Известия Гомельского государственного университета имени
Ф.Скорины. — 1999. — №1(15) Вопросы алгебры. — С. 92–102

УДК 512.542

В. Н. Семенчук

КЛАССИФИКАЦИИ ЛОКАЛЬНЫХ НАСЛЕДСТВЕННЫХ ФОРМАЦИЙ, КРИТИЧЕСКИЕ ГРУППЫ КОТОРЫХ БИПРИМАРНЫ

Хорошо известно, что минимальные ненильпотентные группы [1], минимальные не p-нильпотентные группы [2], минимальные не p-разложимые группы [3] бипримарны.

В связи с указанными результатами Л.А.Шеметковым в Коуровской тетради [4] под номером 8.87 была поставлена следующая проблема.

Проблема (Шеметков Л.А. [4]). Найти все локальные наследственные формации $\mathfrak{F}$, для которых любая критическая группа бипримарна.

Настоящая работа посвящена решению данной проблемы.

Изучению строения локальных наследственных формаций, критические группы которых бипримарны посвящена работа [11], в которой найден ряд свойств таких формаций.

В основу проводимых исследований положен метод экстремальных классов разработанный Картером, Фишером, Хоуксом в работе [5]. Рассматриваются только конечные группы. Необходимые определения и обозначения можно найти в [6, 7]. Напомним, что через $\mathcal{M}(\mathfrak{F})$ обозначается класс всех критических (минимальных не $\mathfrak{F}$-групп), т.е. групп не принадлежащих $\mathfrak{F}$, все собственные подгруппы которых принадлежат $\mathfrak{F}$.

Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{X}$ — произвольные классы групп. Следуя [5], обозначим через $\mathfrak{F}^{\mathfrak{X}}$ — множество всех групп, у которых все $\mathfrak{X}$-подгруппы принадлежат $\mathfrak{F}$.

Если f — локальный экран, то через $f^{\mathfrak{X}}$ обозначим локальную функцию, обладающую равенством
$$f^{\mathfrak{X}}(p) = (f(p))^{\mathfrak{X}}$$
для любого простого числа p.

Лемма 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{X}$ — некоторые классы групп. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) $\mathfrak{F}^{\mathfrak{X}}$ — наследственный класс;

2) $\mathfrak{F}^{\mathfrak{X}} = (\mathfrak{F}^{\mathfrak{X}})^{\mathfrak{X}} = (\mathfrak{F} \bigcap \mathfrak{X})^{\mathfrak{X}}$;

3) если $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{H}$, то $\mathfrak{F}^{\mathfrak{H}} \subseteq \mathfrak{F}^{\mathfrak{X}}$;

4) если $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}$, то $\mathfrak{F}^{\mathfrak{X}}$ — класс всех групп;

5) если $\mathfrak{F}$ — формация, а $\mathfrak{X}$ — насыщенный гомоморф, то $\mathfrak{F}^{\mathfrak{X}}$ — формация;

6) если $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{H}$ — некоторые классы групп и $\mathfrak{H}$ — наследственный класс. Тогда

$$\mathfrak{F}^{\mathfrak{X}} \bigcap \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$$

в том и только в том случае, когда

$$\mathcal{M}(\mathfrak{F}) \bigcap \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{X};$$

7) если $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ — гомоморфы и $\mathfrak{N}_p\mathfrak{F} = \mathfrak{F}$, то

$$\mathfrak{N}_p(\mathfrak{F}^{\mathfrak{H}}) = \mathfrak{F}^{\mathfrak{H}}.$$

Доказательство. Доказательство утверждений 1), 2), 3) и 4) следует непосредственно из определения класса групп $\mathfrak{F}^{\mathfrak{X}}$.

Пусть $G \in \mathfrak{F}^{\mathfrak{X}}$, N — нормальная подгруппа группы G и A/N — $\mathfrak{X}$-подгруппа из G/N. Пусть B — добавление к N в A. Покажем, что $B \cap N \subseteq \Phi(B)$. Предположим противное. Пусть $B \cap N$ не входит в $\Phi(G)$. Тогда B обладает максимальной подгруппой M, не содержащей $B \cap N$. Поэтому

$$B = M(B \bigcap N),$$

а значит $BN = MN = G$, что противоречит определению добавление.

