Известия Гомельского государственного университета имени
Ф.Скорины. — 1999. — №1(15) Вопросы алгебры. — С. 121–129

УДК 512.542

И. Н. Сафонова

О СУЩЕСТВОВАНИИ $\mathfrak{H}_\omega$-КРИТИЧЕСКИХ ФОРМАЦИЙ

Рассматриваются только конечные группы. Используемые определения и обозначения см. [1–3].

Проблема классификации формаций того или иного вида является одной из основных задач теории формаций. Как известно, существенную роль в реализации задачи классификации локальных формаций играют так называемые минимальные локальные не $\mathfrak{H}$-формации [4] (или иначе $\mathfrak{H}_l$-критические формации [5]), т.е. такие локальные формации $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$, у которых все собственные локальные подформации содержатся в классе групп $\mathfrak{H}$. Впервые особая роль минимальных локальных не $\mathfrak{H}$-формаций была отмечена Л.А.Шеметковым в его докладе на VI симпозиуме по теории групп [4]. Там же им была поставлена задача изучения такого рода формаций. Общие свойства $\mathfrak{H}_l$-критических формаций, а также описание таких формаций для целого ряда "классических"формаций получены в работах А.Н.Скибы (см., в частности [5–7]). Итоговый результат в этом направлении достигнут в работе [7], где получено описание минимальных локальных не $\mathfrak{H}$-формаций для случая, когда $\mathfrak{H}$ — произвольная формация классического типа (т.е. $\mathfrak{H}$ имеет такой локальный экран, все неабелевы значения которого локальны). Результаты о минимальных локальных не $\mathfrak{H}$-формациях широко использовались при решении различных вопросов теории локальных формаций (подробнее, см. [1,3]).

Стремительно развивающаяся в последние годы теория частично локальных формаций, наряду с разработкой новых специфических методов исследования, активно использует методы и конструкции развитые в теории локальных формаций. Одним из таких методов является метод критических формаций.

Вопросу классификации критических ω-локальных формаций посвящены работы [8–11]. Завершающий результат в этом направлении получен автором данной заметки в работе [11], где дано описание минимальных ω-локальных не $\mathfrak{H}$-формация, в случае когда $\mathfrak{H}$ — произвольная формация классического типа. Вопрос же о существовании критических ω-локальных формаций оставался открытым.

Нами доказана следующая

Теорема. *Пусть $\mathfrak{H}$ — формация классического типа, $\mathfrak{F}$ — непустая ω-локальная формация. Тогда если $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$, то в $\mathfrak{F}$ имеется по крайней мере одна минимальная ω-локальная не $\mathfrak{H}$-подформация.*

Напомним некоторые определения и обозначения используемые в работе. Пусть ω — произвольное непустое множество простых чисел. Непустая формация $\mathfrak{F}$ является ω-локальной, если ей принадлежит всякая группа G с $G/(O_\omega(G)\cap \Phi(G)) \in \mathfrak{F}$ [11]. Пусть $\mathfrak{H}$ — некоторый класс групп. ω-Локальная формация $\mathfrak{F}$ называется минимальной ω-локальной не $\mathfrak{H}$-формацией ($\mathfrak{H}_\omega$-критической формацией), если $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$, но все собственные ω-локальные подформации из $\mathfrak{F}$ содержатся в классе групп $\mathfrak{H}$. Следуя работе [13] символом $G_{\omega d}$ обозначается наибольшая нормальная в G подгруппа, у которой каждый композиционный фактор является ωd-группой (если таких подгрупп в G нет, то полагают $G_{\omega d} = 1$). Функцию вида $f : \omega\cup\{\omega'\} \longrightarrow \{\text{формации}\}$ называют ω-локальным спутником. Через $LF_\omega(f)$ обозначают класс всех таких групп G, что $G/G_{\omega d} \in f(\omega')$ и $G/F_p(G) \in f(p)$ для любого $p \in \omega \cap \pi(G)$. Если формация $\mathfrak{F}$ такова, что $\mathfrak{F} = LF_\omega(f)$, то говорят, что f — ω-локальный спутник формации $\mathfrak{F}$.

