

Лекция 5

Интерполяция функций и данных

Лектор

Ст. преподаватель Купо А.Н.

1. Постановка задачи интерполирования.
2. Понятие аппроксимации.
3. Интерполяционные полиномы Лагранжа и Ньютона.
4. Встроенные функции для выполнения интерполяции.
4. Интерполяция сплайнами.

Аппроксимация функции $y = f(x)$ – это замена этой функции другой более простой функцией $y = \varphi(x)$, близкой к $f(x)$ в некотором смысле. В зависимости от критерия близости функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ существуют различные методы аппроксимации.

Если расстояние ρ между функциями $f(x)$ и $\varphi(x)$ на некотором отрезке $[a, b]$ действительной прямой определить выражением

$$\rho(f(x), \varphi(x)) = \int_a^b (f(x) - \varphi(x))^2 dx,$$

то аппроксимация функции $f(x)$ по критерию минимума такого расстояния ρ будет называться **аппроксимацией с минимальной интегральной квадратичной погрешностью**.

Если критерий близости функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ состоит в том, чтобы $f(x)$ и $\varphi(x)$ совпадали в дискретном ряде точек $x_0, x_1, \dots, x_n$ отрезка $[a, b]$, то такой способ аппроксимации функции $f(x)$ называется **интерполированием** функции $f(x)$.

Если расстояние ρ между функциями $f(x)$ и $\varphi(x)$ на некотором отрезке $[a, b]$ действительной прямой определить выражением

$$\rho(f(x), \varphi(x)) = \sum_{i=0}^n (f(x_i) - \varphi(x_i))^2,$$

то аппроксимация функции $f(x)$ по критерию минимума такого расстояния ρ будет называться **аппроксимацией по методу наименьших квадратов**.

Задача интерполирования функции $f(x)$ на некотором отрезке формулируется следующим образом. На отрезке $[a, b]$ задано $n + 1$ точек $x_0, x_1, \dots, x_n \in [a, b]$, которые называют узлами. Обычно считают, что первая и последняя точки совпадают с концами отрезка $[a, b]$: $x_0 = a$, $x_n = b$. Известны значения $y_i = f(x_i)$ функции $f(x)$ в этих точках, $i = \overline{0, n}$. Требуется найти такую функцию $\varphi(x)$ некоторой другой функцией $\varphi(x)$ таким образом, чтобы значения обеих функций совпадали в узлах, т.е. чтобы выполнялись равенства

$$\varphi(x_i) = f(x_i) = y_i, \quad i = \overline{0, n}.$$

Искомой неизвестной в данной задаче является функция $\varphi(x)$.



Сформулированную задачу иногда интерпретируют следующим образом.

Некоторая функция $f(x)$ задана на отрезке $[a, b]$ таблицей своих значений

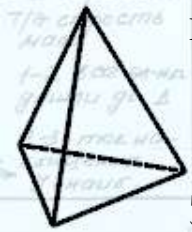
x_i	x_0	x_1	x_2	...	x_n
$y_i = f(x_i)$	y_0	y_1	y_2	...	y_n

и требуется найти способ определения значений этой функции в любых других точках отрезка $[a, b]$.

При формулировке задачи интерполирования обычно предполагают, что аппроксимирующая функция $\varphi(x)$ задана с точностью до $(n+1)$ параметров $a_0, a_1, \dots, a_{n+1}$, т.е. в виде $\varphi(x, a_0, a_1, \dots, a_n)$. Тогда нам необходимо отыскать неизвестные параметры $a_0, a_1, \dots, a_n$ исходя из заданных равенств

$$\varphi(x_i, a_0, a_1, \dots, a_n) = y_i, \quad i = \overline{0, n}. \quad (3.1)$$

Эти равенства можно рассматривать как систему $n+1$ уравнений относительно неизвестных параметров $a_0, a_1, \dots, a_n$.