Так как $\mathfrak{X}$ — насыщенный гомоморф, то $B \in \mathfrak{X}$. Но тогда $B \in \mathfrak{F}$ и

$$BN/N = A/N \in \mathfrak{F}.$$

Значит, класс $\mathfrak{F}^{\mathfrak{X}}$ замкнут относительно гомоморфных образов.

Пусть

$$G/N_i \in \mathfrak{F}^{\mathfrak{X}}, i = 1, 2, N_1 \bigcap N_2 = 1.$$

Пусть A — $\mathfrak{X}$-подгруппа из G. Тогда $AN_i/N_i \in \mathfrak{X}$, а значит ввиду определения класса $\mathfrak{F}^{\mathfrak{X}}$ имеем

$$AN_i/N_i \simeq A/A \bigcap N_i \in \mathfrak{F}, i = 1, 2.$$

Так как $\mathfrak{F}$ — формация и $N_1 \cap N_2 = 1$, то отсюда получаем $A \in \mathfrak{F}$. Таким образом, $G \in \mathfrak{F}^{\mathfrak{X}}$.

Докажем утверждение 6). Пусть

$$\mathfrak{F}^{\mathfrak{X}} \bigcap \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}, G \in \mathcal{M}(\mathfrak{F}) \bigcap \mathfrak{H}.$$

Если G не входит в $\mathfrak{X}$, то получается, что каждая $\mathfrak{X}$-подгруппа из G принадлежит $\mathfrak{F}$, а значит, $G \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие. Поэтому $G \in \mathfrak{X}$.

Покажем, что $\mathcal{M}(\mathfrak{F}) \cap \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{X}$. Предположим, что множество

$$(\mathfrak{F}^{\mathfrak{X}} \bigcap \mathfrak{H}) \setminus \mathfrak{F}$$

непусто, и выберем в нем группу G наименьшего порядка. Тогда $\mathfrak{F}$ не входит в $\mathfrak{X}$. Пусть H — собственная подгруппа из G. Так как классы $\mathfrak{F}^{\mathfrak{X}}$ и $\mathfrak{H}$ — наследственные классы, то $H \in \mathfrak{F}^{\mathfrak{X}} \cap \mathfrak{H}$. Ввиду минимальности G имеем $H \in \mathfrak{F}$. Значит,

$$G \in \mathcal{M}(\mathfrak{F}) \bigcap \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{X}.$$

Получили противоречие. Поэтому

$$\mathfrak{F}^{\mathfrak{X}} \bigcap \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}.$$

Докажем утверждение 7). Пусть $G \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{F}^{\mathfrak{H}}$ и X — $\mathfrak{H}$-подгруппа из группы G. Отсюда следует, что

$$G/O_p(G) \in \mathfrak{F}^{\mathfrak{H}}, XO_p(G)/O_p(G) \in \mathfrak{H}.$$

А это значит, что

$$XO_p(G)/O_p(G) \in \mathfrak{F}.$$

Отсюда нетрудно заметить, что $X/O_p(X) \in \mathfrak{F}$. Следовательно, $X \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{F} = \mathfrak{F}$. Итак, $G \in \mathfrak{F}^{\mathfrak{H}}$. Лемма доказана.

Для любого класса групп $\mathfrak{X}$ через $\mathfrak{X}^S$ обозначим наибольший (по включению) наследственный подкласс класса $\mathfrak{X}$. Очевидно, что если $\mathfrak{X}$ — формация, то $\mathfrak{X}^S$ также формация.

Если f — локальный экран, то через f^S обозначим такой локальный экран, что

$$f^S(p) = (f(p))^S$$

при любом простом числе p.

Обозначим через $\mathfrak{X}_p$ — множество всех примарных групп и всех бипримарных pd-групп. Напомним, что локальный экран f формации $\mathfrak{F}$ называется полным наследственным, если $f(p)$ — наследственная формация и $\mathfrak{N}_p f(p) = f(p)$ для любого простого числа p из $\pi(\mathfrak{F})$.

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — формация, имеющая полный наследственный локальный экран φ. Тогда и только тогда любая минимальная не $\mathfrak{F}$-группа бипримарна, когда выполняются следующие условия:*

1) $\mathcal{M}(\mathfrak{F}) \subseteq \mathfrak{S}$;

2) формация $\mathfrak{F}$ имеет полный локальный экран h такой, что

$$h(p) = (\varphi(p))^{\mathfrak{X}_p} \text{ и } (\varphi(p))^{\mathfrak{X}_p} \bigcap \mathfrak{F} \subseteq \varphi(p),$$

для любого простого числа p.