В дальнейшем через $A \wr B$ будем обозначать регулярное сплетение групп A и B.

Для доказательства основного результата нам понадобятся следующие известные факты.

Лемма 1 [13]. *Если $\mathfrak{F} = l^\omega \mathrm{form}\mathfrak{X}$ и f — минимальный ω-локальный спутник $\mathfrak{F}$, то:*

1) $f(p) = \mathrm{form}(G/F_p(G)|G \in \mathfrak{X})$ *для всех* $p \in \omega \cap \pi(\mathfrak{X})$;

2) $f(\omega') = \mathrm{form}(G/G_{\omega d}|G \in \mathfrak{X})$;

3) *если $\mathfrak{F} = LF_\omega(h)$, h — ω-локальный спутник, $p \in \omega$, то*

$$f(p) = \mathrm{form}(G|G \in h(p) \bigcap \mathfrak{F}, O_p(G) = 1).$$

Лемма 2. *Пусть $A \in \mathrm{form}\mathfrak{X}$. Тогда*

$$A/A_{\omega d} \in \mathrm{form}(B/B_{\omega d}|B \in \mathfrak{X}).$$

Лемма 3 [1]. *Пусть A — монолитическая группа с монолитом P. Тогда если $P \not\subseteq \Phi(A)$, то $\mathrm{form}(A/P)$ — единственная максимальная подформация формации $\mathrm{form}A$.*

Лемма 4 [13]. *Если $\mathfrak{F} = LF_\omega(f)$ и $G/O_p(G) \in \mathfrak{F}\cap f(p)$, для некоторого $p \in \omega$, то $G \in \mathfrak{F}$.*

Лемма 5. *Пусть $\mathfrak{F} = LF_\omega(f)$ и f — минимальный ω-локальный спутник формации $\mathfrak{F}$. Тогда если $\mathfrak{F} = LF_\omega(h)$, то*

$$f(\omega') = \mathrm{form}(G|G \in h(\omega') \cap \mathfrak{F} \text{ и } G_{\omega d} = 1).$$

Доказательство. Пусть t — такой ω-локальный спутник, что $t(p) = f(p)$ для любого $p \in \omega$ и $t(\omega') = \mathrm{form}(G|G \in h(\omega') \cap \mathfrak{F}$ и $G_{\omega d} = 1)$. Ввиду леммы 1 $f(\omega') = \mathrm{form}(G/G_{\omega d}|G \in \mathfrak{F})$. Поэтому $t(\omega') \subseteq f(\omega')$. Следовательно, $t \leqslant f$. С другой стороны, для любой группы $G \in \mathfrak{F}$ имеем $G/G_{\omega d} \in h(\omega')$. Кроме того, поскольку $(G/G_{\omega d})_{\omega d} = 1$, то $G/G_{\omega d} \in t(\omega')$. Значит, $f(\omega') \subseteq t(\omega')$. Последнее означает, что $f \leqslant t$. Таким образом, $t = f$. Лемма доказана.

Лемма 6. *Пусть G — монолитическая группа с неабелевым монолитом R. Тогда формация $\mathfrak{F} = l^\omega \mathrm{form} G$ имеет единственную максимальную ω-локальную подформацию $\mathfrak{M} = l^\omega \mathrm{form}\mathfrak{X}$, где $\mathfrak{X}$ — такой класс групп, что $H \in \mathfrak{X}$ тогда и только тогда, когда H изоморфна одной из следующих групп:*

а) $Q \wr ((G/R)/O_q(G/R))$, где $|Q| = q \in \omega \cap \pi(R)$;

б) $Q \wr (G/F_q(G))$, где $|Q| = q \in \omega \cap (\pi(G) \setminus \pi(R))$;

в) G/R.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{M}$ — формации из условия леммы, f и m — минимальные ω-локальные спутники формаций $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{M}$ соответственно. Согласно лемме 1

$$f(a) = \begin{cases} \mathrm{form}(G/F_p(G)), & \text{если } a = p \in \omega \cap \pi(G); \\ \varnothing, & \text{если } a = p \in \omega \setminus \pi(G); \\ \mathrm{form}(G/G_{\omega d}), & \text{если } a = \omega'. \end{cases}$$

Возможны два следующих случая:

1) $\pi(R) \cap \omega = \varnothing$; 2) $\pi(R) \cap \omega \neq \varnothing$.

