Лекция 3
Решение систем алгебраических уравнений в средах MS Excel и Mathcad

Лектор

Ст. преподаватель Купо А.Н.

1. Понятие системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Постановка задачи.
2. Методы решения СЛАУ.(Метод обратной матрицы)
3. Решение СЛАУ методом Крамера.
4. Решение СЛАУ методом Гаусса.
5. Итерационный метод Гауса-Зейделя.
6. Решение систем нелинейных уравнений.
7. Работа с векторами и матрицами в системе Mathcad.

Общие сведения о решении СЛАУ

75% всех расчетных математических задач приходится на решение СЛАУ. Это понятно, поскольку чаще всего сразу строят наиболее простые математические модели реальных процессов, т.е. линейные модели.

С решением СЛАУ связаны такие задачи, как вычисление определителей, обращение матриц, вычисление собственных значений и собственных векторов матриц, интерполирование, аппроксимация по методу наименьших квадратов и многие другие.

Постановка задачи. Методы решения

Определение. Системой линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) называется совокупность равенств вида:

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + \ldots + a_{1,n}x_n = b_1, \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 + \ldots + a_{2,n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + a_{m,3}x_3 + \ldots + a_{m,n}x_n = b_m, \end{cases} \qquad (2.1)$$

Постановка задачи. Методы решения

Переменные $x_2, x_2, ..., x_n$ этой совокупности равенств называются неизвестными, переменные $a_{i,j}$, $i, j = \overline{1,n}$, – коэффициентами, а переменные b_i, $i = \overline{1,n}$, – свободными членами СЛАУ. Значения $x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*$ переменных $x_1, x_2, ..., x_n$, которые обращают равенства в тождества, называются решением СЛАУ. Таким образом, задача решения СЛАУ состоит в том, чтобы по известным коэффициентам системы $a_{i,j}$, $i, j = \overline{1,n}$, и свободным членам b_i, $i = \overline{1,n}$, найти значения переменных $x_2, x_2, ..., x_n$, обращающие равенства в тождества.

Постановка задачи. Методы решения

СЛАУ вида – это система m уравнений с n неизвестными. Не останавливаясь на общей теории таких систем уравнений, в дальнейшем ограничимся рассмотрением системы n уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + \ldots + a_{1,n}x_n = b_1, \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 + \ldots + a_{2,n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + a_{n,3}x_3 + \ldots + a_{n,n}x_n = b_n \end{cases} \qquad (2.2)$$

Эту систему уравнений можно записать в краткой форме

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j = b_i, \; i = \overline{1,n}, \; j = \overline{1,n}. \qquad (2.3)$$

Постановка задачи. Методы решения

Часто систему записывают в векторно-матричной форме. Для этого вводят в рассмотрение $(n \times n)$-матрицу коэффициентов $A = (a_{i,j})$ и векторы-столбцы неизвестных $X = (x_j)$ и свободных членов $B = (b_i)$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,n}$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}, \quad X = (x_j) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = (b_i) = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Постановка задачи. Методы решения

Тогда СЛАУ (2.2) записывается в виде

$$AX = B, \tag{2.4}$$

поскольку сумма в левой части выражения (2.3) есть формула для расчета элементов матрицы AX.

Если определитель матрицы A не равен нулю ($\det(A) = |A| \neq 0$), то система (2.2) (или (2.4)) имеет единственное решение, которое определяется формулой

$$X = A^{-1}B, \tag{2.5}$$

где A^{-1} – матрица, обратная матрице A.

Метод Крамера

Известно правило Крамера для решения СЛАУ (2.4), в соответствии с которым неизвестные определяются по формуле:

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad i = \overline{1, n}, \tag{2.6}$$

где $\Delta = \det(A)$ – определитель матрицы A, а Δ_i – определитель матрицы A, в которой столбец коэффициентов при x_i заменен столбцом свободных членов.

Метод Крамера. Недостатки.

1. Большая трудоемкость (вычислительная сложность)

Если при реализации формул Крамера определители вычислять путем понижения порядка, т.е. путем разложения по элементам какой-нибудь строки или какого-нибудь столбца, то на вычисление определителя потребуется n! операций умножения, а на решение СЛАУ – $n!\cdot n$ таких операций. Факториальный рост количества арифметических операций с увеличением размерности задачи (и вообще очень быстрый рост) называется «проклятьем размерности».

2. Сильное влияние на окончательный результат округлений

Погрешности за счет округлений катастрофически нарастают с увеличением числа переменных

В связи с указанными недостатками классических методов разработаны и применяются другие методы решения СЛАУ.

Все методы решения СЛАУ можно разделить на ***конечные*** и ***итерационные***. ***Конечные*** методы называются также точными. ***Точные методы*** – это методы, которые в условиях отсутствия округлений приводят к точному решению за конечное число арифметических и логических операций. ***Итерационные методы*** – это методы, которые в условиях отсутствия округлений могут привести к точному решению путем бесконечного повторения единообразных действий (итераций).