Доказательство. Необходимость. Утверждение 1) следует непосредственно из условия теоремы. Очевидно, что $\mathfrak{X}_p$ — насыщенный гомоморф. Следовательно, согласно лемме 1 $(\varphi(p))^{\mathfrak{X}_p}$ — наследственная формация для любого простого числа p.

Покажем, что $\pi(\mathfrak{F})$ — множество всех простых чисел. Предположим, что это нет так. Пусть $p \in \mathbb{P}\setminus\pi(\mathfrak{F})$. Очевидно, что группа порядка p является минимальной не $\mathfrak{F}$-группой. Получили противоречие.

Покажем, что

$$(\varphi(p))^{\mathfrak{X}_p} \bigcap \mathfrak{F} \subseteq \varphi(p).$$

Пусть G — группа наименьшего порядка из

$$((\varphi(p))^{\mathfrak{X}_p} \bigcap \mathfrak{F}) \setminus \varphi(p).$$

Так как $(\varphi(p))^{\mathfrak{X}_p} \cap \mathfrak{F}$ — наследственная формация, то очевидно, что $G \in \mathcal{M}(\varphi(p))$. Пусть T — группа наименьшего порядка такая, что $G/T \notin \varphi(p)$. Очевидно, что $T \subseteq \Phi(G)$ и $\overline{G} = G/T \in \mathcal{M}(\varphi(p))$. Нетрудно показать, что $O_p(\overline{G}) = 1$ и $\overline{G}$ имеет единственную минимальную нормальную подгруппу. Значит, по лемме 18.8 из [7] существует точный неприводимый $F_p[\overline{G}]$-модуль L, где F_p — поле из p элементов.

Пусть $\Gamma = L \rtimes \overline{G}$. Покажем, что $\Gamma \in \mathcal{M}(\mathfrak{F})$. Поскольку $C_\Gamma(L) = L$ и $\overline{G} \notin \varphi(p)$, то $\Gamma \notin \mathfrak{F}$.

Пусть H — собственная подгруппа из Γ. Покажем, что $H \in \mathfrak{F}$. Пусть $L \nsubseteq H$. Если $\Gamma = LH$, то $\Gamma/L \simeq H = \overline{G}$. Следовательно, $H \in \mathfrak{F}$. Пусть $LH \neq \Gamma$. Тогда H — собственная подгруппа из группы $\overline{G}$. А это значит, что $H \in \varphi(p)$ и $LH/L \in \varphi(p)$. Так как f — полный экран, то $LH \in \varphi(p)$. Отсюда $HL \in \mathfrak{F}$. Ввиду наследственности формации $\mathfrak{F}$ получаем, что $H \in \mathfrak{F}$.

Пусть теперь $L \subseteq H$. Так как $\Gamma/L \in \mathcal{M}(\varphi(p))$, то $H/L \in \varphi(p)$. Так как $H/L \in \mathfrak{F}$ и L — p-группа, то $H \in \mathfrak{F}$. Итак, $\Gamma \in \mathcal{M}(\mathfrak{F})$.

Предположим, что $G \notin \mathfrak{X}_p$. А это значит, что группа G есть группа одного из следующих типов:

1) G — pd-группа и $|\pi(G)| > 2$;

2) G — p'-группа и $|\pi(G)| \geq 2$.

Так как $T \subseteq \Phi(G)$, то $\pi(G) = \pi(\overline{G})$. Следовательно, $\overline{G}$ — группа либо из пункта 1), либо из пункта 2). В этом случае, группа Γ такая, что $|\pi(\Gamma)| \geq 3$. Получили противоречие. Итак, $G \in \mathfrak{X}_p$. Отсюда следует, что $G \in \varphi(p)$. Получили противоречие. Следовательно,

$$(\varphi(p))^{\mathfrak{X}_p} \bigcap \mathfrak{F} \subseteq \varphi(p)$$

для любого p из $\pi(\mathfrak{F})$.