Пусть имеет место 1). Тогда

$$\mathfrak{X} = (H|H \simeq G/R \text{ или } H \simeq Q \wr (G/F_q(G)), |Q| = q \in \omega \cap \pi(G)).$$

Обозначим через $L = [A](G/F_q(G))$, где A — база сплетения групп Q и $G/F_q(G)$. Используя лемму 1 найдем значения спутника m для всякого $a \in \omega \cup \{\omega'\}$.

Пусть $H \in \mathfrak{X}$, $a = p \in \omega \cap \pi(G)$. Покажем, что $m(p) = \mathrm{form}(G/F_p(G)) = f(p)$. Действительно, согласно лемме 1 $m(p) = \mathrm{form}(H/F_p(H)|H \in \mathfrak{X})$. Значит, если $H \simeq G/R$, то $H/F_p(H) \simeq (G/R)/F_p(G/R)$. Поскольку R — ω'-группа, то $R \subseteq F_p(G)$. Значит, $F_p(G/R) = F_p(G)/R$. Следовательно,

$$H/F_p(H) \simeq (G/R)/F_p(G/R) = (G/R)/(F_p(G)/R) \simeq G/F_p(G).$$

Пусть теперь $H \simeq Q \wr (G/F_q(G)), |Q| = q \in \omega \cap \pi(G))$, т.е. $H \simeq L$.

Если $q = p$, то $F_p(L) = A$ и

$$H/F_p(H) \simeq L/F_p(L) \simeq G/F_p(G).$$

Если же $q \neq p$, то при $p \notin \pi(L)$ имеем $L/F_p(L) = 1$, а при $p \in \pi(L)$ имеем $A \subseteq F_p(L)$ и

$$H/F_p(H) \simeq L/F_p(L) \simeq (G/F_q(G))/F_p(G/F_q(G)).$$

Так как $G/F_q(G) \in \mathfrak{F}$ и $p \in \pi(G/F_q(G))$, то по лемме 1

$$(G/F_q(G))/F_p(G/F_q(G)) \in f(p) = \mathrm{form}(G/F_p(G)).$$

Таким образом, из приведенных выше рассуждений следует, что $m(p) = \mathrm{form}(G/F_p(G))$, т.е. $m(p) = f(p)$.

Пусть теперь $a = \omega'$. Покажем, что $m(\omega') = \mathrm{form}((G/R)/(G/R)_{\omega d})$. Действительно, если $H \simeq G/R$, то $H/H_{\omega d} \simeq (G/R)/(G/R)_{\omega d}$. Пусть $H \simeq L$. Так как A — q-группа, $q \in \omega$, то $A \subseteq L_{\omega d}$. Поэтому $L/L_{\omega d} \simeq (G/F_q(G))/(G/F_q(G))_{\omega d}$. Однако, поскольку $R \subseteq F_q(G)$, то $G/F_q(G) \in \mathrm{form}(G/R)$. Значит, ввиду леммы 2

$$L/L_{\omega d} \simeq (G/F_q(G))/(G/F_q(G))_{\omega d} \in \mathrm{form}((G/R)/(G/R)_{\omega d}).$$

Итак, $m(\omega') = \mathrm{form}((G/R)/(G/R)_{\omega d})$.

Учитывая изложенное получаем

$$m(a) = \begin{cases} \mathrm{form}(G/F_p(G)), & \text{если } a = p \in \omega \cap \pi(G); \\ \varnothing, & \text{если } a = p \in \omega \setminus \pi(G); \\ \mathrm{form}((G/R)/(G/R)_{\omega d}), & \text{если } a = \omega'. \end{cases}$$

Очевидно, что $m \leqslant f$. Поэтому $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$.

