

А. Н. Фурс

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь

ПРОПУСКАНИЕ И ОТРАЖЕНИЕ БЕССЕЛЕВЫХ АКУСТИЧЕСКИХ ПУЧКОВ ВРАЩАЮЩИМИСЯ ДИСКАМИ

Введение

Известно, что бесселевы пучки описываются цилиндрическими решениями волновых уравнений и могут распространяться на большие расстояния с неизменной интенсивностью в поперечном сечении. В силу слабой расходимости такие пучки относят к бездифракционным [1]. Для описания их распространения в неоднородных средах используются как стандартные методы разложения на парциальные волны, так и операторные методы. В лаборатории оптические параксиальные бесселевы пучки создаются с помощью аксиконов [2], пространственных световых модуляторов и компьютерно сгенерированных голограмм [3], а также элементов дифракционной оптики [4]. Закрученные бесселевы акустические пучки (пучки ненулевых порядков) можно реализовывать с использованием системы репродукторов с волноводами, сигналы в которых специальным образом сдвинуты по фазе [5].

В недавней работе [6] был экспериментально установлен эффект усиления звука при прохождении закрученного пучка через вращающийся диск из пенистого звукопоглощающего материала. Такое усиление наблюдалось при выполнении условия Зельдовича [7] $\omega - m\Omega < 0$, где ω – частота звука, Ω – угловая скорость вращения диска, а m – порядок (или индекс) бесселевого пучка. Представляет интерес рассмотреть классическую задачу отражения и пропускания закрученного бесселевого пучка вращающимся диском из упругого изотропного материала с учетом того, что в диске из-за отражений от границ возбуждаются прямые и обратные собственные моды. При этом мы ограничиваемся случаем отсутствия необратимых потерь звуковой энергии как в диске, так и в окружающей его газовой среде.

1. Волновые поля во вращающемся диске и окружающей его среде

Пусть пучок с частотой ω сформирован в газе с плотностью ρ_0 , окружающим диск. Согласно уравнениям гидродинамики [8] поле смещений дается выражением $\mathbf{u} = i\nabla\phi/\omega$, а поле давлений (избыточных по отношению к равновесному p_0) – $p = i\omega\rho_0\phi$, при этом функция ϕ

удовлетворяет скалярному уравнению Гельмгольца $\Delta\phi + k_0^2\phi = 0$. Здесь $k_0 = \omega/c$, где c – скорость звука в газе. Закрученному бесселевому пучку порядка m соответствует решение этого уравнения $\phi(r, \varphi, z, t) = -i\omega C J_m(k_r r) e^{im\varphi} e^{ikz} e^{-i\omega t}$, при этом k_r – радиальное волновое число, $k = \sqrt{k_0^2 - k_r^2}$ – продольное волновое число, а C – постоянная, определяющая амплитуду волны. Предполагается, что величины m и k_r заданы (т.е. известен угол конусности пучка θ , $k_r = k_0 \sin \theta$). Тогда

$$\mathbf{u} = C \left[k_r J'_m(k_r r) \mathbf{e}_r + \frac{im}{r} J_m(k_r r) \mathbf{e}_\varphi + ik J_m(k_r r) \mathbf{e}_z \right] e^{im\varphi} e^{ikz} e^{-i\omega t}, \quad (1)$$

$$p = C \rho_0 \omega^2 J_m(k_r r) e^{im\varphi} e^{ikz} e^{-i\omega t},$$

где \mathbf{e}_r , \mathbf{e}_φ и \mathbf{e}_z – единичные базисные векторы цилиндрической системы координат, а $J'_m(x)$ – производная функции Бесселя.

В неинерциальной системе отсчета, связанной с вращающимся вокруг оси \mathbf{e}_z с угловой скоростью Ω диском, поле смещений подчиняется уравнению Кристоффеля [9]

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = c_{iklm} \frac{\partial^2 u_m}{\partial x_k \partial x_l} + \rho \Omega^2 [\mathbf{e}_z \times (\mathbf{u} \times \mathbf{e}_z)]_i + 2\rho \Omega \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \times \mathbf{e}_z \right)_i, \quad (2)$$