Пусть $\mathfrak{F}^*$ — локальная формация, имеющая локальный экран h такой, что $h(p) = (\varphi(p))^{\mathfrak{X}_p}$ для любого простого p из $\pi(\mathfrak{F})$. Из леммы 1 h — полный локальный экран формации $\mathfrak{F}^*$. Так как $\varphi(p) \subseteq (\varphi(p))^{\mathfrak{X}_p}$ для любого простого p из $\pi(\mathfrak{F})$, то $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}^*$. Пусть G — группа наименьшего порядка из $\mathfrak{F}^* \setminus \mathfrak{F}$. Так как h — наследственный экран формации $\mathfrak{F}^*$, то $\mathfrak{F}^*$ — наследственная формация. Отсюда следует, что

$$G \in \mathcal{M}(\mathfrak{F}) \text{ и } \Phi(G) = 1.$$

По теореме 1.2 из [8]

$$G = G^{\mathfrak{F}} \leftthreetimes M,$$

где $G^{\mathfrak{F}}$ — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G, $|G^{\mathfrak{F}}| = p^\alpha$, $\alpha > 0$ и $M \in \mathcal{M}(f(p))$. Так как $G \in \mathfrak{F}^*$, то

$$G/G^{\mathfrak{F}} \simeq M \in h(p) = (\varphi(p))^{\mathfrak{X}_p}.$$

Если $M \notin \mathfrak{X}_p$, то M — группа одного из следующих типов:

1) M — pd-группа и $|\pi(M)| > 2$;

2) M — p'-группа и $|\pi(M)| \geq 2$.

Отсюда следует, что $|\pi(G)| \geq 3$, что невозможно. Итак, $M \in \mathfrak{X}_p$. Но тогда $M \in \varphi(p)$. Получили противоречие. Следовательно, $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^*$ и h — локальный экран формации $\mathfrak{F}$.

Достаточность. Пусть G — произвольная минимальная не $\mathfrak{F}$-группа. Из пункта 1) следует, что G — разрешимая группа. Покажем, что $|\pi(G)| \leq 2$. Так как

$$|\pi(G/\Phi(G))| = |\pi(G)|,$$

то, не ограничивая общности, можно считать, что $\Phi(G) = 1$. По теореме 1.2 из [8]

$$G = G^{\mathfrak{F}} \leftthreetimes M,$$

где $G^{\mathfrak{F}}$ — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G, $|G^{\mathfrak{F}}| = p^\alpha$, $\alpha > 0$ и $M \in \mathcal{M}(h(p)) \cap \mathcal{M}(\varphi(p))$. Согласно условию $h(p) = (\varphi(p))^{\mathfrak{X}_p}$. Если $M \notin \mathfrak{X}_p$, то из того факта, что $M \in \mathcal{M}(\varphi(p))$ получаем, что все $\mathfrak{X}_p$-подгруппы из M принадлежат $f(p)$. А это значит, что $M \in (\varphi(p))^{\mathfrak{X}_p} = h(p)$. Получили противоречие. Итак, $M \in \mathfrak{X}_p$. А это значит, что $|\pi(G)| \leq 2$. Теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная наследственная формация, h — ее полный локальный экран. Тогда и только тогда любая минимальная не $\mathfrak{F}$-группа бипримарна, когда выполняются следующее утверждения:*

1) $\mathcal{M}(\mathfrak{F}) \subseteq \mathfrak{S}$;

2) $\mathcal{M}(h(p)) \cap \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}_p$, для любого простого числа p.

Доказательство. Из доказательства теоремы 1 видно, что включение

$$(h(p))^{\mathfrak{X}_p} \bigcap \mathfrak{F} \subseteq h(p)$$

выполняется для любого полного экрана h формации $\mathfrak{F}$ и для любого простого числа p. Теперь доказательство данного следствия получается из леммы 1.

Следствие 2. *Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная наследственная формация. Тогда и только тогда любая минимальная не $\mathfrak{F}$-группа бипримарна, когда выполняются следующие утверждения:*

1) $\mathcal{M}(\mathfrak{F}) \subseteq \mathfrak{S}$;

2) формация $\mathfrak{F}$ имеет полный локальный экран φ такой, что

$$\mathcal{M}(\varphi(p)) \subseteq \mathfrak{X}_p$$

для любого простого числа p.