Чаще всего функцию $\varphi(x, a_0, a_1, \dots, a_n)$ представляют **в виде полинома n -й степени**

$$\varphi(x, a_0, a_1, \dots, a_n) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n. \quad (3.2)$$

Тогда система уравнений (3.1) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \dots + a_n x_0^n &= y_0, \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \dots + a_n x_1^n &= y_1, \\ &\dots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \dots + a_n x_n^n &= y_n. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Определитель этой системы имеет вид

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{vmatrix}$$

и называется определителем Вандермонда на системе точек

Интерполяционный полином Лагранжа

Интерполяционный полином может быть представлен в различных ф

Одной из них является форма Лагранжа. **Полином Лагранжа** имеет следу

вид:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i \frac{(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_n)},$$

или в компактной форме

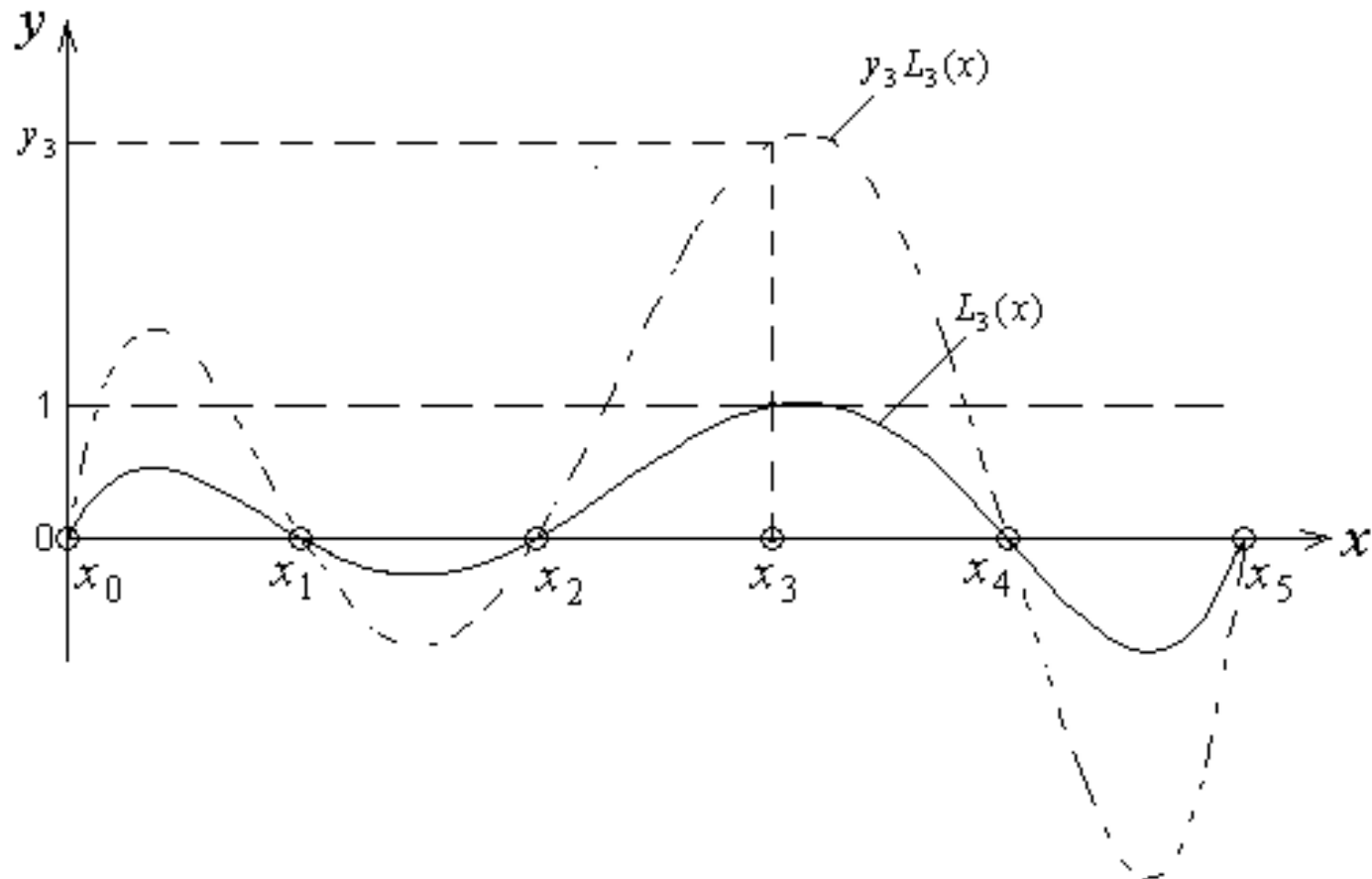
$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} = \sum_{i=0}^n y_i L_i(x),$$