При наличии округлений и точные, и итерационные методы приведут к приближенному решению.

Метод исключения Гаусса

Метод состоит из двух этапов, которые называются прямым и обратным ходом. В процессе прямого хода система уравнений путем исключения переменных приводится к так называемому верхнему треугольному виду. В процессе обратного хода находится решение системы.

Прямой ход состоит из $n-1$ шагов $k=1,2,...,n-1$. На шаге $k=1$ исключается неизвестная x_1 из всех уравнений, начиная со второго. На шаге $k=2$ исключается x_2 из всех уравнений, начиная с третьего. На любом k-м шаге исключается x_k, из всех уравнений, начиная $k+1$ уравнения. На последнем шаге $k=n-1$ исключается x_{n-1} из последнего уравнения. В результате выполнения прямого хода мы получаем систему уравнений с так называемой верхней треугольной матрицей коэффициентов.

Обратный ход позволяет последовательно получить неизвестные системы уравнений. Сначала определяют x_n из последнего n-го уравнения. Затем это значение подставляют в $(n-1)$-е уравнение и определяют x_{n-1}, и т. д., до определения x_1 из первого уравнения.

Расчетные формулы метода Гаусса

Прямой ход базируется на том, что решение системы уравнений не изменится, если из некоторого уравнения вычесть любое другое уравнение, умноженное на некоторый коэффициент. Коэффициенты подбираются таким образом, чтобы при вычитании исключались определенные переменные.

Расчетные формулы метода Гаусса

На первом шаге для i-го уравнения начиная с $i = 2$ вводится коэффициент

$$m_i^{(1)} = \frac{a_{i1}}{a_{11}}, \quad i = \overline{2,n},$$

и из i-го уравнения вычитается 1-е уравнение, умноженное на этот коэффициент. Результирующее уравнение записывается на место i-го. Это приводит к исключению переменной x_1 из i-го уравнения. После этого шага система уравнений примет следующий вид:

$$\begin{aligned}
a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + \ldots + a_{1,n}x_n &= b_1, \\
a_{2,2}^{(1)}x_2 + a_{2,3}^{(1)}x_3 + \ldots + a_{2,n}^{(1)}x_n &= b_2^{(1)}, \\
a_{3,2}^{(1)}x_2 + a_{3,3}^{(1)}x_3 + \ldots + a_{3,n}^{(1)}x_n &= b_3^{(1)}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{n,2}^{(1)}x_2 + a_{n,3}^{(1)}x_3 + \ldots + a_{n,n}^{(1)}x_n &= b_n^{(1)},
\end{aligned}$$

где $a_{i,j}^{(1)}, b_i^{(1)}$ – коэффициенты, полученные на первом шаге прямого хода. Они определяются следующими выражениями:

$$a_{i,j}^{(1)} = a_{i,j} - m_i^{(1)} a_{1,j},$$

$$b_i^{(1)} = b_i - m_i^{(1)} b_1,$$

$$i = \overline{2,n}, \quad j = \overline{1,n}.$$

Расчетные формулы метода Гаусса

На втором шаге для i-го уравнения начиная с $i = 3$ вводится коэффициент

$$m_i^{(2)} = \frac{a_{i,2}^{(1)}}{a_{2,2}^{(1)}}, \quad i = \overline{3,n},$$

и из i-го уравнения вычитается 2-е уравнение, умноженное на этот коэффициент. Это приводит к исключению из i-го уравнения переменной x_2. После второго шага система уравнений примет вид

$$\begin{aligned}
a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + \ldots + a_{1,n}x_n &= b_1, \\
a_{2,2}^{(1)}x_2 + a_{2,3}^{(1)}x_3 + \ldots + a_{2,n}^{(1)}x_n &= b_2^{(1)}, \\
a_{3,3}^{(2)}x_3 + \ldots + a_{3,n}^{(2)}x_n &= b_3^{(2)}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
a_{n,3}^{(2)}x_3 + \ldots + a_{2,n}^{(2)}x_n &= b_n^{(2)},
\end{aligned}$$

где $a_{i,j}^{(2)}, b_i^{(2)}$ – коэффициенты, полученные на втором шаге прямого хода. Они определяются выражениями

$$a_{i,j}^{(2)} = a_{i,j}^{(1)} - m_i^{(2)} a_{2,j}^{(1)},$$

$$b_i^{(2)} = b_i^{(1)} - m_i^{(2)} b_2^{(1)},$$

$$i = \overline{3,n}, \quad j = \overline{2,n}.$$

Расчетные формулы метода Гаусса

Теперь выполняется *обратный ход*. Видно, что из последнего уравнения можно сразу определить x_n,

$$x_n = \frac{b_n^{(n-1)}}{a_{n,n}^{(n-1)}}.$$

Подставляя это значение в предпоследнее уравнение, находим x_{n-1},

$$x_{n-1} = \frac{b_{n-1}^{(n-2)} - a_{n-1,n}^{(n-2)} x_n}{a_{n-1,n-1}^{(n-2)}}.$$

Для нахождения любой переменной x_j применяется формула

$$x_j = \frac{b_j^{(j-1)} - a_{j,j+1}^{(j-1)} x_{j+1} - \ldots - a_{j,n}^{(j-1)} x_n}{a_{j,j}^{(j-1)}}, \quad j = n-1, n-2, \ldots, 1.$$

Расчетные формулы метода Гаусса

Метод исключения Гаусса требует приблизительно n^2 ячеек памяти. Реализация прямого хода требует выполнения приблизительно $\frac{2}{3}n^3$ арифметических операций, а обратного – приблизительно n^2 арифметических операций.