Доказательство. Пусть f — максимальный внутренний локальный экран формации $\mathfrak{F}$. Известно, что f — наследственный локальный экран. По теореме 1 формация $\mathfrak{F}$ имеет полный локальный экран φ такой, что

$$\varphi(p) = (f(p))^{\mathfrak{X}_p}$$

для любого простого числа p. По лемме 1

$$(\varphi(p))^{\mathfrak{X}_p} = ((f(p))^{\mathfrak{X}_p})^{\mathfrak{X}_p} = (f(p))^{\mathfrak{X}_p} = \varphi(p).$$

Отсюда следует $\mathcal{M}(\varphi(p)) \subseteq \mathfrak{X}_p$ для любого простого числа p.

Следующая теорема доказанная в классе разрешимых групп дает классификацию наследственных классов Фиттинга с бипримарными критическими группами.

Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственный класс Фиттинга. Тогда и только тогда любая минимальная не $\mathfrak{F}$-группа бипримарна, когда $\mathfrak{F}$ одного из следующих типов:*

1) $\mathfrak{S}_{p'}\mathfrak{S}_{\pi}$, где π — множество простых чисел, содержащее число p;

2) $(\mathfrak{S}_{p'}\mathfrak{S}_{q'})^n$, $(\mathfrak{S}_{p'}\mathfrak{S}_{q'})^n\mathfrak{S}_{q'}$, где p и q — различные простые числа, n — натуральное число;

3) $\mathfrak{F} = \bigcap_{i\in I} \mathfrak{F}_i$, где $\mathfrak{F}_i$ — формации из пунктов 1) или 2).

Доказательство. Необходимость. Согласно результатов работы [9] наследственный класс Фиттинга является формацией. Так как $\mathfrak{F}$ — наследственная формация Фиттинга, то по теореме 1 из [10] следует, что

$$\mathfrak{F} = (\bigcap \mathfrak{S}_{p_1'}\mathfrak{S}_{p_2'}\dots\mathfrak{S}_{p_n'}\mathfrak{S}_{\pi(f(p_1,p_2,\dots,p_n))}) \bigcap \mathfrak{S}_{\pi(\mathfrak{F})},$$

где $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ пробегает все главные следы формации $\mathfrak{F}$, f — максимальный внутренний локальный экран формации $\mathfrak{F}$.

Вначале докажем, что $\pi(\mathfrak{F})$ — множество всех простых чисел. Предположим противное. Пусть, найдется простое число $p \in \mathbb{P} \setminus \pi(\mathfrak{F})$. Обозначим через A — группу порядка p. Очевидно, что A — минимальная не $\mathfrak{F}$-группа. Получили противоречие с условием. Итак, $\pi(\mathfrak{F}) = \mathbb{P}$.

Пусть все главные следы формации $\mathfrak{F}$ имеют ширину $n = 1$. Тогда формация $\mathfrak{F}$ имеет следующий вид

$$\mathfrak{F} = \bigcap \mathfrak{S}_{p'} \mathfrak{S}_{\pi(f(p))},$$

где p — произвольное простое число.

Пусть G — произвольная группа из $\mathcal{M}(\mathfrak{F})$. Отсюда следует, что найдется такое простое число p такое, что $G \in \mathcal{M}(\mathfrak{S}_{p'} \mathfrak{S}_{\pi(f(p))})$. Так как f — полный экран, то $\mathfrak{N}_p f(p) = f(p)$. Следовательно, $p \in \pi(f(p))$. Покажем, что G — бипримарная группа. Не ограничивая общности, мы можем считать, что $\Phi(G) = 1$. Согласно теореме 1.2 из [8]

$$G = N \leftthreetimes M,$$

где N — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G, причем N — p-группа, $C_G(N) = N$ и M — минимальная не $\mathfrak{S}_{\pi(f(p))}$-группа.

Очевидно, что $|M| = r$, где $r \notin \pi(f(p))$. А это значит, что G — бипримарная группа. Следовательно, при $n = 1$ формация $\mathfrak{F}$ является формацией типа 1) или 3).