где

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}, \quad i = \overline{0, n},$$

так называемый полином влияния i -го узла.

Полином влияния i -го узла $L_i(x)$ есть полином n -й степени, который равен нулю во всех узлах, кроме x_i , а в узле x_i равен 1. Вид этого полинома приведен на рисунке 3.1 для случая $i = 3$. Произведение $y_i L_i(x)$ есть полином n -й степени, который во всех узлах, кроме x_i , равен нулю, а в узле x_i равен y_i . На рисунке 3.1 изображен полином $y_3 L_3(x)$. Просуммировав произведения $y_i L_i(x)$ по всем i (по всем узлам), мы получим полином (3.4), удовлетворяющий постановке задачи интерполирования. Следовательно, построенный полином будет интерполяционным.



Пример. Построим полином Лагранжа для функции, заданной таблицей

Таблица

x_i	$x_0 = -2$	$x_1 = -1$	$x_2 = 3$
y_i	$y_0 = 12$	$y_1 = 6$	$y_2 = 2$

Поскольку мы имеем $n = 2$, то ожидаем интерполяционный полином второй степени. Общая формула этого полинома следующая:

$$P_2(x) = y_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + y_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + y_2 \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}.$$

Подставив сюда данные из таблицы, получим

$$\begin{aligned} P_2(x) &= 12 \frac{(x+1)(x-3)}{(-2+1)(-2-3)} + 6 \frac{(x+2)(x-3)}{(-1+2)(-1-3)} + 2 \frac{(x+2)(x+1)}{(3+2)(3+1)} = \\ &= 12 \frac{x^2 - 2x - 3}{5} + 6 \frac{x^2 - x - 6}{-4} + 2 \frac{x^2 + 3x + 2}{20} = \\ &= \frac{48x^2 - 96x - 144 - 30x^2 + 30x + 180 + 2x^2 + 6x + 4}{20} = x^2 - 3x + 2. \end{aligned}$$

Легко обнаружить, что этот полином в узлах имеет значения, приведенные в таблице.

Интерполяционный полином Ньютона

$x_0, x_1, x_2, \dots$ — точки действительной прямой и $y_i = f(x_i)$, $i = 0, 1, \dots$.

Значения функции $f(x)$ в этих точках. Назовем значения $f(x_i)$ **конечными разностями нулевого порядка** функции $f(x)$. Конечными разностями

первого порядка функции $f(x)$ называются приращения

$$\Delta f(x_i) = f(x_{i+1}) - f(x_i), \quad i = 0, 1, \dots$$

Конечные разности второго порядка определяются как конечные разности

первых разностей первого порядка:

$$\Delta^{(2)} f(x_i) = \Delta(\Delta f(x_i)) = \Delta f(x_{i+1}) - \Delta f(x_i) =$$

$$f(x_{i+2}) - f(x_{i+1}) - f(x_{i+1}) + f(x_i) = f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i), \quad i = 0, 1, \dots$$

