Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, №3(18), 2003

УДК 681.3.06..614.13

Математическая модель состояния грунтовых оснований при неупругом деформировании

В.Е. Быховцев

Постановка и актуальность задачи

Грунты деформируются как нелинейно-упруго-пластические тела: вначале имеется почти линейный участок, потом нелинейный и далее пластическое состояние. Уравнение состояния элементов структуры (слоев, включений и т.п.) грунтового основания при упругой стадии работы имеет однозначное представление

$$\sigma_i = E\varepsilon_i , \tag{1}$$

где σ_i, ε_I – интенсивность напряжений и деформаций;
E – линейный модуль упругости.

В этом случае, как видим, достаточно двух физико-механических характеристик E и μ. Существует несколько хорошо отработанных методик их определения. Значительно сложнее обстоит дело при рассмотрении грунта в стадии неупругой работы. Для сложного напряженного состояния механико-математическая модель в общем виде может быть представлена так:

$$\sigma_i = E(\varepsilon_i)\varepsilon_i . \tag{2}$$

В настоящее время существует ряд конкретных форм закона деформирования грунта. Наиболее простой из них и достаточно хорошо аппроксимирующей экспериментальные зависимости является степенная функция

$$\sigma_i = A\varepsilon_i^m . \tag{3}$$

Параметры A и m определяются экспериментально. С.С. Вяловым предложена более точная для грунтов форма аппроксимации [4]:

$$\frac{\sigma_i}{1+\dfrac{\sigma_{cp}}{\sigma_0}} = A\varepsilon_i^m , \tag{4}$$

где σ_0 – экспериментальный параметр, имеет размерность напряжения.

Если обозначить

$$\frac{\sigma_i}{1+\dfrac{\sigma_{cp}}{\sigma_0}} = \overline{\sigma}_i ,$$

то (4) примет вид $\overline{\sigma}_i = A\varepsilon_i^m$, что аналогично по форме (3).

Существуют некоторые другие формы закона нелинейного деформирования грунтов [1,4]. Общим для всех форм является то, что они построены на основе степенного закона.

Это объясняется формой экспериментальных кривых, представляющих зависимость $\sigma_i \leftrightarrow \varepsilon_i$.

Количество экспериментально определяемых параметров в предлагаемых формах закона деформирования доходит до 5. И, к сожалению, не всегда имеются методики доступного определения этих параметров. Это, как правило, трудоёмкий и дорогостоящий процесс. В то же время строительные нормы и правила содержат все основные физико-механические характеристики грунта, методика которых хорошо отработана. Поэтому *актуальной является задача определения параметров принимаемой формы закона деформирования на основании нормативных характеристик грунтов, содержащихся в строительных нормах и правилах.* Основываясь на физических постулатах деформирования грунтов, авторами предложен подход математического определения приближённого значения параметров аппроксимации процесса деформирования грунта [2,3].

Выбор формы математической модели состояния грунтовых оснований при неупругом деформировании

Как следует из многочисленных экспериментов, процесс деформирования грунтов графически можно представить в виде кривой параболического типа:

$$\sigma_i^н = f(\varepsilon_i^н), \qquad (5)$$

верхний индекс '*н*' есть признак нелинейного деформирования. Эта кривая всегда положительно определенная неубывающая функция, проходящая через т. $O(0,0)$ и имеющая в ней касательную. Экстремум соответствует переходу в пластическое состояние деформируемого тела. Нагрузка, соответствующая этому экстремуму, называется предельной нагрузкой, до которой реальное нагружение не должно доходить. Реальные нагрузки на грунт задаются в интервале $[0,\ P_{пред.}]$, поэтому в теоретических исследованиях возможна аппроксимация участка кривой соответствующего интервала. Касательная в т. $O(0,0)$ будет выражать закон линейного деформирования грунта (1): $\sigma_i = E\varepsilon_i$.

Теоретически для всех твердых тел

$$\varepsilon_i|\sigma_{i=0} = 0. \qquad (6)$$

Уравнение состояния можно принять в форме степенной функции:

$$\sigma_i = A\,\varepsilon_i^m,\ A>0,\ 0<m<1, \qquad (7)$$

A, m – экспериментальные параметры.

Получаемая при этом погрешность аппроксимации реального соотношения (5) зависит от свойств деформируемого тела и для отдельных материалов может достигать 15%. Повышение точности решения задач по расчету нелинейных деформаций может быть получено при применении форм уравнения состояния, более точно учитывающих физический процесс деформирования. Как показали исследования, всем условиям хорошо отвечает форма

$$\sigma_i^н = A\varepsilon_i^н - B(\varepsilon_i^н)^m;\ A > 0,\ m > 1,\ B > 0. \qquad (8)$$

Определение параметров математической модели состояния грунтовых оснований при неупругом деформировании

