

УДК 512.542

В. Н. Семенчук

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ ЛОКАЛЬНЫХ ФОРМАЦИЙ \mathfrak{F} ПО ЗАДАНЫМ СВОЙСТВАМ МИНИМАЛЬНЫХ НЕ \mathfrak{F} -ГРУПП

Изучение строения минимальных не \mathfrak{F} -групп, где \mathfrak{F} — локальная формация, имеет в теории конечных групп большую историю. В 1982 году на восьмом Всесоюзном симпозиуме по теории групп, Л.А.Шеметков отметил особую роль минимальных не \mathfrak{F} -групп в вопросах классификации формаций. Развитию этого направления и посвящена настоящая работа.

Множество всех непустых формаций можно разбить на следующие три непустых попарно непересекающихся класса.

Класс I — множество всех таких формаций \mathfrak{F} , для которых \mathfrak{F} -корадикал любой минимальной не \mathfrak{F} -группы не является силовской подгруппой.

Класс II — множество всех таких формаций \mathfrak{F} , для которых \mathfrak{F} -корадикал любой минимальной не \mathfrak{F} -группы является силовской подгруппой.

Класс III — множество всех таких формаций \mathfrak{F} , для которых найдутся, по крайней мере, две такие минимальные не \mathfrak{F} -группы \mathfrak{F} -корадикал одной является силовской подгруппой, а второй нет.

Формация всех разрешимых групп с p -длиной $\leq n$ (n — натуральное число), формация всех нильпотентных групп, формация всех метанильпотентных групп, соответственно, являются представителями первого, второго и третьего классов.

В настоящей работе получена характеристика локальных наследственных формаций из первого и второго классов. Все рассматриваемые группы конечны. Необходимые определения и обозначения можно найти в [1,2].

Напомним, что \mathfrak{S}_π — формация всех π -групп; $\pi(\mathfrak{F})$ — множество всех простых делителей порядков групп из \mathfrak{F} ; $\mathcal{M}(\mathfrak{F})$ — множество всех минимальных не \mathfrak{F} -групп, т.е. групп, не принадлежащих некоторому классу групп \mathfrak{F} , но все собственные подгруппы которых принадлежат \mathfrak{F} ; p' — множество всех простых чисел, отличных от простого числа p ; \mathfrak{S} — формация всех разрешимых групп, \mathfrak{N} — формация всех нильпотентных групп.

Пусть \mathfrak{F} и \mathfrak{X} — произвольные классы групп. Напомним, что через $\mathfrak{F}^{\mathfrak{X}}$ обозначается множество всех групп, у которых все \mathfrak{X} -подгруппы принадлежат \mathfrak{F} . Очевидно, что $\mathfrak{F}^{\mathfrak{X}}$ — наследственный класс. Известно (см. лемму 25.4 из [1]), что если \mathfrak{F} — формация, а \mathfrak{X} — насыщенный гомоморф, то $\mathfrak{F}^{\mathfrak{X}}$ — формация.

Обозначим через $\mathfrak{G}_{(n)}$ — множество всех таких групп, для которых $|\pi(G)| \leq n$. Легко проверить, что класс $\mathfrak{G}_{(n)}$ — насыщенный гомоморф. Положим также, что $\mathfrak{G}_{(0)} = 1$.

Теорема 1. Пусть \mathfrak{F} — локальная наследственная формация. Тогда и только тогда \mathfrak{F} -корадикал любой минимальной не \mathfrak{F} -группы является силовой подгруппой, когда:

$$1) \mathcal{M}(\mathfrak{F}) \subseteq \mathfrak{G}_{\mathfrak{F}};$$

2) формация \mathfrak{F} имеет полный локальный экран h такой, что $\mathcal{M}(h(p)) \subseteq \mathfrak{G}_{p'}$ для любого p из $\pi(\mathfrak{F})$.

Доказательство. Необходимость. Пусть f — максимальный внутренний локальный экран формации \mathfrak{F} . Пусть p — произвольное простое число из $\pi(\mathfrak{F})$. Так как $\mathfrak{G}_{p'}$ — насыщенный гомоморф, то по лемме 25.4 из [1] $f(p)^{\mathfrak{G}_{p'}}$ — формация.

