Известия Гомельского государственного университета имени
Ф.Скорины. — 1999. — №1(15) Вопросы алгебры. — С. 41–46

УДК 512.542

В. С. Монахов

ПРОИЗВЕДЕНИЕ СВЕРХРАЗРЕШИМЫХ ГРУПП ШМИДТА

Рассматриваются только конечные группы. Все определения и обозначения стандартны, их можно найти в [1,2]. Группой Шмидта называют конечную ненильпотентную группу, все собственные подгруппы которой нильпотентны. Вопросы, связанные с существованием подгрупп Шмидта и с факторизацией группы подгруппами Шмидта, исследовались в [3–4]. В настоящей заметке доказывается следующая

Теорема. *Если группа $G = AB$, где A — сверхразрешимая подгруппа Шмидта, а B — либо сверхразрешимая подгруппа Шмидта, либо циклическая подгруппа, то $n(G) \leqslant 3$ и G''' — абелева 2-группа.*

Здесь $n(G)$ — нильпотентная длины группы G, а G''' — третий коммутант группы G. Для компактности изложения материала назовем $S_{\langle p,q\rangle}$–группой группу Шмидта с нормальной силовской p-подгруппой и ненормальной циклической силовской q-подгруппой. Запись $G = AB$ означает, что группа G является произведением своих подгрупп A и B, а $[A]B$ — полупрямое произведение нормальной подгруппы A и подгруппы B. Через $l_p(G)$ и $d(G)$ обозначается p-длина и производная длины группы G. Из свойств групп Шмидта (см. [1], §26.) непосредственно вытекают следующие две леммы.

Лемма 1. *Факторгруппа $S_{\langle p,q\rangle}$–группы либо $S_{\langle p,q\rangle}$–группа, либо циклическая q-группа.*

Лемма 2. *Тогда и только тогда $S_{\langle p,q\rangle}$–группа сверхразрешима, когда силовская p–подгруппа имеет простой порядок и q делит $p-1$. В частности, группа Шмидта четного порядка сверхразрешима тогда и только тогда, когда она 2-нильпотентна.*

Лемма 3. (Теоремы VI.10.1,VI.4.4 [2]) *Если $G = AB$, подгруппы A и B циклические, то G сверхразрешима и $d(G) \leqslant 2$.*

Лемма 4. (Теорема III.11.5 [2]) *Если $G = AB$ — p-группа, A и B — циклические подгруппы и $p > 2$, то G метациклическая.*

Отметим, что существует группа порядка 16, которая является произведением двух циклических подгрупп, но не является метациклической.

Лемма 5. *Если G — p-разрешимая группа с метациклической силовской p-подгруппой и $p > 2$, то $l_p(G) \leq 1$.*

Доказательство. По индукции подгруппа Фраттини единична и в группе нет неединичных нормальных p'-подгрупп. Кроме того, в группе G единственная минимальная нормальная подгруппа. Поэтому, $P = O_p(G)$ — элементарная абелева p-подгруппа, совпадающая со своим централизатором и имеющая в G дополнение. Поскольку силовская p-подгруппа в группе G метациклическая, то порядок P равен p или p^2. Если $|P| = p$, то G/P — циклическая группа порядка, делящего $p-1$, и P силовская в G. Если $|P| = p^2$, то $G/P \simeq GL(2,p)$ и порядок силовской p–подгруппы группы G делит p^3. Теперь по лемме 1 [5] подгруппа P опять силовская в G. Лемма доказана.

Следующая лемма содержится в [6], приведем её доказательство.

Лемма 6. *Пусть G — 2-группа, являющаяся произведением двух своих циклических подгрупп. Тогда любая нормальная подгруппа, имеющая в G дополнение, порождается одним или двумя элементами.*