в правую часть которого включены плотности центробежных сил инерции и сил Кориолиса. При этом плотность сил упругости, действующих на единичную площадку с нормалью \mathbf{e}_z , имеет вид $f_i = c_{iklm} (\mathbf{e}_z)_k \partial u_m / \partial x_l$. Если материал диска упруго изотропен, то его тензор модулей упругости $c_{iklm} = \rho [(c_1^2 - 2c_t^2) \delta_{ik} \delta_{lm} + c_t^2 (\delta_{il} \delta_{km} + \delta_{im} \delta_{kl})]$, где ρ – плотность, а c_1 и c_t – скорости продольных и поперечных звуковых волн. Тогда

$$-\omega'^2 \mathbf{u} = c_t^2 \Delta \mathbf{u} + (c_1^2 - c_t^2) \nabla (\nabla \mathbf{u}) + \Omega^2 \mathbf{e}_z \times (\mathbf{u} \times \mathbf{e}_z) - 2i\omega' \Omega \mathbf{u} \times \mathbf{e}_z, \quad (3)$$

$$\mathbf{f} = \rho (c_1^2 - 2c_t^2) \mathbf{e}_z (\nabla \mathbf{u}) + \rho c_t^2 (\nabla u_z + \partial \mathbf{u} / \partial z).$$

Здесь учтено, что из-за доплеровского смещения частота волн в диске ω' отличается от частоты падающего пучка ω .

Решение первого из уравнений (3) находим как линейную комбинацию частных решений

$$\mathbf{u}_1 = \nabla\psi, \quad \mathbf{u}_2 = \nabla \times (\psi \mathbf{e}_z) = \nabla\psi \times \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{u}_3 = \nabla \times (\nabla \times (\psi \mathbf{e}_z)) = \partial \nabla\psi / \partial z + \kappa_0^2 \psi \mathbf{e}_z$$

векторного уравнения Гельмгольца $\Delta \mathbf{u}_{1,2,3} + \kappa_0^2 \mathbf{u}_{1,2,3} = 0$. Требуется, чтобы функция ψ подчинялась скалярному уравнению $\Delta \psi + \kappa_0^2 \psi = 0$. Эту функцию выбираем в виде $\psi(r, \varphi', z, t) = J_m(k_r r) e^{im\varphi'} e^{ikz} e^{-i\omega't}$. Здесь $\varphi' = \varphi - \Omega t$ – угловая координата цилиндрической системы, связанной с диском, значения величин m и k_r те же, что и в (1), продольное волновое число k подлежит определению, а $\kappa_0 = \sqrt{\kappa^2 + k_r^2}$. Тогда

$$\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\} = \{\mathbf{h}_1 + ik\mathbf{h}_3, \mathbf{h}_2, ik\mathbf{h}_1 + k_r^2 \mathbf{h}_3\} e^{im\varphi'} e^{ikz} e^{-i\omega't}, \quad (4)$$

$$\mathbf{h}_1 = k_r J'_m(k_r r) \mathbf{e}_r + \frac{im}{r} J_m(k_r r) \mathbf{e}_\varphi, \quad \mathbf{h}_2 = \frac{im}{r} J_m(k_r r) \mathbf{e}_r - k_r J'_m(k_r r) \mathbf{e}_\varphi, \quad \mathbf{h}_3 = J_m(k_r r) \mathbf{e}_z,$$

при этом зависящие от r векторы \mathbf{h}_1 , \mathbf{h}_2 и \mathbf{h}_3 являются взаимно ортогональными. Это позволяет при подстановке в (3) соотношения $\mathbf{u} = A_1 \mathbf{u}_1 + A_2 \mathbf{u}_2 + A_3 \mathbf{u}_3$ отыскать неизвестные коэффициенты A_1 , A_2 и A_3 и получить с точностью до постоянного множителя величины \mathbf{u} и \mathbf{f} :

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \left[(k_r^2 d^t + \kappa^2 d^1) \mathbf{h}_1 + 2i\omega' \Omega \frac{k_r^2 d^t + \kappa^2 d^1}{d^t + \Omega^2} \mathbf{h}_2 + ik\kappa_0^2 k_r^2 (c_1^2 - c_t^2) \mathbf{h}_3 \right] e^{im\varphi'} e^{ikz} e^{-i\omega't}, \\ \mathbf{f} &= \rho \left[ikc_t^2 [2(k_r^2 d^t + \kappa^2 d^1) - \kappa_0^2 d^1] \mathbf{h}_1 - 2\kappa c_t^2 \omega' \Omega \frac{k_r^2 d^t + \kappa^2 d^1}{d^t + \Omega^2} \mathbf{h}_2 + \right. \\ &\quad \left. + k_r^2 [2c_t^2 (k_r^2 d^t + \kappa^2 d^1) - c_1^2 \kappa_0^2 d^1] \mathbf{h}_3 \right] e^{im\varphi'} e^{ikz} e^{-i\omega't}, \end{aligned} \quad (5)$$