Пусть \mathfrak{F}^* — формация, имеющая локальный экран h такой, что $h(p) = f(p)^{\mathfrak{G}_{p'}}$ для любого p из $\pi(\mathfrak{F})$. Покажем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^*$. Согласно теореме 4.7 из [1] $f(p)$ — наследственная формация для любого p из $\pi(\mathfrak{F})$. Отсюда, нетрудно заметить, что

$$f(p) \subseteq f(p)^{\mathfrak{G}_{p'}} = h(p)$$

для любого p из $\pi(\mathfrak{F})$. А это значит, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}^*$.

Пусть G — группа минимального порядка из $\mathfrak{F}^* \setminus \mathfrak{F}$. Так как $f(p)^{\mathfrak{G}_{p'}}$ — наследственная формация, то, очевидно, что \mathfrak{F}^* — наследственная формация. А это значит, что $G \in \mathcal{M}(\mathfrak{F})$ и $\Phi(G) = 1$. Покажем, что h — полный локальный экран, т.е. $\mathfrak{N}_p f(p)^{\mathfrak{G}_{p'}} = f(p)^{\mathfrak{G}_{p'}}$ для любого p из $\pi(\mathfrak{F})$. Действительно. Пусть X — произвольная группа из $\mathfrak{N}_p f(p)^{\mathfrak{G}_{p'}}$. Отсюда $X/O_p(X) \in f(p)^{\mathfrak{G}_{p'}}$. Пусть T — произвольная p' -группа из X . Так как

$$TO_p(X)/O_p(X) \in f(p)^{\mathfrak{G}_{p'}}$$

то

$$TO_p(X)/O_p(X) \in f(p).$$

Отсюда $T/O_p(X) \cap T \in f(p)$. Так как f — полный экран, то $T \in f(p)$. А это значит, что $X \in f(p)^{\mathfrak{G}_{p'}}$. Следовательно, $\mathfrak{N}_p f(p)^{\mathfrak{G}_{p'}} \subseteq f(p)^{\mathfrak{G}_{p'}}$. Отсюда нетрудно заметить, что $\mathfrak{N}_p f(p)^{\mathfrak{G}_{p'}} = f(p)^{\mathfrak{G}_{p'}}$. Теперь, согласно теореме 1.5 из [3]

$$G = G^{\mathfrak{F}} \lambda M,$$

где $G^{\mathfrak{F}}$ — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G , $G^{\mathfrak{F}}$ — p -группа и $M \in \mathcal{M}(h(p))$. Так как $C_G(G^{\mathfrak{F}}) = G^{\mathfrak{F}}$ и $G \in \mathfrak{F}^*$, то

$$G/C_G(G^{\mathfrak{F}}) = G/G^{\mathfrak{F}} \in h(p).$$

Отсюда $M \in h(p)$. Противоречие. Итак, $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^*$. Покажем, что $\mathcal{M}(h(p)) \subseteq \mathfrak{G}_{p'}$ для любого p из $\pi(\mathfrak{F})$. Пусть $K \in \mathcal{M}(h(p))$ и K — pd -группа. Пусть L — произвольная p' -подгруппа из K . Тогда $K \in h(p) = f(p)^{\mathfrak{G}_{p'}}$. Отсюда $K \in f(p)$. А это значит, что

$$K \in f(p)^{\mathfrak{G}_{p'}} = h(p).$$

Противоречие.