Замечание. В процессе решения СЛАУ легко может быть получен определитель системы $\det(A)$. Он равен произведению диагональных элементов матрицы верхней треугольной системы:

$$\det(A) = a_{1,1}a_{2,2}^{(1)}a_{3,3}^{(2)}\ldots a_{n,n}^{(n-1)}.$$

Обращение матрицы

Матрица A^{-1} называется обратной матрице $A=(a_{i,j}), i,j=\overline{1,n}$, если выполняется соотношение

$$AA^{-1}=E, \tag{2.8}$$

где E – единичная матрица. Обозначим $A^{-1}=(a^{i,j})$, $E=(\delta_{i,j})$, $i,j=\overline{1,n}$, где $\delta_{i,j}$ – символ Кронекера,

$$\delta_{i,j}=\begin{cases}1, & если \ \ i=j,\\ 0, & если \ \ i\neq j.\end{cases}$$

Тогда соотношение (2.8) можно записать так:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}a^{k,j}=\delta_{i,j}, \quad i,j=\overline{1,n}. \tag{2.9}$$

Из этого выражения видно, что если рассматривать j-й столбец $a^{k,j}$ обратной матрицы как вектор, то он является решением системы линейных алгебраических уравнений (2.9) с матрицей A и вектором правой части, все элементы которого равны нулю, кроме j-го, который равен 1. Таким образом, элементы обратной матрицы могут быть получены решением системы линейных алгебраических уравнений.

Метод Гаусса-Зейделя – это итерационный метод решения задачи, или метод последовательных приближений.

Пусть решается система уравнений (2.1). Выразим из 1-го уравнения x_1, из 2-го уравнения x_2 и т.д. В результате получим

$$x_1 = \frac{1}{a_{1,1}}(b_1 - a_{1,2}x_2 - a_{1,3}x_3 - \ldots - a_{1,n}x_n),$$

$$x_2 = \frac{1}{a_{2,2}}(b_2 - a_{2,1}x_1 - a_{2,3}x_3 - \ldots - a_{2,n}x_n),$$

………………………………………………

$$x_n = \frac{1}{a_{n,n}}(b_n - a_{n,1}x_1 - a_{n,2}x_2 - \ldots - a_{n,n-1}x_{n-1}),$$

или вообще для любого i

$$x_i = \frac{1}{a_{i,i}}(b_i - a_{i,1}x_1 - a_{i,2}x_2 - \ldots - a_{i,i-1}x_{i-1} - a_{i,i+1}x_{i+1} - \ldots - a_{i,n}x_n), \quad i = \overline{1,n}. \qquad (2.8)$$

Метод Гаусса-Зейделя

Предположим, что на некоторой k-й итерации мы получили решение $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}$. Используем известные к моменту расчета x_i значения других переменных в правой части уравнения (2.8) для расчета значения x_i в левой части. В результате мы получим следующую рекуррентную формулу, которая и составляет метод Гаусса-Зейделя:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{i,i}}(b_i - a_{i,1}x_1^{(k+1)} - \ldots - a_{i,i-1}x_{i-1}^{(k+1)} - a_{i,i+1}x_{i+1}^{(k)} - \ldots - a_{i,n}x_n^{(k)}), \quad i = \overline{1,n}.$$

Расчеты по последней формуле продолжаются при $k = 1,2,3,\ldots$ до тех пор, пока не будет выполняться условие

$$\max_i |x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}| < \varepsilon,$$

или условие

$$\max_i \left|\frac{x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}}{x_i^{(k+1)}}\right| < \delta,$$

где $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, причем ε – допустимая абсолютная погрешность нахождения решения СЛАУ, а δ – допустимая относительная погрешность.

Решение систем нелинейных уравнений

Систему нелинейных уравнений можно кратко записать в векторном виде ***f (x) = 0*** или более подробно в координатном виде $f_k(x_1, x_2, \ldots, x_m) = 0, \; 1 \le k \le m$

Такие системы решают практически **только итерационными методами.** Для такой системы используют метод простой итерации. Для этого систему приводят к ниже указанному виду т.е. к **канонической форме:**

$$x_1 = \phi_1(x_1, x_2, \ldots x_m)$$

$$x_2 = \phi_2(x_1, x_2, \ldots x_m)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_m = \phi_m(x_1, x_2, \ldots x_m)$$