где $d^1 = \omega'^2 - \kappa_0^2 c_1^2$, $d^t = \omega'^2 - \kappa_0^2 c_t^2$, $\kappa_0^2 = \kappa^2 + k_r^2$. Продольное волновое число k является одним из шести корней бикубического уравнения

$$a_0 \kappa^6 + a_1 \kappa^4 + a_2 \kappa^2 + a_3 = 0 \quad (6)$$

с коэффициентами

$$\begin{aligned} a_0 &= c_1^2 c_t^4, & a_1 &= c_t^2 [3c_1^2 c_t^2 k_r^2 - c_t^2 \omega'^2 - 2c_1^2 (\omega'^2 + \Omega^2)], \\ a_2 &= c_t^2 [2\omega'^2 (\omega'^2 + \Omega^2) - c_t^2 k_r^2 (2\omega'^2 + \Omega^2)] + c_1^2 [3c_t^4 k_r^4 + (\omega'^2 - \Omega^2)^2 - c_t^2 k_r^2 (4\omega'^2 + 3\Omega^2)], \end{aligned}$$

$$a_3 = (c_t^2 k_r^2 - \omega'^2)[c_1^2 k_r^2 (c_1^2 k_r^2 - \omega'^2 - \Omega^2) + (\omega'^2 - \Omega^2)^2 - c_1^2 k_r^2 (\omega'^2 + \Omega^2)].$$

Таким образом, уравнение (6) – это дисперсионное соотношение, определяющее продольные волновые числа шести собственных волн в диске. Три из этих волн можно отнести к прямым, а остальные три – к обратным.

Дисперсионное соотношение существенно упрощается для неподвижного диска ($\Omega=0$). В этом случае имеются два корня $\kappa = \pm\sqrt{(\omega'/c_1)^2 - k_r^2}$ с кратностью 1 и два корня $\kappa = \pm\sqrt{(\omega'/c_t)^2 - k_r^2}$ с кратностью 2.

Применим граничные условия для полей на основаниях диска $z=0$ и $z=L$, где L – толщина диска. Фазы волн по обе стороны границы раздела должны быть согласованы в любой момент времени, поэтому $\omega' = \omega - m\Omega$. Обозначим весовые коэффициенты собственных волн в диске как C_j ($j=1, \dots, 6$) и весовые коэффициенты падающего, отраженного и прошедшего пучков как C_i , C_r и C_t соответственно. На основаниях диска должны быть непрерывными нормальные составляющие полей смещений и напряжений. Кроме того, на основаниях должны обращаться в нуль касательные упругие напряжения. Поэтому для границы $z=0$ с учетом (1) и (5) получаются уравнения

$$k(C_i - C_r) = k_r^2 (c_1^2 - c_t^2) \sum_{j=1}^6 \kappa_j \kappa_{j0}^2 C_j, \quad \rho_0 \omega^2 (C_i + C_r) = \rho k_r^2 \sum_{j=1}^6 [2c_t^2 (k_r^2 d_j^t + \kappa_j^2 d_j^1) - c_1^2 \kappa_{j0}^2 d_j^t] C_j,$$

$$\sum_{j=1}^6 \kappa_j [2(k_r^2 d_j^t + \kappa_j^2 d_j^1) - \kappa_{j0}^2 d_j^1] C_j = 0, \quad \sum_{j=1}^6 \kappa_j \frac{k_r^2 d_j^t + \kappa_j^2 d_j^1}{d_j^t + \Omega^2} C_j = 0, \quad (7)$$

а для границы $z=L$ в аналогичных уравнениях появляются множители, соответствующие фазовым набегам волн на толщине диска L

$$kC_t = k_r^2 (c_1^2 - c_t^2) \sum_{j=1}^6 \kappa_j \kappa_{j0}^2 e^{i\kappa_j L} C_j, \quad \rho_0 \omega^2 C_t = \rho k_r^2 \sum_{j=1}^6 [2c_t^2 (k_r^2 d_j^t + \kappa_j^2 d_j^1) - c_1^2 \kappa_{j0}^2 d_j^t] e^{i\kappa_j L} C_j,$$

$$\sum_{j=1}^6 \kappa_j [2(k_r^2 d_j^t + \kappa_j^2 d_j^1) - \kappa_{j0}^2 d_j^1] e^{i\kappa_j L} C_j = 0, \quad \sum_{j=1}^6 \kappa_j \frac{k_r^2 d_j^t + \kappa_j^2 d_j^1}{d_j^t + \Omega^2} e^{i\kappa_j L} C_j = 0. \quad (8)$$

В соотношениях (7) и (8) введены обозначения $\kappa_{j0} = \sqrt{\kappa_j^2 + k_r^2}$, $d_j^1 = \omega'^2 - \kappa_{j0}^2 c_1^2$, $d_j^t = \omega'^2 - \kappa_{j0}^2 c_t^2$, а κ_j ($j=1, \dots, 6$) – корни дисперсионного уравнения (6).