Конечные разности третьего порядка определяются как конечные разности

вторых разностей второго порядка:

$$\Delta^{(3)} f(x_i) = \Delta(\Delta^{(2)} f(x_i)), \quad i = 0, 1, \dots$$

Введем понятие **разделенных разностей** функции $f(x)$. Назовем значения $f(x_i)$ в точках x_i , $i = 0, 1, \dots$, **разделенными разностями нулевого порядка** функции $f(x)$. **Разделенными разностями первого порядка** функции $f(x)$ называются отношения

$$f(x_i, x_{i+1}) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Разделенными разностями второго порядка функции $f(x)$ называются отношения

$$f(x_i, x_{i+1}, x_{i+2}) = \frac{f(x_{i+1}, x_{i+2}) - f(x_i, x_{i+1})}{x_{i+2} - x_i}, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Вообще, **разделенные разности n -го порядка** определяются через разделенные разности $(n-1)$ -го порядка с помощью рекуррентного соотношения

$$f(x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+n}) = \frac{f(x_{i+1}, \dots, x_{i+n}) - f(x_i, \dots, x_{i+n-1})}{x_{i+n} - x_i}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Разделенные разности $f(x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+n})$ являются симметричными



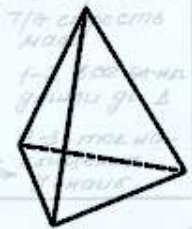
функциями своих аргументов, т.е. не меняются при их перестановке.

$$f(x_i, x_{i+1}) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} = \frac{f(x_i) - f(x_{i+1})}{x_i - x_{i+1}} = f(x_{i+1}, x_i)$$

Если $P_n(x)$ – полином степени n , то можно показать, что его разность $(n+1)$ -го порядка тождественно равна нулю,

$$P_n(x, x_0, x_1, \dots, x_n) = 0,$$

для любой системы попарно различных точек $x, x_0, x_1, \dots, x_n$.



$$f(x_i, x_{i+1}, x_{i+2}) = \frac{\Delta^{(2)} f(x_i)}{2! h^2}, i = 0, 1, 2, \dots$$

Вообще справедлива формула

$$f(x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) = \frac{\Delta^{(n-i)} f(x_i)}{(n-i)! h^{n-i}}, i = 0, 1, 2, \dots,$$

которая при $i = 0$ приобретает вид

$$f(x_0, x_1, \dots, x_n) = \frac{\Delta^{(n)} f(x_0)}{n! h^n}. \quad (3.8)$$

Из приведенного изложения можно видеть, что **конечные и разделенные разности являются прообразами производных**. Действительно, производная n -го порядка получается при равномерном шаге h из конечной разности n -го порядка путем предельного перехода

$$f^{(n)}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta^{(n)} f(x)}{h^n}.$$



Пусть в точках $x_0, x_1, \dots, x_n$ отрезка $[a, b]$ известны значения $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$ функции $f(x)$. Построим по этим данным **интерполяционный полином $P_n(x)$ в форме Ньютона**. Построение основывается на том, что разделенные разности интерполяционного полинома и функции совпадают

Запишем разделенную разность первого порядка для полинома $P_n(x)$:

$$P_n(x, x_0) = \frac{P_n(x) - P_n(x_0)}{x - x_0}.$$

Отсюда

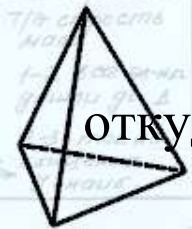
$$P_n(x) = P_n(x_0) + P_n(x, x_0)(x - x_0). \quad (3)$$

Разделенная разность произвольного порядка имеет вид

$$P_n(x, x_0, \dots, x_m) = \frac{P_n(x, x_0, \dots, x_{m-1}) - P_n(x_0, x_1, \dots, x_m)}{x - x_m},$$

откуда

$$P_n(x, x_0, \dots, x_{m-1}) = P_n(x_0, x_1, \dots, x_m) + P_n(x, x_0, \dots, x_m)(x - x_m).$$

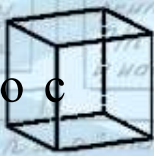


полином Ньютона для не равноотстоящих узлов, выраженный через разделенные разности в начальной точке x_0 :

$$P_n(x) = f(x_0) + f(x_0, x_1)(x - x_0) + f(x_0, x_1, x_2)(x - x_0)(x - x_1) + \dots \\ + f(x_0, x_1, \dots, x_n)(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}).$$