Доказательство индукцией по порядку группы. Пусть $G = AB$ — бициклическая 2-группа, являющаяся произведением двух своих циклических подгрупп A и B, и пусть N — нормальная подгруппа, имеющая дополнение K в группе G. Если подгруппа Фраттини $\Phi(N)$ отлична от единичной подгруппы, то по индукции $|N/\Phi(N)| = 2$ или 4 и по теореме Бернсайда о базисе подгруппа N порождается одним или двумя элементами. Пусть $\Phi(N) = 1$. Тогда N — элементарная абелева группа, а так как N нормальна в G, то пересечение $N \cap Z(G)$ с центром отлично от 1. Для подгруппы T порядка 2 из этого пересечения по индукции $|N/T| \leqslant 4$, поэтому можно считать, что $|N| = 8$. Пусть $C = C_G(N)$. Тогда C нормальна в G и если $L = C \cap K \neq 1$, то по индукции подгруппа $NL/L \simeq N$ имеет порядок 2 или 4. Поэтому следует считать, что $N = C$. Теперь G/N изоморфна подгруппе группы автоморфизмов группы N, которая изоморфна $GL(3,2)$, и K изоморфна подгруппе группы диэдра порядка 8, в частности, экспонента K делит 4. Если ab^{-1} — произвольный элемент группы $G, n \in N, k \in K$, то $(nk^{-1})^4 = (nk^{-1}nk^{-1})(nk)^2 = nn^k n^{k^2} n^{k^3} = n^{(1+k)^3} = 1$, т.е. группа G имеет экспоненту 4. Поэтому $|G| = 16, |A| = |B| = 4, A \cap B = 1$. Теперь центр $Z = Z(G)$ — нециклическая подгруппа порядка 4 по теореме VI.10.1 [2]. Группа G имеет разложение в смежные классы по центру: $G = Z \cup nZ \cup kZ \cup nkZ$, где $n \in N \setminus Z, \langle k \rangle = K$. В Z, nZ, kZ все элементы имеют порядок 2, поэтому образующие элементы a и b подгрупп A и B содержатся в смежном классе nkZ. Но если $a = nkz_1, b = nkz_2$, то $a^2 = (nk)^2 = b^2$ и $A \cap B \neq 1$, противоречие. Лемма доказана.

Лемма 7. *Если в разрешимой группе G силовская 2-подгруппа является произведением двух циклических подгрупп, то $G/O_{2',2}(G)$ либо имеет нечетный порядок, либо изоморфна S_3. В частности, $l_2(G) \leqslant 2$.*

Доказательство. По индукции можно считать, что подгруппа Фиттинга F является 2-группой. Пусть Φ — подгруппа Фраттини группы G. Так как по теореме III.4.5 [2] факторгруппа $F^* = F/\Phi$ является подгруппой Фиттинга группы $G^* = G/\Phi$ и F^* — прямое произведение минимальных нормальных подгрупп группы G^*, то $F^* = C_{G^*}(F^*)$ и F^* дополняема в группе G^* по лемме III.4.4 [2]. По лемме 6 порядок подгруппы F^* равен 2 или 4. Если $|F^*| = 2$, то $F^* = G^*$ и G — 2-группа. Если $|F^*| = 4$, то $G/F \simeq G^*/F^*$ изоморфна подгруппе группы $GL(2,2) \simeq S_3$ и либо $|G/F|$ нечетен, либо $G/F \simeq S_3$. Лемма доказана.

Лемма 8. *Если группа $G = AB$ имеет нечетный порядок и все силовские подгруппы в A и B циклические, то G сверхразрешима и $d(G) \leqslant 3$.*

Доказательство. По теореме 1 [7] группа G сверхразрешима. Поэтому коммутант G' нильпотентен. Так как по лемме 4 в группе G все силовские подгруппы метациклические, то $d(G') \leqslant 2$ и $d(G) \leqslant 3$.

Лемма 9. *Класс всех групп, у которых третий коммутант является абелевой 2-группой, образует формацию.*

Доказательство. Рассматриваемый класс групп замкнут относительно гомоморфных образов, подгрупп и прямых произведений. Поэтому этот класс будет формацией.

Доказательство теоремы проведем индукцией по порядку группы G. Заметим, что все силовские подгруппы в A и B циклические. Если порядок группы нечетен, то $G''' = 1$ по лемме 8. Пусть порядок группы четен и $A = [P]Q$ — сверхразрешимая подгруппа Шмидта, где $|P| = p$, Q — циклическая силовская q-подгруппа и q делит $p - 1$. Если силовская 2-подгруппа в G циклическая, то G 2-нильпотентна. Если силовская 2-подгруппа группы G не циклическая, то A и B — группы четного порядка с циклическими подгруппами индекса $\leqslant 2$ и G разрешима по теореме 1 [5]. Итак, в любом случае группа G разрешима.