Таким образом, из системы восьми линейных уравнений (7) и (8) находятся коэффициенты C_1, \dots, C_6, C_r и C_t , пропорциональные весовому коэффициенту C_i падающего пучка. Коэффициенты отражения и пропускания пучка рассчитываются по формулам $R=|C_r/C_i|^2$ и $T=|C_t/C_i|^2$, а фазовые сдвиги отраженной и прошедшей волн по отношению к падающей волне – по формулам $\Delta\Phi_r=\arg(C_r/C_i)$ и $\Delta\Phi_t=\arg(C_t/C_i)$.

2. Численные результаты

Пусть диск изготовлен из плексигласа, плотность которого составляет $\rho=1180$ кг/м³. Скорости продольных и поперечных звуковых волн в нем равны соответственно $c_1 = 2670$ м/с и $c_t = 1121$ м/с [10]. Диск окружает воздух, плотность которого при температуре 20° С составляет $\rho_0 = 1,204$ кг/м³, а скорость звука в нем $c = 343,3$ м/с. Частоту волн в падающем на диск бесселевом пучке выбираем равной $f=400$ Гц (при этом $\omega = 2\pi f$).

На рисунке 1 представлены графики зависимости коэффициента пропускания T от толщины диска L и частоты его вращения $n=\Omega/(2\pi)$ для закрученных пучков с индексом $m=8$ и углами конусности $\theta=30^\circ$ и $\theta=60^\circ$, рассчитанные по приведенным выше формулам.

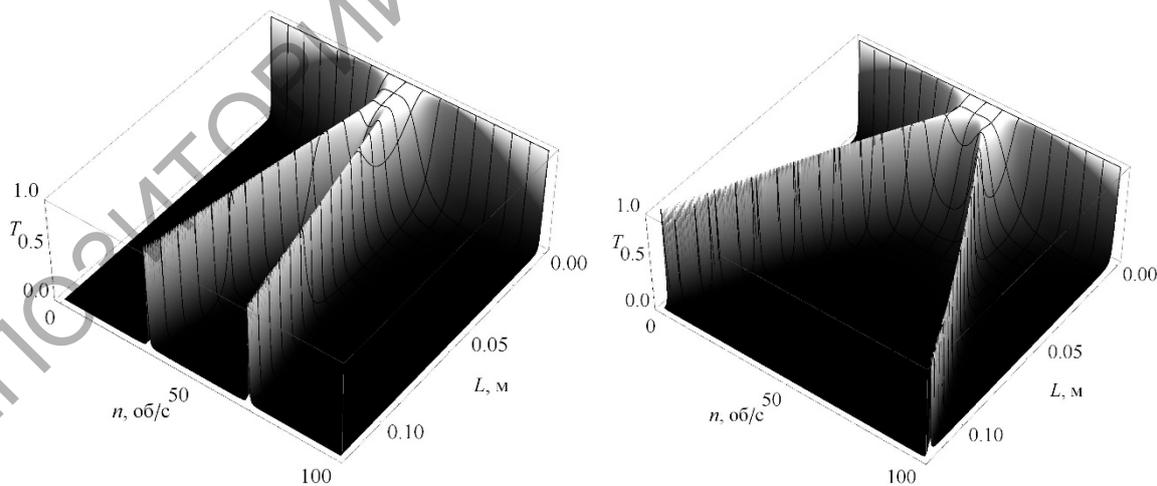


Рисунок 1 – Зависимость $T=T(L, n)$ для закрученных бесселевых пучков с углами конусности $\theta=30^\circ$ (слева) и $\theta=60^\circ$ (справа). Индекс пучка $m=8$

При малых толщинах (порядка 0,01 м) диск становится акустически прозрачным при частоте вращения $n \approx f/m$, т.е. при выполнении условия $\omega - m\Omega \approx 0$. Для указанных выше данных это 400/8=50 об/с. При больших толщинах диска для каждого фиксированного L имеются два максимума пропускания $T=1$ при угловых скоростях вращения Ω_1 и Ω_2 , отстоящих практически одинаково по обе стороны от значения $\Omega_0 = \omega/m$, при котором достигается уже локальный минимум пропускания ($\omega - m\Omega_1 > 0$ и $\omega - m\Omega_2 < 0$). При этом чем больше угол конусности пучка, тем сильнее при фиксированной толщине L смещены положения максимумов от значения Ω_0 .