Пусть $n > 1$. Рассмотрим произвольный главный след $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ ширины n формации $\mathfrak{F}$. Согласно условию

$$\{p_1, p_2, \ldots, p_n\} = \{p, q\},$$

где p и q — различные простые числа. Поэтому, произвольный главный след формации $\mathfrak{F}$ одного из следующих типов

$$(p, q, \ldots, p, q) \text{ или } (p, q, \ldots, q, p).$$

Отсюда следует, что формация $\mathfrak{F}$ имеет следующее строение

$$\mathfrak{F} = \bigcap (\mathfrak{S}_{p'} \mathfrak{S}_{q'} \ldots \mathfrak{S}_{p'} \mathfrak{S}_{q'} \mathfrak{S}_{\pi(f(p,q,\ldots,p,q))}) \bigcap (\mathfrak{S}_{p'} \mathfrak{S}_{q'} \ldots \mathfrak{S}_{q'} \mathfrak{S}_{p'} \mathfrak{S}_{\pi(f(p,q,\ldots,q,p))}),$$

где $(p, q, \ldots, p, q)$ и $(p, q, \ldots, q, p)$ пробегают все главные следы формации $\mathfrak{F}$. Покажем, что

$$\mathfrak{S}_{\pi(f(p,q,\ldots,p,q))} = \mathfrak{S}_{p'}$$

и

$$\mathfrak{S}_{\pi(f(p,q,\ldots,q,p))} = \mathfrak{S}_{q'}.$$

Предположим, что найдется такое простое число

$$r \in \mathbb{P} \setminus \mathfrak{S}_{\pi(f(p,q,\dots,p,q))},$$

причем $r \neq p$ и $r \neq q$.

Пусть R — группа порядка r. Очевидно, что $R \in \mathcal{M}(\mathfrak{S}_\pi)$, где $\pi = \pi(f(p,q,\dots,p,q))$. По лемме 18.8 из [7] существует точный неприводимый $F_q[R]$-модуль Q, где F_q — поле из q элементов.

Пусть $H = Q \rtimes R$. Нетрудно показать, что

$$H \in \mathcal{M}(\mathfrak{S}_{\pi(f(p,q,\dots,p))}),$$

где $(p, q, \dots, p)$ — главный след формации $\mathfrak{F}$ ширины $n-1$.

Обозначим $\overline{H} = H/\Phi(H)$. Очевидно, что $O_p(\overline{H}) = 1$ и $\pi(H) = \pi(\overline{H})$. По лемме 18.8 из [7] существует точный неприводимый $F_p(\overline{H})$-модуль B, где F_p — поле из p элементов.

Пусть $\Gamma = B \rtimes \overline{H}$. Нетрудно показать, что

$$\Gamma \in \mathcal{M}(\mathfrak{S}_{\pi(f(p,q,\dots,q))}),$$

где $(p, q, \dots, q)$ — главный след формации $\mathfrak{F}$ ширины $n-2$. Продолжая аналогичный процесс мы на n-ом шаге построим группу G такую, что

$$G \in \mathcal{M}(\mathfrak{F}) \text{ и } \pi(G) = \{p, q, r\}.$$

Получили противоречие. Итак, мы доказали, что

$$\mathfrak{S}_{\pi(f(p,q,\dots,p,q))} = \mathfrak{S}_{p'}$$

для любого главного следа $(p, q, \dots, p, q)$ формации $\mathfrak{F}$.

Аналогичным образом доказывается, что

$$\mathfrak{S}_{\pi(f(p,q,\dots,p,q))} = \mathfrak{S}_{q'}$$

для любого главного следа $(p, q, \dots, q, p)$ формации $\mathfrak{F}$. Из полученного, нетрудно заметить, что формация $\mathfrak{F}$, это формация из пунктов 1), 2) и 3).

Достаточность. Пусть G — группа из пункта 1), т.е. $G \in \mathcal{M}(\mathfrak{S}_{p'}\mathfrak{S}_\pi)$, где π — множество простых чисел, содержащих число p. Как было показано выше G — бипримарная группа.