Отметим, что при выводе формулы полинома Ньютона мы не предполагаем, что узлы располагаются в порядке возрастания. Поэтому порядок узлов в выражении полинома Ньютона можно изменять. Изменив порядок узлов на обратный, мы получим следующее выражение полинома Ньютона, записанное через разделенные разности в конечной точке x_n :

$$P_n(x) = f(x_n) + f(x_n, x_{n-1})(x - x_n) + f(x_n, x_{n-1}, x_{n-2})(x - x_n)(x - x_{n-1}) + \dots \\ + f(x_n, x_{n-1}, \dots, x_0)(x - x_n)(x - x_{n-1}) \cdots (x - x_0).$$



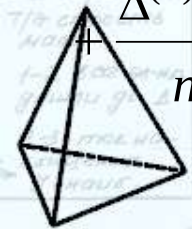
Если точки $x_0, x_1, \dots, x_n$ отстоят одна от другой на равном расстоянии h , то с учетом равенства (3.8) получаем полином Ньютона, выраженный через конечные разности в начальной точке x_0 :

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{\Delta f(x_0)}{1!h} (x - x_0) + \frac{\Delta^{(2)} f(x_0)}{2!h^2} (x - x_0)(x - x_1) + \dots + \frac{\Delta^{(n)} f(x_0)}{n!h^n} (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}). \quad (3.14)$$

Аналогичным образом получаем полином Ньютона, выраженный через конечные разности в конечной точке x_n :

$$P_n(x) = f(x_n) + \frac{\Delta f(x_n)}{1!h} (x - x_n) + \frac{\Delta^{(2)} f(x_n)}{2!h^2} (x - x_n)(x - x_{n-1}) + \dots$$

$$+ \frac{\Delta^{(n)} f(x_n)}{n!h^n} (x - x_n)(x - x_{n-1}) \cdots (x - x_0).$$



Полиномы Ньютона удобны тогда, когда необходимо изменять количество узлов интерполирования. При увеличении количества узлов необходимости пересчитывать весь полином, достаточно прибавить к нему новые слагаемые, соответствующие новым узлам. В случае полинома Лагранжа при добавлении новых узлов приходится пересчитывать весь полином.

Полиномы (3.12), (3.14), полученные по разностям в начальной точке x_0 , используются для интерполирования функции вблизи начальной точки x_0 , а полиномы (3.13), (3.15), полученные по разностям в конечной точке x_n , — для интерполирования вблизи конечной точки x_n .

Пример 2. Построим интерполяционный полином Ньютона по данным примера. Для этого по таблице составим таблицу разделенных разностей

Таблица

x_i	$f(x_i)$	$f(x_i, x_{i+1})$	$f(x_i, x_{i+1}, x_{i+2})$
-2	12		
		-6	
-1	6		1
		-1	
3	2		

Разделенные разности образуют верхнюю убывающую диагональ, содержащую разделенные разности в начальной точке x_0 (числа 12, -6, 1), и нижнюю возрастающую диагональ, содержащую разделенные разности в конечной точке x_n (числа 2, -1, 1). Используя разделенные разности в начальной точке x_0 , получаем полином Ньютона

$$\begin{aligned}
 P_2(x) &= f(x_0) + f(x_0, x_1)(x - x_0) + f(x_0, x_1, x_2)(x - x_0)(x - x_1) = \\
 &= 12 - 6(x + 2) + (x + 2)(x + 1) = 12 - 6x - 12 + x^2 + 3x + 2 = x^2 - 3x + 2.
 \end{aligned}$$

Используя разделенные разности в конечной точке x_n , получаем полином

$$\begin{aligned}
 P_2(x) &= f(x_2) + f(x_2, x_1)(x - x_2) + f(x_2, x_1, x_0)(x - x_2)(x - x_1) = \\
 &= 2 - (x - 3) + (x - 3)(x + 1) = 2 - x + 3 + x^2 - 2x - 3 = x^2 - 3x + 2.
 \end{aligned}$$