При малых толщинах (порядка 0,01 м) диск становится акустически прозрачным при частоте вращения $n \approx f/m$, т.е. при выполнении условия $\omega - m\Omega \approx 0$. Для указанных выше данных это 400/8=50 об/с. При больших толщинах диска для каждого фиксированного L имеются два максимума пропускания $T=1$ при угловых скоростях вращения Ω_1 и Ω_2 , отстоящих практически одинаково по обе стороны от значения $\Omega_0 = \omega/m$, при котором достигается уже локальный минимум пропускания ($\omega - m\Omega_1 > 0$ и $\omega - m\Omega_2 < 0$). При этом чем больше угол конусности пучка, тем сильнее при фиксированной толщине L смещены положения максимумов от значения Ω_0 .

Отметим, что при полном пропускании, когда $\Omega = \Omega_1$ или $\Omega = \Omega_2$, фазовый сдвиг прошедшей волны $\Delta\Phi_t$ становится равным нулю. Формально это означает, что фазовая скорость звуковых волн в диске обращается в бесконечность.

Численные расчеты показывают, что при любых значениях параметров m , θ , L и Ω выполняются равенства

$$R + T = 1, \quad \Delta\Phi_r - \Delta\Phi_t = \pi/2. \quad (9)$$

Первое из равенств (9) означает, что энергия падающего бесселевого пучка целиком перераспределяется между отраженным и прошедшим пучками.

Заключение

При падении из газовой среды закрученного бесселевого пучка на изотропно упругий вращающийся диск в нем возбуждаются шесть собственных волн, продольные волновые числа которых являются комплексными корнями дисперсионного соотношения (6). Частота этих волн смещена по отношению к частоте ω падающего пучка в соответствии с формулой $\omega' = \omega - m\Omega$. Численные расчеты показывают,

что диск становится акустически прозрачным при угловых скоростях вращения Ω_1 и Ω_2 , симметрично смещенных относительно значения $\Omega_0 = \omega/m$, где m – индекс пучка. При этом при полном пропускании отсутствует фазовый сдвиг между прошедшей и падающей волной.

Энергия падающего пучка перераспределяется между отраженным и прошедшим пучками, т.е. отсутствует преобразование кинетической энергии диска в энергию звуковых колебаний и наоборот, причем ни при каких значениях параметров коэффициенты отражения и пропускания не превышают единицу. Диск может рассматриваться как акустический затвор для закрученных бесселевых пучков, который открывается лишь при определенных угловых скоростях вращения, осуществляя при этом пространственную трансляцию поля падающего пучка на расстояние L , равное толщине диска.

Литература

1. Durnin, J. Diffraction-free beams / J. Durnin // Phys. Rev. Lett. – 1987. – V. 58. – P. 1499–1501.
2. Казак, Н. С. Формирование бесселевых световых пучков в условиях внутренней конической рефракции / Н. С. Казак, Н. А. Хило, А. А. Рыжевич // Квантовая электроника. – 1999. – Т. 29, № 2. – С. 184–188.
3. Vasara, A. Realization of general nondiffracting beams with computer-generated holograms / A. Vasara, J. Turunen, A. T. Friberg // J. Opt. Soc. Am. A. – 1989. – V. 6. – P. 1748–1754.
4. Khonina, S. N. Rotation of microparticles with Bessel beams generated by diffractive elements / S. N. Khonina, V. V. Kotlyar, R. V. Skidanov et. al. // J. Mod. Opt. – 2004. – V. 51, № 14. – P. 2167–2184.
5. Gibson, G. M. Reversal of orbital angular momentum arising from an extreme Doppler shift / G. M. Gibson, E. Toninelli, S. A. R. Horsley et. al. // Proc. Natl. Acad. Sci. USA. – 2018. – V. 115 (15). – P. 3800–3803.
6. Cromb, M. Amplification of waves from a rotating body / M. Cromb, G. M. Gibson, E. Toninelly et. al. // Nat. Phys. – 2020. – <https://doi.org/10.1038/s41567-020-0944-3>.
7. Зельдович, Я. Б. Усиление цилиндрических электромагнитных волн при отражении от вращающегося тела / Я. Б. Зельдович // ЖЭТФ. – 1972. – Т. 62, № 6. – С. 2076–2081.
8. Ландау, Л. Д. Теоретическая физика. Т. VI. Гидродинамика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – М.: Физматлит, 2001. – 736 с.

9. Федоров, Ф. И. Теория упругих волн в кристаллах / Ф. И. Федоров. – М.: Наука, 1965. – 386 с.

10. Таблицы физических величин. Справочник. Под ред. акад. И. К. Кикоина. – М.: Атомиздат, 1976. – 1008 с.