Пусть t — такой ω-локальный спутник, что $t(p) = f(p)$ для любого $p \in \omega$ и $t(\omega') = \mathrm{form}(G/R)$. Обозначим через $\mathfrak{L}$ формацию $LF_\omega(t)$. Покажем, что $\mathfrak{L}$ — единственная максимальная ω-локальная подформация $\mathfrak{F}$. Поскольку, $t \leqslant f$ то $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{F}$. Кроме того, так как ввиду леммы 3 $\mathrm{form}(G/R)$ — единственная максимальная подформация $\mathrm{form}G$, то $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{F}$. Пусть теперь $\mathfrak{L}_1$ — произвольная собственная ω-локальная подформация формации $\mathfrak{F}$, t_1 — минимальный ω-локальный спутник $\mathfrak{L}_1$. Тогда $t_1(p) \subseteq f(p) = t(p)$ для любого $p \in \omega$ и $t_1(\omega') \subseteq f(\omega') = \mathrm{form}(G/G_{\omega d}) = \mathrm{form}G$.

Если $t_1(\omega') = f(\omega')$, то $G \in \mathfrak{L}_1$. Но тогда $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{L}_1$, что невозможно. Значит, $t_1(\omega') \subset f(\omega') = \mathrm{form}G$. Но тогда $t_1(\omega') \subseteq \mathrm{form}(G/R) = t(\omega')$. Таким образом, $t_1 \leqslant t$. Следовательно, $\mathfrak{L}_1 \subseteq \mathfrak{L}$ и $\mathfrak{L}$ — единственная максимальная ω-локальная подформация $\mathfrak{F}$.

Покажем теперь, что $G/R \in \mathfrak{L}$. Действительно, если $G/R \notin \mathfrak{L}$, то $l^\omega\mathrm{form}(G/R) \nsubseteq \mathfrak{L}$. Значит, $l^\omega\mathrm{form}(G/R) = \mathfrak{F}$. Но тогда используя леммы 1 и 3 получаем

$$f(\omega') = \mathrm{form}((G/R)/(G/R)_{\omega d}) \subseteq \mathrm{form}(G/R) \subset \mathrm{form}G = f(\omega').$$

Противоречие. Итак, $G/R \in \mathfrak{L}$. Но тогда t — внутренний ω-локальный спутник формации $\mathfrak{L}$. Пусть l — минимальный ω-локальный спутник формации $\mathfrak{L}$ Применяя лемму 5 получаем $l(\omega') = \mathrm{form}((G/R)/(G/R)_{\omega d})$. Кроме того, поскольку $m(p) = f(p)$ для любого $p \in \omega$, то $m = l$. Следовательно, $\mathfrak{M} = \mathfrak{L}$ и $\mathfrak{M}$ — единственная максимальная ω-локальная подформация $\mathfrak{F}$.

Пусть теперь имеет место 2). Обозначим через $L = [A](G/F_q(G))$, где A — база сплетения групп Q и $G/F_q(G)$, $q \in \omega \cap (\pi(G) \setminus \pi(R))$, а через $M = [B]((G/R)/O_q(G/R))$, где B — база сплетения групп Q и $(G/R)/O_q(G/R)$, $q \in \omega \cap \pi(R)$.

Тогда $\mathfrak{X} = (H | H \simeq L$ или $H \simeq M$ или $H \simeq G/R)$.

Снова используя лемму 1 найдем значения минимального ω-локального спутника m формации $\mathfrak{M}$ для всякого a из $\omega \cup \{\omega'\}$.

Пусть $H \in \mathfrak{X}$ и $a = p \in \omega \cap \pi(R)$. Покажем, что $m(p) = \mathrm{form}((G/R)/O_p(G/R))$. Действительно, если $H \simeq G/R$, то $H/F_p(H) \simeq (G/R)/F_p(G/R)$. Поскольку $O_p(G/R) \subseteq F_p(G/R)$, то

$$H/F_p(H) \simeq (G/R)/F_p(G/R) \in \mathrm{form}((G/R)/O_p(G/R)).$$

Если $H \simeq L$, то ввиду того, что $q \neq p$ имеем $A \subseteq F_p(L)$ и

$$H/F_p(H) \simeq L/F_p(L) \simeq (G/F_q(G))/F_p(G/F_q(G)).$$

Так как $q \notin \pi(R)$, то $R \subsetneq F_q(G)$. Следовательно, $G/F_q(G) \in \mathrm{form}(G/R)$. Кроме того, поскольку

$$O_p(G/F_q(G)) \subseteq F_p(G/F_q(G)),$$

то

$$(G/F_q(G))/F_p(G/F_q(G)) \in \mathrm{form}((G/F_q(G))/O_p(G/F_q(G))) \subseteq$$
$$\mathrm{form}((G/R)/O_p(G/R)).$$

Итак, $H/F_p(H) \in \mathrm{form}((G/R)/O_p(G/R))$.