Пусть G — группа из пункта 2). Пусть

$$G \in \mathcal{M}((\mathfrak{S}_{p'}\mathfrak{S}_{q'})^n).$$

Согласно теореме 1.2 из [8]

$$G/\Phi(G) = F(G)/\Phi(G) \leftthreetimes H/\Phi(G),$$

где $F(G)/\Phi(G)$ — p-группа, $H/\Phi(G) \in \mathcal{M}(f(p))$, где f — максимальный внутренний локальный экран формации $(\mathfrak{S}_{p'}\mathfrak{S}_{q'})^n$. Согласно следствию 7.13 из [7]

$$f(p) = \mathfrak{S}_{q'}(\mathfrak{S}_{p'}\mathfrak{S}_{q'})^{n-1}.$$

По теореме 1.2 из [8]

$$H/\Phi(G)/\Phi(H/\Phi(G)) = F(H/\Phi(H))/\Phi(H/\Phi(G)) \leftthreetimes T/\Phi(G/\Phi(H/\Phi(G))),$$

где

$$F(H/\Phi(G))/\Phi(H/\Phi(G)),$$

является q-группой, а

$$\overline{T} = T/\Phi(G)/\Phi(H/\Phi(G)) \in \mathcal{M}(h(q)),$$

где h — максимальный внутренний экран формации

$$\mathfrak{S}_{q'}(\mathfrak{S}_{p'}\mathfrak{S}_{q'})^{n-1}.$$

Согласно следствию 7.13 из [7]

$$h(q) = (\mathfrak{S}_{p'}\mathfrak{S}_{q'})^{n-1}.$$

Итак,

$$\overline{T} \in \mathcal{M}((\mathfrak{S}_{p'}\mathfrak{S}_{q'})^{n-1}).$$

Продолжая аналогичный процесс и учитывая, что $\pi(G) = \pi(G/\Phi(G))$ и тот факт, что минимальная не $\mathfrak{S}_{q'}$-группа — группа порядка q получаем, что

$$|G| = p^{\alpha}q^{\beta},$$

где α, β — натуральные числа.

Пусть теперь

$$G \in \mathcal{M}((\mathfrak{S}_{p'}\mathfrak{S}_{q'})^n\mathfrak{S}_{p'}).$$

Как и выше, нетрудно показать, что G — бипримарная группа.

Пусть G — группа из пункта 3). Это значит, что

$$G \in \mathcal{M}(\bigcap_{i \in I} \mathfrak{F}_i)$$

где $\mathfrak{F}_i$ — формации из пунктов 1), 2). Очевидно, что найдется такое натуральное число $i \in I$, что

$$G \in \mathcal{M}(\mathfrak{F}_i).$$

Выше мы показали, что G — бипримарная группа. Теорема доказана.

Summary

V.N.Semenchuk. A Classification of subgroup-closed local formations whose critical groups are biprimary // Proc. Gomel State Univ. — 1999. — №1(15) Problems in Algebra. — P. 92–102

This work deals with solutions of the well-known problem of L.A.Shemetkov on the classification of local subgroup-closed formations whose critical groups are biprimary.

Литература

1. *Шмидт О.Ю.* Группы, все подгруппы которых специальные // Мат. сб. — 1924. — Т. 31. — N 3. — С.366–372.

2. *Ito N.* Note on (LM)-groups of finite order // Kodai Math. Sem. Rep. — 1951. — V.1 — 2. — P.1–6.

3. *Чунихина И.К., Чунихин С.А.* О p-разложимых группах // Мат. сборник. — 1944. — 15(57):2. — С.325–342.

4. Коуровская тетрадь (нерешенные вопросы теории групп). Новосибирск: Институт математики СО АН СССР, 1984. — 144 с.

5. *Carter R., Fisher B., Hawkes T.* Extreme classes of finite soluble groups // J. Algebra. — 1968. — V.9. — N 3. — P. 285–313.

6. *Шеметков Л.А.* Формации конечных групп. М.: Наука. — 1978. — 267 с.

7. *Шеметков Л.А., Скиба А.Н.* Формации алгебраических систем. М.: Наука. — 1989. — 256 с.

8. *Семенчук В.Н.* Минимальные не $\mathfrak{F}$-группы // Алгебра и логика. — 1979. — Т.18. — N 3. — С.348–382.

9. *Bryce R.A., Cossey J.* Subgroup closed Fitting classes are formations // Math. Proc.Camb. Phil Soc. — 1982. — V.91. — P.225–258.

10. *Семенчук В.Н.* О разрешимых тотально локальных формациях // Вопросы алгебры. Гомель. — 1997. — N 11. — С.109–115.

11. *Ballester-Bolinches A., Perez-Ramos M.D.* Two Questions of L.A.Shemetkov on Gritical Groups // J.Algebra. — 1996. — V. 179. — P. 905–917.

Гомельский государственный
университет им. Ф.Скорины

Поступило 15.07.99