Достаточность. Пусть G — произвольная минимальная не \mathfrak{F} -группа. Так как $G^{\mathfrak{F}}$ разрешима, то по теореме 1.5. из [3]

$$G/\Phi(G) = G^{\mathfrak{F}}\Phi(G)/\Phi(G) \times M/\Phi(G),$$

где $G^{\mathfrak{F}}\Phi(G)/\Phi(G)$ — p -группа, $M/\Phi(G) \in \mathcal{M}(h(p))$. Согласно условию, $M/\Phi(G)$ — p' -группа. А это значит, что $G/\Phi(G)$ — p -замкнутая группа. Но тогда, G — p -замкнутая группа. Согласно лемме 1.6. из [3] $G^{\mathfrak{F}}$ — силовская подгруппа группы G . Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть \mathfrak{F} — локальная наследственная формация, f — её максимальный внутренний локальный экран. Тогда и только тогда \mathfrak{F} — корадикал любой минимальной не \mathfrak{F} -группы не является силовской подгруппой, когда $\mathfrak{G}_{p'} \cap \mathfrak{F} \subseteq f(p)$ для любого простого числа p .

Доказательство. Необходимость. В начале покажем, что характеристика формации \mathfrak{F} — множество всех простых чисел. Пусть q — простое число, не принадлежащее $\pi(\mathfrak{F})$. Очевидно, что группа Q порядка q является минимальной не \mathfrak{F} -группой, что не возможно. Пусть p — произвольное простое число. Предположим, что $\mathfrak{G}_{p'} \cap \mathfrak{F} \not\subseteq f(p)$. Пусть G — группа минимального порядка из $\mathfrak{G}_{p'} \cap \mathfrak{F} \setminus f(p)$. Так как $\mathfrak{G}_{p'} \cap \mathfrak{F}$ — наследственная формация, то $G \in \mathcal{M}(f(p))$. Пусть T — группа наибольшего порядка такая, что $G/T \notin f(p)$. Очевидно, что

$$T \subseteq \Phi(G) \text{ и } \overline{G} = G/\Phi(G) \in \mathcal{M}(f(p)).$$

Так как экран f полный, то, нетрудно показать, что $O_p(\overline{G}) = 1$ и \overline{G} имеет единственную минимальную нормальную подгруппу. Теперь, согласно лемме 18.8 из [2] существует точный неприводимый $F_p[\overline{G}]$ -модуль L , где F_p — поле из p элементов. Пусть $\Gamma = L \rtimes \overline{G}$. Поскольку $C_p(L) = L$ и $\overline{G} \notin f(p)$, то $\Gamma \notin \mathfrak{F}$.

Пусть H — собственная подгруппа из Γ . Покажем, что $H \in \mathfrak{F}$. Пусть $L \not\subseteq H$. Если $\Gamma = LH$, то $\Gamma/L \simeq H = \overline{G}$. Следовательно, $M \in \mathfrak{F}$. Пусть $LH \neq \Gamma$. Пусть H — собственная подгруппа из \overline{G} . А это значит, что $H \in f(p)$ и $LH/L \in f(p)$. Так как f — полный экран, то $LH \in f(p)$. Отсюда $HL \in \mathfrak{F}$. Ввиду наследственности формации \mathfrak{F} получаем, что $H \in \mathfrak{F}$.

Пусть теперь $L \subseteq H$. Так как $\Gamma/L \in \mathcal{M}(f(p))$, то $H/L \in f(p)$. Отсюда $H \in f(p) \subseteq \mathfrak{F}$. Итак, $\Gamma \in \mathcal{M}(\mathfrak{F})$. Так как Γ — p -замкнутая группа, то по лемме 1.6. из

[3] $G^{\mathfrak{F}}$ — p -силовская подгруппа группы Γ , что невозможно. Итак, $\mathfrak{S}_{p'} \cap \mathfrak{F} \subseteq f(p)$ для любого простого числа p .

Достаточность. Пусть G — произвольная минимальная не \mathfrak{F} -группа. Предположим, что $G^{\mathfrak{F}}$ — силовская подгруппа группы G . Согласно теореме 1.5 из [3]

$$G/\Phi(G) = G^{\mathfrak{F}}\Phi(G)/\Phi(G) \times M/\Phi(G),$$

где

$$M/\Phi(G) \in M(f(p)) \cap \mathfrak{F},$$

и $G^{\mathfrak{F}}$ является p -группой.