В обоих случаях мы получили один и тот же полином, совпадающий с полиномом Лагранжа

$U1 := (132 \ 140 \ 150 \ 162 \ 170 \ 180 \ 190 \ 200 \ 211 \ 220 \ 232 \ 240 \ 251)^T$

$P0 := (330 \ 350 \ 385 \ 425 \ 450 \ 485 \ 540 \ 600 \ 660 \ 730 \ 920 \ 1020 \ 1350)^T$

Формирование матрицы коэффициентов A системы (9.9)

$i := 0..12 \ j := 0..12$

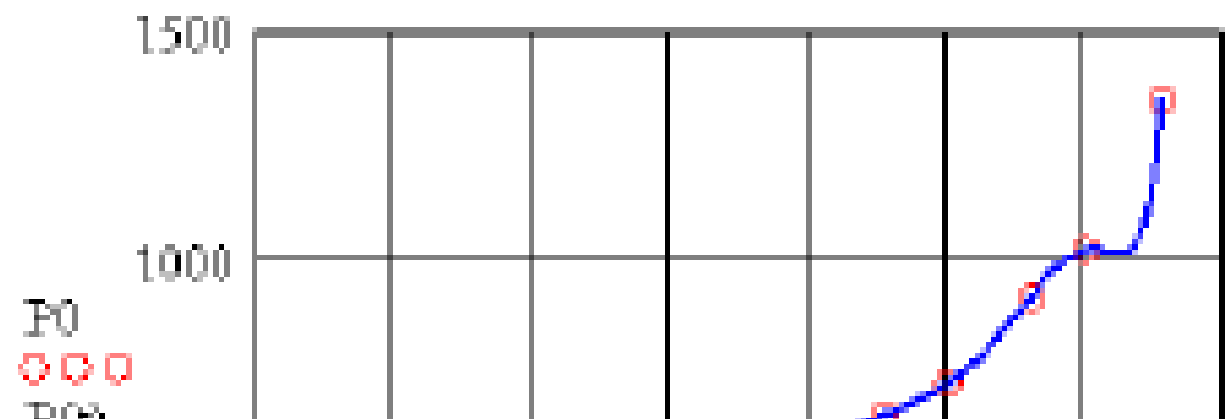
$$A_{i,j} := \{U1_i\}^j$$

Реализация
канонического полинома
в MathCAD (матрица
Вандермонда)