Для функции $y = f(x)$ уравнение касательной в т. $P(x_0,y_0)$ будет иметь вид

$$y-f(x_0)=f'(x_0)\,(x-x_0), \tag{9}$$

следовательно, для уравнения (5) получим

$$\sigma_i^{н}-f(\varepsilon_{i,0}{}^{н}) = f'(\varepsilon_{i,0}{}^{н})\,(\varepsilon_i^{н}-e_{i,0}), \tag{10}$$

или, учитывая указанные свойства функции (6),

$$\sigma_i^{н} = f'(\varepsilon_{i,0}{}^{н})\,\varepsilon_i^{н}, \tag{11}$$

что должно соответствовать (1), поэтому

$$f'(\varepsilon_{i,0}{}^{н})=E=const. \tag{12}$$

Согласно (12) для (8) будем иметь A = E, следовательно, выражение (8) примет вид

$$\sigma_i^{н} = E\varepsilon_i^{н} - B(\varepsilon_i^{н})^{m}\ ;\ m > 1,\ B>0. \tag{13}$$

Для нелинейных деформаций всякий секущий модуль $E^*<E$. Это утверждение следует также из (13):

$$E^*=\sigma_i^{н}/\varepsilon_i^{н}=E-B(\varepsilon_i^{н})^{m-1},$$

что полностью соответствует физическому процессу [2]. Полученная форма уравнения состояния деформируемого тела (13) превосходит по точности форму (7). Условие максимума для (13) дает:

$$\sigma_i' = E - mB\varepsilon_{i,\max}^{m-1} = 0 \tag{14}$$

откуда:

$$B = \frac{E}{m\varepsilon_{i,\max}^{m-1}} \tag{15}$$

или:

$$\varepsilon_{i,\max} = \left(\frac{E}{mB}\right)^{\frac{1}{m-1}}. \tag{16}$$

Подставив (16) в (13), получим:

$$E\left(\frac{E}{mB}\right)^{\frac{1}{m-1}} - B\left(\frac{E}{mB}\right)^{\frac{m}{m-1}} = \sigma_{i,\max} \tag{17}$$

Принимая во внимание, что при нагрузке $P \le P_{кр}$ процесс деформирования близок к линейному и будет характеризоваться модулем упругости $E^* = \alpha E$, можем записать

$$\sigma_{i,кр} = E^*\varepsilon_{i,кр} \equiv \alpha E\varepsilon_{i,кр},\ 0 < \alpha \le 1;$$

откуда следует

$$\varepsilon_{i,кр} = \frac{\sigma_{i,кр}}{\alpha E}. \tag{18}$$

Подставив (18) в (13), получим

$$\sigma_{i,кр} = E\frac{\sigma_{i,кр}}{\alpha E} - B\left(\frac{\sigma_{i,кр}}{\alpha E}\right)^{m}.$$

Отсюда, после ряда несложных преобразований, будем иметь

$$B = (1-\alpha)\left(\frac{\alpha\, E}{\sigma_{i,\,кр}}\right)^{m-1} E\,. \tag{19}$$

Таким образом, размерность B и E одинакова, что соответствует физической сущности (19). Подставив (19) в (17), после ряда преобразований получим

$$\frac{m-1}{m\,\alpha}\left(\frac{1}{m\,(1-\alpha)}\right)^{\frac{1}{m-1}} = \hat{\sigma}_i\,,\ \hat{\sigma}_i = \frac{\sigma_{i,\max}}{\sigma_{i,\,кр}}\,. \tag{20}$$

Критическое $\sigma_{i,кр}$ и предельное $\sigma_{i,пр}$ напряжения определяются на основании теории предельного равновесия и нормативных физико-механических характеристик грунта или принимаются по экспериментальным данным.

Проведенный вычислительный эксперимент показал, что $\alpha \approx 1 - 10/E$. Из (20) параметр m определяется итерационно и далее из (19) находится параметр B. Этим самым параметры закона деформирования в форме двучлена степени m (8) определены полностью, что даёт возможность решать задачи по расчёту нелинейных деформаций грунта на основании его нормативных характеристик, содержащихся в строительных нормах и правилах. Отметим, что экспериментальное определение параметров любого закона деформирования грунта представляет собой длительный и дорогостоящий процесс.

Abstract

The author studied the form and parameters of the mathematical model of the condition of the earth bases at non-elastic deformation.

Литература

1. Боткин А.И. Исследование напряжённого состояния в сыпучих и связных грунтах // Известия ВНИИГ им. Б.Е.Веденеева. – 1939. – № 24. – С. 36–45.
2. Быховцев В.Е. Некоторые вопросы закономерности деформирования связных грунтов. // Основания, фундаменты и механика грунтов: Сб. науч. тр. / ВШ. – Мн., 1969. – №1. – С. 81–86.
3. Быховцев В.Е. Два эффективных метода решения краевых задач нелинейной теории упругости. // Материалы, технологии, инструменты. Научн. – техн. журнал НАН РБ. – 2002. – №4. – С. 5–7.
4. Вялов С.С. Реологические основы механики грунтов. – М: Высшая школа, 1978. – 446 с.

Гомельский государственный
университет им. Ф.Скорины

Поступило 10.04.03