Пусть теперь $H \subseteq U \subseteq G, U_0 \triangleleft U$ и $U/U_0 \in \mathfrak{X}$. Тогда из $H \subseteq U$ и $H \in \Theta(G)$ следует, что $H \in \Theta(U)$. Так как $U/U_0 \in \mathfrak{X}$, то $\Theta(U/U_0) = \{U/U_0\}$. Теперь из условия 2) определения проективного подгруппового функтора заключаем, что $HU_0/U_0 \in \Theta(U/U_0)$, а значит, $HU_0/U_0 = U/U_0$. Таким образом, H — $\mathfrak{X}$-проектор группы G. Теорема доказана.

Следствие. *Множество всех проективных подгрупповых функторов совпадает с множеством всех функторов Гашюца.*

Summary

S.F.Kamornikov and Yu.V. Kravchenko. Gaschütz functors // Proc. Gomel State Univ. — 1999. — №1(15). Problems in Algebra. — P. 37–40

The notion of projective subgroup functor has been introduced and the connection of these functors and Gaschütz functors has been studied

Литература

1. *Шеметков Л.А.* Формации конечных групп. М.: Наука, 1978.

2. *Doerk K., Hawkes T.* Finite soluble groups. Berlin-New York: Walter de Gruyter, 1992.

3. *Gaschütz W.* Zur Theorie der endlichen auflosbaren Gruppen // Math. Z. 1963. Bd.80, № 4. S. 300–305.

4. *Schunck H.* $\mathfrak{H}$-Untergruppen in endlichen auflosbaren Gruppen // Math. Z. 1967. Bd. 97, № 4. S. 326–330.

5. *Gaschütz W.* Selected topics in the theory of soluble groups // Canberra: Lectures given at the 9th Summer Research Institute of the Austral. Math. Soc., 1969.

6. *Barnes D.W., Kegel O.H.* Gaschütz functors on finite soluble groups // Math. Z. 1966. Bd.94, № 2. S. 134–142.

7. *Плоткин Б.И.* Радикалы в группах, операции на классах групп и радикальные классы // Сборник, посвящённый памяти А.И.Мальцева. Новосибирск: Наука, 1973. С. 205–244.

Гомельский государственный
университет им. Ф.Скорины

Поступило 14.01.99