Так как $G^{\mathfrak{F}}\Phi(G)/\Phi(G)$ — силовская p -подгруппа группы G , то $M/\Phi(G)$ — p' -группа. Согласно условию $M/\Phi(G) \in \mathfrak{S}_{p'} \cap \mathfrak{F} \subseteq f(p)$, что невозможно. Теорема доказана.

Пусть \mathfrak{X} — некоторый класс групп. Обозначим $m(\mathfrak{X}) = \max(\pi(G) \mid G \in \mathcal{M}(\mathfrak{F}) \cap \mathfrak{S}\mathfrak{F})$.

Будем говорить, что класс \mathfrak{X} обладает свойством C_n , если $m(\mathfrak{X}) \leq n$ и каждая группа $G \in \mathcal{M}(\mathfrak{X}) \cap \mathfrak{S}\mathfrak{X}$, $|\pi(G)| = n$ p -замкнута для некоторого p из $\pi(G)$.

Например, формации всех нильпотентных, p -нильпотентных, p -разложимых групп обладают свойством C_2 . Формации всех сверхразрешимых, метанильпотентных групп обладают свойством C_3 . Формация всех разрешимых групп с нильпотентной длиной $\leq n$ (n — натуральное число) обладает свойством C_{n+1} . Но формация \mathfrak{F} всех разрешимых групп с p -длиной ≤ 1 имеет $m(\mathfrak{F}) \leq 2$, то свойством C_2 не обладает.

Теорема 3. Пусть \mathfrak{F} — наследственная локальная формация. Тогда и только тогда \mathfrak{F} обладает свойством C_{n+1} (n — натуральное число), когда \mathfrak{F} имеет полный локальный экран h такой, что $m(h(p)) \leq n$ для любого p из $\pi(\mathfrak{F})$.

Доказательство. Необходимость. Пусть f — максимальный внутренний локальный экран формации \mathfrak{F} , $\mathfrak{S}_{(n)}$ — множество всех групп G таких, что $|\pi(G)| \leq n$. Очевидно, что $\mathfrak{S}_{(n)}$ — насыщенный гомоморф. Согласно лемме 25.4 из [1] $f(p)^{\mathfrak{S}_{(n)}}$ — формация для любого p из $\pi(\mathfrak{F})$. Обозначим через \mathfrak{F}^* — локальную формацию, имеющую локальный экран h такой, что $h(p) = f(p)^{\mathfrak{S}_{(n)}}$ для любого p из $\pi(\mathfrak{F})$. Покажем, что $\mathfrak{S}\mathfrak{F} \cap \mathfrak{F}^* = \mathfrak{F}$. Пусть G — группа наименьшего порядка из $\mathfrak{S}\mathfrak{F} \cap \mathfrak{F}^* \setminus \mathfrak{F}$. Так как $f(p)^{\mathfrak{S}_{(n)}}$ — наследственная формация, то нетрудно показать, что \mathfrak{F}^* — наследственная формация. Ясно, что $\mathfrak{S}\mathfrak{F} \cap \mathfrak{F}^*$ — наследственная формация. Отсюда следует, что G — минимальная не \mathfrak{F} -группа. Очевидно, что $\Phi(G) = 1$. Согласно теореме 1.5 из [3]

$$G = G^{\mathfrak{F}} \times M,$$

где $G^{\mathfrak{F}}$ — единственная минимальная нормальная подгруппа G , $G^{\mathfrak{F}}$ — p -группа, $M \in M(f(p))$.

Рассмотрим следующие два случая:

1. $|\pi(G)| < n + 1$. Так как $G \in \mathfrak{F}^*$ и $C_G(G^{\mathfrak{F}}) = G^{\mathfrak{F}}$, то $G/G^{\mathfrak{F}} \in (f(p))^{\mathfrak{G}(n)}$. В силу построения формации $f(p)^{\mathfrak{G}(n)}$ получаем, что $G/G^{\mathfrak{F}} \in f(p)$. Так как $G/G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$, то, очевидно, что $G \in \mathfrak{F}$. Противоречие.