Пусть $H \simeq M$. Тогда при $q = p$ имеем $F_p(M) = B$ и

$$H/F_p(H) \simeq M/_p(M) \simeq (G/R)/O_p(G/R).$$

Если $q \neq p$, то $B \subseteq F_p(m)$ и $O_q(G/R) \subseteq F_p(G/R)$. Значит,

$$M/F_p(M) \simeq ((G/R)/O_q(G/R))/F_p((G/R)/O_q(G/R)) \simeq (G/R)/F_p(G/R) \in$$
$$\mathrm{form}((G/R)/O_p(G/R)).$$

Таким образом, $m(p) = \mathrm{form}((G/R)/O_p(G/R))$.

Пусть теперь $a = p \in \omega \cap (\pi(G) \setminus \pi(R))$. Покажем, что $m(p) = \mathrm{form}(G/F_p(G))$. Действительно, если $H \simeq G/R$, то $H/F_p(H) \simeq (G/R)/F_p(G/R)$. Так как $p \notin \pi(R)$, то $R \subseteq F_p(G)$. Следовательно, $F_p(G/R) = F_p(G)/R$. Поэтому

$$H/F_p(H) \simeq (G/R)/F_p(G/R) = (G/R)/(F_p(G)/R) \simeq G/F_p(G).$$

Пусть $H \simeq L$. Тогда при $q = p$ имеем $F_p(L) = A$ и

$$H/F_p(H) \simeq L/F_p(L) \simeq G/F_p(G).$$

Если же $q \neq p$, то $A \subseteq F_p(L)$ и $L/F_p(L) \simeq (G/F_q(G))/F_p(G/F_q(G))$. Так как $G/F_q(G) \in \mathfrak{F}$, то при $p \in \pi(G/F_q(G))$ получаем

$$(G/F_q(G))/F_p(G/F_q(G)) \in f(p) = \mathrm{form}(G/F_p(G)).$$

Если же $p \notin \pi(G/F_q(G))$, то

$$(G/F_q(G))/F_p(G/F_q(G)) = 1 \in \mathrm{form}(G/F_p(G)) = f(p).$$

Следовательно, $H/F_p(H) \in \mathrm{form}(G/F_p(G))$.

Пусть $H \simeq M$. Так как $q \neq p$, то $B \subseteq F_p(M)$ и $O_q(G/R) \subseteq F_p(G/R)$. Поэтому $F_p((G/R)/O_q(G/R)) = F_p(G/R)/O_q(G/R)$ и

$$M/F_p(M) \simeq ((G/R)/O_q(G/R))/F_p((G/R)/O_q(G/R)) \simeq$$

$$(G/R)/F_p(G/R) = (G/R)/(F_p(G)/R) \simeq G/F_p(G).$$

Итак, $m(p) = \mathrm{form}(G/F_p(G))$.

Пусть наконец $a = \omega'$. Если $H \simeq G/R$, то

$$H/H_{\omega d} \simeq (G/R)/(G/R)_{\omega d} \simeq G/G_{\omega d}.$$

Поэтому $\mathrm{form}(G/G_{\omega d}) \subseteq m(\omega')$. Далее, поскольку ввиду леммы 4 группы L и M принадлежат формации $\mathfrak{F} = l^{\omega}\mathrm{form}G$, то в силу леммы 2 группы $L/L_{\omega d}$ и $M/M_{\omega d}$ принадлежат $f(\omega') = \mathrm{form}(G/G_{\omega d})$. Таким образом, $m(\omega') = f(\omega')$.