Решение системы (9.9) $a := \text{lsolve}(A, P0)$

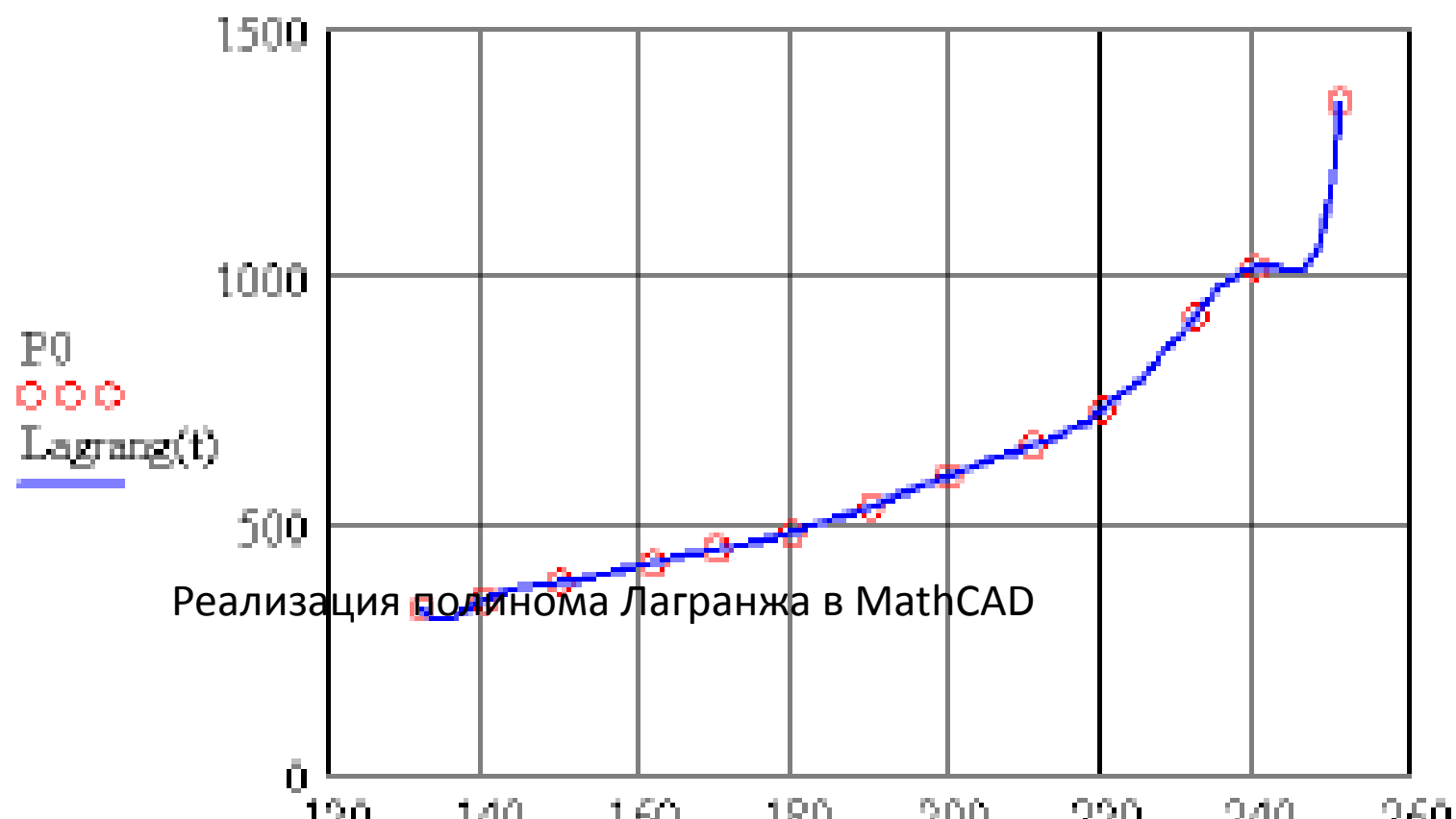
Формирование канонического полинома $P(t) := \sum_{i=0}^{12} \{a_i \cdot t^i\}$

$t := 132,133..251$



$n := 12$

$$\text{Lagrang}(t) := \sum_{i=0}^n \left(P0_i \cdot \prod_{j=0}^n \text{if} \left(i = j, 1, \frac{t - U1_j}{U1_i - U1_j} \right) \right)$$