2. $|\pi(G)| = n + 1$. Тогда G имеет нормальную силовскую подгруппу G_p которая ввиду леммы 1.6 из [3] совпадает с $G^{\mathfrak{F}}$. Следовательно, $|\pi(G/G^{\mathfrak{F}})| = n$. Аналогично, как и в случае 1), нетрудно показать, что $G/G^{\mathfrak{F}} \in f(p)$. А это значит, что $G \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие. Итак, $\mathfrak{F}^* \cap \mathfrak{S}\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}$.

Покажем обратное. Пусть G — группа минимального порядка из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{F}^* \cap \mathfrak{S}\mathfrak{F}$. Очевидно, что $G \in \mathcal{M}(\mathfrak{F}^*)$ и $\Phi(G) = 1$. Как и в теореме 1 нетрудно показать, что h — полный локальный экран формации \mathfrak{F}^* . Очевидно, что группа G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу N .

Рассмотрим следующие два случая.

1) Пусть N — неабелева подгруппа. Тогда $C_G(N) = 1$. Так как группа G принадлежит формации \mathfrak{F} , то $G/C_G(N) \in f(p)$ для любого простого числа p из $\pi(N)$. Отсюда, нетрудно заметить, что

$$G \in f(p) \subseteq f(p)^{\mathfrak{G}(n)}$$

Ввиду того, что $G/N \in \mathfrak{F}^*$ и леммы 4.5 из [1] получаем, что $G \in \mathfrak{F}^*$. Получили противоречие.

2) Пусть N абелева подгруппа. По теореме 1.5 из [3] $G = N \rtimes M$, где N — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G , N — p -группа, $M \in \mathcal{M}(h(p))$. Так как $C_G(N) = N$, то по лемме 4.5 из [1] $G/N \in f(p)$. По теореме 4.7 из [1] $f(p)$ — наследственная формация. А это значит, что

$$f(p) \subseteq f(p)^{\mathfrak{G}(n)}.$$

Отсюда $G/N \in f(p)^{\mathfrak{G}(n)}$. Так как $G/N \in \mathfrak{F}^*$, то по лемме 4.5 из [1] получаем, что $G \in \mathfrak{F}^*$. Противоречие. Итак, $\mathfrak{F}^* \cap \mathfrak{S}\mathfrak{F} = \mathfrak{F}$.

Достаточность. Пусть формация \mathfrak{F} имеет полный локальный экран h такой, что $m(h(p)) \leq n$ для любого p из $\pi(\mathfrak{F})$. Пусть $G \in \mathcal{M}(\mathfrak{F}) \cap \mathfrak{S}\mathfrak{F}$. По теореме 1.5 из [3]

$$G/\Phi(G) = G^{\mathfrak{F}}\Phi(G)/\Phi(G) \rtimes M/\Phi(G),$$

где $G^{\mathfrak{F}}\Phi(G)/\Phi(G)$ — p -группа, а $M/\Phi(G) \in \mathcal{M}(h(p))$. Отсюда следует, что

$$|\pi(G)| = |\pi(G/\Phi(G))| \leq n + 1.$$

Пусть $|\pi(G)| = n + 1$. Так как $|\pi(M/\Phi(G))| \leq n$, то $G^{\mathfrak{F}}\Phi(G)/\Phi(G)$ — силовская подгруппа $G/\Phi(G)$. А это значит, что G — p -замкнутая группа. Теорема доказана.

Пусть \mathfrak{F} и \mathfrak{G} локальные формации. Напомним, что формация \mathfrak{F} называется \mathfrak{G} -формацией с условием Шеметкова, если любая минимальная не \mathfrak{F} -группа из \mathfrak{G} является группой Шмидта, либо группой простого порядка. В работе [4] получено описание $\mathfrak{G}\mathfrak{F}$ -формаций с условием Шеметкова. Все такие формации имеют следующее строение $\mathfrak{F} = \cap \mathfrak{G}_{p'} \mathfrak{G}_{\pi(f(p))} \cap \mathfrak{G}_{\pi(\mathfrak{F})}$, где f — максимальный внутренний локальный экран формации \mathfrak{F} , а p — любое простое число из $\pi(\mathfrak{F})$.