Из приведенного описания следует, что

$$m(a) = \begin{cases} \mathrm{form}((G/R)/O_p(G/R)), & \text{если } a = p \in \omega \cap \pi(R); \\ \mathrm{form}(G/F_p(G)), & \text{если } a = p \in \omega \cap (\pi(G) \setminus \pi(R)); \\ \varnothing, & \text{если } a = p \in \omega \setminus \pi(G); \\ \mathrm{form}(G/G_{\omega d}), & \text{если } a = \omega'. \end{cases}$$

Снова через t обозначим такой ω-локальный спутник, что $t(a) = f(a)$ для любого $a \in (\omega \setminus \pi(R)) \cup \{\omega'\}$ и $t(a) = \mathrm{form}(G/R)$ для любого $a = p \in \omega \cap \pi(R)$, а через $\mathfrak{L}$ формацию $LF_\omega(t)$. Аналогичным образом можно показать, что $\mathfrak{L}$ — единственная максимальная ω-локальная подформация $\mathfrak{F}$. Поскольку при этом для любого $a \in (\omega \setminus \pi(R)) \cup \{\omega'\}$ $m(a) = f(a) = t(a)$ и для всех $a = p \in \omega \cap \pi(R)$

$$m(p) = \mathrm{form}((G/R)/O_p(G/R)) \subseteq \mathrm{form}(G/R) = t(p) \subseteq \mathfrak{N}_p m(p),$$

а $\mathfrak{N}_p m(p)$ — значение на p максимального внутреннего ω-локального спутника k формации $\mathfrak{M}$, то $t \leqslant k$. Поэтому $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{M}$. Но тогда $\mathfrak{M} = \mathfrak{L}$. Следовательно, $\mathfrak{M}$ — единственная максимальная ω-локальная подформация формации $\mathfrak{F}$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Рассмотрим два возможных случая: 1) $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{H}$; 2) $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{S} \not\subseteq \mathfrak{H}$.

Допустим, что имеет место 1). И пусть G — группа минимального порядка из $\mathfrak{F} \setminus (\mathfrak{H} \cap \mathfrak{S})$. Тогда G — монолитическая группа с неабелевым монолитом R. По лемме 6 формация $\mathfrak{L} = l^\omega \mathrm{form} G$ имеет единственную максимальную ω-локальную подформацию $\mathfrak{M} = l^\omega \mathrm{form}\mathfrak{X}$, где $\mathfrak{X}$ — такой класс групп, что $H \in \mathfrak{X}$ тогда и только тогда, когда H изоморфна одной из следующих групп:

а) $Q \wr ((G/R)/O_q(G/R))$, где $|Q| = q \in \omega \cap \pi(R)$;

б) $Q \wr (G/F_q(G))$, где $|Q| = q \in \omega \cap (\pi(G) \setminus \pi(R))$;

в) G/R.

Обозначим, как и прежде, через $L = [A](G/F_q(G))$, где A — база сплетения групп Q и $G/F_q(G)$, $q \in \omega \cap (\pi(G) \setminus \pi(R))$, и через $M = [B]((G/R)/O_q(G/R))$, где B — база сплетения групп Q и $(G/R)/O_q(G/R)$, $q \in \omega \cap \pi(R)$.

Поскольку G/R — разрешимая группа и $R \subseteq F_q(G)$ для всякого $q \in \omega \cap (\pi(G) \setminus \pi(R))$, то разрешимыми являются и группы L и M. Но $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{H}$. Значит, группы L и M принадлежат формации $\mathfrak{H}$. Поэтому $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}$ и $\mathfrak{L}$ — искомая минимальная ω-локальная не $\mathfrak{H}$-формация.

Пусть теперь имеет место 2). И пусть G — группа минимального порядка из $(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{S}) \setminus \mathfrak{H}$. Обозначим через $\mathfrak{L}$ формацию $l^\omega \mathrm{form} G$. Ясно, что $\mathfrak{L} \not\subseteq \mathfrak{H}$. Ввиду замечания 3 (см. [13] с. 18) формация $\mathfrak{L}$ содержит конечное число ω-локальных подформаций. Поэтому в $\mathfrak{L}$ найдется, по меньшей мере, одна минимальная ω-локальная не $\mathfrak{H}$-подформация. Теорема доказана.