Пусть F — подгруппа Фиттинга группы G. Если F циклическая, то $G/C_G(F)$ как группа автоморфизмов циклической группы будет абелевой и $G'' = 1$. Пусть в дальнейшем подгруппа F не циклическая. По лемме 9 в группе G единственная минимальная нормальная подгруппа, поэтому F — либо p-группа, либо q-группа.

Пусть F — p-группа. Так как $p > 2$ и $l_p(G) \leqslant 1$ по лемме 5, то F — силовская p-подгруппа группы G и $P \leqslant F$. Кроме того, $F = [P_2]P$, где P_2 — силовская p-подгруппа из B и $P_2 = F \cap B$ нормальна в B. Если B — группа Шмидта, то $|P_2| = p$ и G/F — произведение двух циклических групп в любом из рассматриваемых в теореме случаях. По лемме 3 второй коммутант $G'' \leqslant F$. Если F абелева, то $G''' = 1$ и теорема справедлива. Пусть F неабелева. Тогда подгруппа B циклическая, $F = [P_2]P \simeq M_n(p)$ по теореме 5.4.4 [8] и $F' \leqslant P_2$. Пусть $\langle x\rangle$ — нормальная подгруппа группы G простого порядка из F'. По индукции $(G/\langle x\rangle)''' = G'''\langle x\rangle/\langle x\rangle$ — абелева 2-группа, поэтому $G''' \leqslant \langle x\rangle$. Если $C = C_G(\langle x\rangle) \neq G$, то $C = (A \cap C)B$ — произведение двух циклических групп и $C'' = 1$. Так как G/C — циклическая q-группа, то $G''' = 1$. Пусть $x \in Z(G)$. Тогда по теореме 5.4.3 [8] подгруппа $\Omega_1(F) = P \times \langle x\rangle$, а так как $\Omega_1(F)$ нормальна в G и $(G/\Omega_1(F))'' = G''\Omega_1(F)/\Omega_1(F) = 1$, то $G'' \leqslant (\Omega_1(F))' = 1$. Итак, в случае F — p-группа, всегда $G''' = 1$.

Рассмотрим теперь второй случай — случай, когда F — q-группа. Если $q > 2$, то $l_q(G) \leqslant 1$ по лемме 5 и F — силовская подгруппа группы G. Теперь подгруппа $Q = A \cap F$ нормальна в A, противоречие. Поэтому $q = 2$ и $G/F \simeq S_3$ по лемме 7, т.е. $|A| = 2^a 3, G'' \leqslant F$ и $n(G) \leqslant 3$. Так как силовская 2-подгруппа в G является произведением двух циклических подгрупп, то $F'' = 1$ и G''' — абелева 2-группа. Теорема доказана.

Следствие 1. *Если в условии теоремы один из факторов имеет нечетный порядок, то G дисперсивна и $G''' = 1$.*

Доказательство. Поскольку силовская 2-подгруппа в группе циклическая, то группа G 2-нильпотентна, а так как $2'$-холловская подгруппа группы G сверхразрешима по лемме 8, то группа G дисперсивна. Для оценки производной длины воспользуемся индукцией по порядку группы G. По индукции подгруппа Фиттинга F — нециклическая p-подгруппа в обозначениях доказательства теоремы и для группы возможен только первый случай из этого доказательства. Но в этом случае всегда $G''' = 1$. Следствие доказано.

Следствие 2. *Если группа $G = AB$, где A — сверхразрешимая подгруппа Шмидта, а B циклическая нечетного порядка, то G сверхразрешима.*

Доказательство проведем индукцией. Достаточно найти в группе G нормальную подгруппу простого порядка. Пусть $A = [P]Q$ — сверхразрешимая

$S_{\langle p,q\rangle}$-подгруппа. Если $q \neq 2$, то G сверхразрешима по лемме 8. Пусть $q = 2$. Если p не делит порядок B, то G сверхразрешима как группа, в которой все силовские подгруппы циклические (теорема IV.2.11 [2]). Поэтому $B = P_2 \times H$, где P_2 — силовская p-подгруппа из B, а H — p'-подгруппа в B. По следствию 1 группа G дисперсивна, поэтому по индукции подгруппа Фиттинга $F = P \times P_2$ — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G, её порядок равен p^2 и F силовская в G. Произведение $M = QH$ по теореме T.VI.4.6 [2] можно считать p'-холловской подгруппой группы G. Теперь $N_G(H) \geq \langle Q, B\rangle$. Если $H = 1$, то P нормальна в G. Пусть $H \neq 1$. Тогда $N_G(H) = QB$ и $P_2 = F \cap N_G(H)$ нормальна в G. Следствие доказано.