Теорема 4. Пусть \mathfrak{F} — локальная наследственная формация, имеющая локальный экран h такой, что $\mathfrak{N}_{\pi(f(p))} \subseteq h(p)$ для любого простого p из $\pi(\mathfrak{F})$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1. формация \mathfrak{F} обладает свойством C_2 ;
2. формация \mathfrak{F} — $\mathfrak{G}\mathfrak{F}$ -формация с условием Шеметкова.

Доказательство. Покажем, что из 1) следует 2). Пусть G — произвольная группа из $M(\mathfrak{F}) \cap \mathfrak{G}\mathfrak{F}$. Очевидно, что если $\pi(G) \cap \pi(\mathfrak{F}) \neq \emptyset$, то $|G| = q$, где $q \notin \pi(\mathfrak{F})$. Следовательно, мы можем считать, что $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$. Так как формация \mathfrak{F} обладает свойством C_2 , то $|\pi(G)| \leq 2$. Если G — p -группа, то из локальности формации \mathfrak{F} следует, что $G \in \mathfrak{F}$. Получим противоречие. Следовательно, G — бипримарная группа. Но тогда $G = G_p \times G_q$. Рассмотрим подгруппу $\bar{G} = G/\Phi(G)$. Очевидно, что $\bar{G} \in M(\mathfrak{F}) \cap \mathfrak{G}\mathfrak{F}$ и $\bar{G} = \bar{G}_p \times \bar{G}_q$. Согласно теореме 1.5 из [3] $\bar{G}_q \in M(h(p))$ и \bar{G}_p — единственная минимальная нормальная подгруппа из \bar{G} .

Пусть $q \in \pi(h(p))$. Но тогда, согласно условию $\bar{G}_q \in h(p)$, что невозможно.

Пусть теперь $q \notin \pi(h(p))$. Тогда, очевидно, что $|\bar{G}_q| = q$. Отсюда нетрудно показать, что любая максимальная подгруппа из \bar{G} — примарна. Итак, \bar{G} — группа Шмидта. Согласно лемме 4 из [5] G — группа Шмидта. Следовательно, \mathfrak{F} — $\mathfrak{G}\mathfrak{F}$ -формация с условием Шеметкова. Очевидно, что из 2) следует 1). Теорема доказана.

Summary

V.N.Semenchuk. A characterization of local formations by given properties of minimal non- \mathfrak{F} -groups // Proc. Gomel State Univ. — 1999. — №1(15) Problems in Algebra. — P. 85–91

All groups considered are groups. The set of all non-empty formations we can desompose to the next three non-empty classes:

class I is a set of all such formations \mathfrak{F} such that \mathfrak{F} -residual of every minimal non- \mathfrak{F} -group is not Sylow subgroup;

class II is a set of all formations \mathfrak{F} such that \mathfrak{F} -residual of any minimal non- \mathfrak{F} -group is a Sylow subgroups;

class III is a set of all formations \mathfrak{F} such that there exist at least two minimal non- \mathfrak{F} -groups such that \mathfrak{F} -residual one of them is a Sylow subgroup but for other it is not true.

At present paper a characterization of local subgroup-closed formations from I and II is obtained.

Литература

1. Шеметков Л.А. Формации конечных групп. М.: Наука. — 1978. — 267 с.
2. Шеметков Л.А., Скиба А.Н. Формации алгебраических систем. М.: Наука. — 1989. — 256 с.
3. Семенчук В.Н. Минимальные не \mathfrak{F} -группы // Алгебра и логика. 1979. Т.18. №3, С. 348-382.
4. Семенчук В.Н. Об одной проблеме в теории формаций // Весці АН Беларусі, серыя фізіка-матэматычных навук. 1996. №3. С. 25-29.
5. Семенчук В.Н. Описание разрешимых минимальных не \mathfrak{F} -групп для произвольной totally локальной формации // Мат.заметки. 1988. Т.43, вып.4. С. 452-459.

Гомельский государственный
университет им. Ф.Скорины

Поступило 22.06.99