Приведем несколько следствий доказанной теоремы.

Следствие 1 [9]. *Пусть $\mathfrak{H}$ — 2-кратно локальная формация, $\mathfrak{F}$ — ω-локальная формация. Тогда если $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$, то в $\mathfrak{F}$ имеется, по крайней мере, одна минимальная ω-локальная не $\mathfrak{H}$-подформация.*

В случае когда ω — множество всех простых чисел из теоремы вытекает

Следствие 2 [7]. *Пусть локальная формация $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$, где $\mathfrak{H}$ — формация классического типа. Тогда в $\mathfrak{F}$, имеется по крайней мере, одна минимальная локальная не $\mathfrak{H}$-подформация.*

Summary

I.N.Safonova. On existence of $\mathfrak{H}_\omega$-critical formations // Proc. Gomel State Univ. — 1999. — №1(15) Problems in Algebra. — P. 121–129

The article deals with finite groups.

Let $\mathfrak{H}$ be some class of groups, $\mathfrak{F}$ be a ω-local formation. The formation $\mathfrak{F}$ is called minimal ω-local non-$\mathfrak{H}$-formation or a $\mathfrak{H}_\omega$-critical formation, if $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$ and all proper ω-local subformations in $\mathfrak{F}$ belong to $\mathfrak{H}$.

Earlier we obtained the classification of $\mathfrak{H}_\omega$-critical formations, when $\mathfrak{H}$ is a formation of classical type ($\mathfrak{H}$ has a local screen, all non-abelian values of which are local).

Theorem. Let $\mathfrak{H}$ be a formation of classical type, $\mathfrak{F} \neq \varnothing$ be a ω-local formation. If $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$ then $\mathfrak{F}$ has at least one ω-local non-$\mathfrak{H}$-subformation.

Литература

1. *Шеметков Л.А., Скиба А.Н.* Формации алгебраических систем. М., 1989.
2. *Derk K., Hawkes T.* Finite soluble groups. Walter de Gruyter, Berlin-New York, 1992.
3. *Скиба А.Н.* Алгебра формаций. Мн., 1997.
4. *Шеметков Л.А.* Экраны ступенчатых формаций //Тр. VI Всесоюзн. симпозиума по теории групп. Киев, 1980. С. 37–50.
5. *Скиба А.Н.* О критических формациях //Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. н. 1980. N 4. С. 27–33.
6. *Скиба А.Н.* Формации со сверхразрешимыми локальными подформациями //Группы и др. алгебраические системы с условиями конечности. Новосибирск. Наука. 1984. Т.4. С. 101–118.
7. *Скиба А.Н.* О критических формациях //В кн.: Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры. Киев: Ин-т математики НАН Украины. 1993. С. 258–268.

8. *Джарадин Джехад* Минимальные p-насыщенные непильпотентные формации //Вопросы алгебры. Гомель: Изд-во Гом-го ун-та. 1995. Вып. 8. С. 59–64.

9. *Рыжик В.Н.* О критических p-локальных формациях. Гомель, 1997. (Препринт /Гомельский государственный университет: N 58).

10. *Сафонова И.Н.* О минимальных ω-локальных несверхразрешимых формациях //Вопросы алгебры. Гомель: Изд-во Гом-го уп-та. 1998. Вып. 12. С. 123–130.

11. *Сафонова И.Н.* О минимальных ω-локальных не $\mathfrak{H}$-формациях //Изв. НАН Беларуси. Серия физ.-мат. наук. 1999. №2. С.23–27.

12. *Скиба А.Н., Шеметков Л.А.* О частично локальных формациях // ДАН Беларуси. 1995. Т. 39, N 3. С. 123–143.

13. *Скиба А.Н., Шеметков Л.А.* Кратно ω-локальные формации и классы Фиттинга конечных групп. Гомель, 1997. (Препринт/Гомельский государственный университет: N 63).

Гомельский государственный
университет им. Ф.Скорины

Поступило 01.03.99