Следствие 3. *Если группа $G = AB$, где A и B — сверхразрешимые подгруппы Шмидта, то $G''' = 1$.*

Доказательство проведем индукцией по порядку группы G. Пусть $A = [P]Q$ и $B = [R]S$ — сверхразрешимые группы Шмидта, $|P| = p, |R| = r, Q$ и S — циклические силовские подгруппы. Если порядок одного из факторов нечетен, то $G''' = 1$ по следствию 1. Пусть оба фактора имеют четный порядок. Тогда Q и S — 2-группы. По индукции подгруппа Фиттинга F примарна.

Если F имеет нечетный порядок, то F — силовская подгруппа группы G и F либо циклическая, либо элементарная абелева порядка p^2 и G/F — произведение двух циклических 2-групп. В любом случае $G'' \leqslant F$ и $G''' = 1$.

Если F — 2-группа, то $G/F \simeq S_3$ по лемме 4 и подгруппа $P = R$ — нормальна в G, противоречие.

Следующие примеры показывают, что оценки, полученные в теореме и её следствиях, являются точными.

Пример 1. Симметрическая группа S_4 степени 4 является произведением сверхразрешимой подгруппы Шмидта S_3 и циклической подгруппы $\langle(1234)\rangle$ порядка 4. Нильпотентная и производная длины группы S_4 равны 3.

Пример 2. Группа $G = GL(2,3)$ допускает факторизацию $G = AB$, где $A = \langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \rangle \simeq S_3, B = \langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \rangle$ — циклическая подгруппа порядка 8. Нильпотентная длина группы $GL(2,3)$ равна 3, а производная длина — 4.

Пример 3. Пусть p — простое нечетное число и C_p — циклическая группа порядка p. Эта группа обладает автоморфизмом α порядка 2. Зададим отображение $\varphi : S_4 \to \langle\alpha\rangle$ следующим образом: $\varphi(\tau) = \alpha$, если τ — нечетная перестановка и $\varphi(\tau) = 1$, если τ — четная перестановка. Тогда φ — гомоморфизм группы

S_4 на $\langle\alpha\rangle$, ядро которого совпадает с A_4. Рассмотрим полупрямое произведение $G = [C_p]S_4$ относительно гомоморфизма φ. Тогда $G = S_3([C_p]\langle(1234)\rangle)$ есть произведение двух сверхразрешимых подгрупп Шмидта четных порядков, причем G — недисперсивная группа с $n(G) = 3$ и $d(G) = 3$.

Summary

V.S.Monakhov. The product of supersoluble Schmidt groups // Proc. Gomel State Univ. — 1999. — №1(15) Problems in Algebra. — P. 41–46

It is considered a finite group $G = AB$ provided that A is a supersolvable minimal nonnilpotent group and either B is a cyclic group or B is a supersolvable minimal nonnilpotent group. It is proved that the nilpotent length of the group G at most 3 and G''' is an abelian 2-group.

Литература

1. *Шеметков Л.А.* Формации конечных групп. М.: Наука, 1978. – 267 с.
2. *Huppert B.* Endliche Gruppen I. Berlin, Heidelberg, New York, 1967. – 793 s.
3. *Монахов В.С.* Произведение двух групп Шмидта // Докл. АН БССР – 1975. – Т.19, №1. – С.8 – 11.
4. *Монахов В.С.* О подгруппах Шмидта конечных групп // Вопр. алгебры. – Выпуск 13, 1998. – С.153 – 171.
5. *Монахов В.С.* О произведении двух групп с циклическими подгруппами индекса 2 // Весцi АН Беларусi. – 1996, N3. – С.21-24.
6. *Maier R.* Uber die 2-nilpotentz faktorisierbarer endlicher gruppen// Arch. Math. – 1976. – T.27,N5. – S.480-483.
7. *Беркович Я.Г.* О разрешимых группах конечного порядка // Матем. сб. – 1967. – Т.74(116), N1. – С.75-92.
8. *Gorenstein D.* Finite Groups. New York, 1968. – 527 p.

Гомельский государственный
университет им. Ф.Скорины
e-mail: monakhov@gsu.unibel.by

Поступило 7.01.99