$U1 := (132 \ 140 \ 150 \ 162 \ 170 \ 180 \ 190 \ 200 \ 211 \ 220 \ 232 \ 240 \ 251)$

$P0 := (330 \ 350 \ 385 \ 425 \ 450 \ 485 \ 540 \ 600 \ 660 \ 730 \ 920 \ 1020 \ 1100)$

Формирование матрицы C $i := 0..n$ $C_{i,0} := P0_i$ $n := \text{last}(P0)$

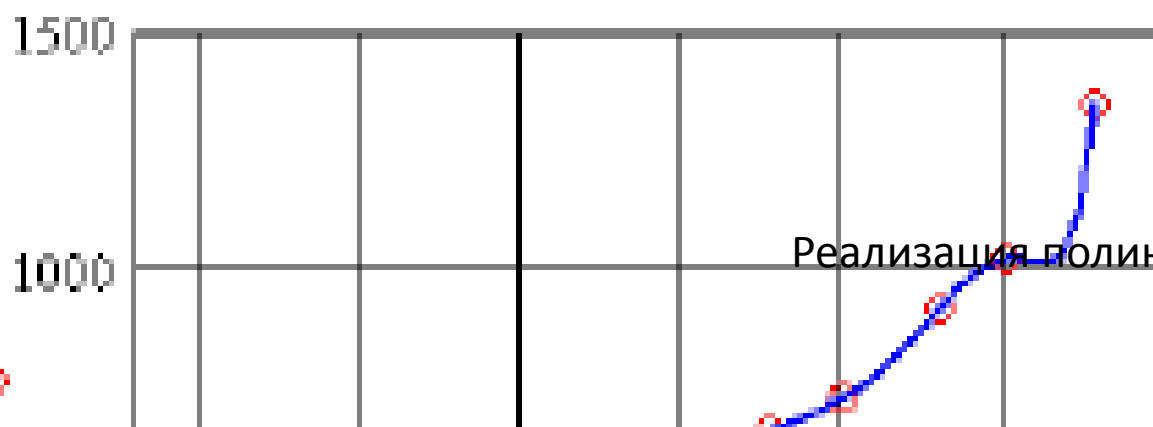
$j := 1..n$ $i := 1..n$

$t := 131,132..251$

$$C_{i,j} := \text{if} \left(i \geq j, \frac{C_{i,j-1} - C_{j-1,j-1}}{U1_i - U1_{j-1}}, 0 \right)$$

Формирование полинома Ньютона по формуле (9.11)

$$F(t) := \sum_{i=0}^n \left(C_{i,i} \prod_{j=0}^i \text{if}(j \geq i, 1, t - U1_j) \right)$$

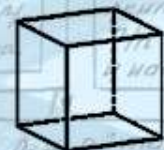


$P0$

$F(t)$

Сплайн-интерполяция

Полиномиальная интерполяция не всегда дает удовлетворительные результаты при аппроксимации зависимостей. Так, например, при представлении полиномами резонансных кривых колебательных систем большая погрешность возникает на концах этих кривых. Несмотря на выполнение условий в узлах, интерполяционная функция может иметь значительное отклонение от аппроксимируемой кривой между узлами. При этом повышение степени интерполяционного полинома приводит не к уменьшению, а к увеличению погрешности. Решение этой проблемы предложено теорией сплайн-интерполяции (от английского слова spline – «рейка», «линейка»).



Кубическим сплайном, интерполирующим на отрезке $[a, b]$ данную функцию $y(x)$, называется функция:

$$g_k(s) = a_k + b_k(s - x_k) + c_k(s - x_k)^2 + d_k(s - x_k)^3, \quad s \in [x_{k-1}, x_k], \quad k = 1, \dots, n \quad (8.13)$$

Она удовлетворяет следующим условиям:

- $g_k(x_k) = y_k; g_k(x_{k-1}) = y_{k-1}$ (условие интерполяции в узлах сплайна);
- функция $g(x)$ дважды непрерывно дифференцируема на интервале $[a, b]$;

Кроме кубического, существуют квадратичный и линейный сплайны.

Для вычисления коэффициентов сплайнов в MathCAD существуют функции

- $\text{cspline}(x, y)$ – возвращает массив коэффициентов кубического сплайна;
- $\text{pspline}(x, y)$ – возвращает массив коэффициентов квадратичного сплайна;
- $\text{lspline}(x, y)$ – возвращает массив коэффициентов линейного сплайна.

Во всех этих функциях x – массив абсцисс экспериментальных точек, y – массив ординат экспериментальных точек. После вычисления коэффициентов сплайна можно, обратившись к функции interp , вычислить значение интерполяционного полинома в конкретной точке. Для этого в функцию interp первым параметром необходимо передать массив коэффициентов сплайна.

Вычисление коэффициентов линейного сплайна $l := \text{lspline}(U1, P0)$

Функция, вычисляющая значение в точке с помощью кубического сплайна

$f_c(t) := \text{interp}(c, U1, P0, t)$

Функция, вычисляющая значение в точке с помощью квадратичного сплайна

$f_p(t) := \text{interp}(p, U1, P0, t)$

Функция, вычисляющая значение в точке с помощью линейного сплайна

$f_l(t) := \text{interp}(l, U1, P0, t)$

