Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, №4(25), 2004

УДК 519.6:539.3

Математическое моделирование влияния трения на несущую способность армированного грунта

В. Е. Быховцев

Повышение несущей способности грунтов посредством их армирования в строительной практике применяется давно. Методы и технологии армирования неоднозначны. В настоящей работе строится математическая модель взаимодействия материала армирующих элементов с грунтовым основанием и исследуется эффективность этого взаимодействия.

В качестве армирующего элемента будем рассматривать одномерный стержень. Прямую, соединяющую центры тяжести поперечных сечений стержня, примем за ось x, начало координат поместим в центре стержня, ось $\mathbf{z}$ направим вниз. Концы стержней закреплены. Под действием внешней нагрузки прогиб армирующего стержня происходит в одной плоскости. Учитывая сложность структуры и свойств исследуемой системы, её математическую модель целесообразно строить на основе энергетических принципов [2,3]. Полная энергия деформируемой системы равна

$$\Pi = Э_{гр} + Э_{аи} + Э_{ар} + Э_{тр} - A, \tag{1}$$

$$A = \{U\}^T \{P\}, \tag{2}$$

$Э_{гр}$, $Э_{аи}$, $Э_{ар}$, $Э_{тр}$ – потенциальная энергия деформации грунта, арматуры при изгибе, растяжении и энергия трения арматуры о грунт,
A – работа внешних сил,
$\{U\} = \{u, v, w\}$ – вектор перемещений,
$\{P\}$ – вектор внешних сил.
На основании принципа стационарности полной энергии деформируемой системы

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \{U\}} = 0,$$

или, учитывая (1) и (2)

$$\frac{\partial Э_{ГР}}{\partial \{U\}} + \frac{\partial Э_{АИ}}{\partial \{U\}} + \frac{\partial Э_{АР}}{\partial \{U\}} + \frac{\partial Э_{ТР}}{\partial \{U\}} = \{P\}.$$

Энергию трения стержня с грунтом вычислим в соответствии с законом Кулона, который для несвязных и связных грунтов имеет вид (3) и (4):

$$\tau = \sigma \cdot \operatorname{tg} \varphi, \tag{3}$$

$$\tau = c + \sigma \cdot \operatorname{tg} \varphi, \tag{4}$$

где τ – напряжение сдвига;
σ – нормальное напряжение;
φ – угол внутреннего трения грунта;
c – сцепление грунта.

Для поставленной задачи при выбранной ориентации системы координат $\sigma = \sigma_z$ и, согласно [5], можно принять

$$c = \sigma_x / 2. \tag{5}$$

Для рассматриваемого случая на контактной поверхности $\varepsilon_y = \varepsilon_z = 0$. При этом условии из физических уравнений следует

$$\sigma_x = \frac{E_{гр}}{1-\mu^2}\ \varepsilon_x , \tag{6}$$

$$\sigma_z = \frac{\mu\, E_{гр}}{1-\mu^2}\ \varepsilon_x , \tag{7}$$

$\sigma_x , \sigma_y , \sigma_z$ – нормальные составляющие вектора напряжений,

$\varepsilon_x , \varepsilon_y , \varepsilon_z$ – нормальные составляющие вектора деформаций,

$E_{гр} , \mu$ – модуль деформации грунта и коэффициент Пуассона.

Подставив соотношения (5–7) в (3) и (4), получим

$$\tau = \sigma \cdot \operatorname{tg} \varphi = \frac{\mu\ tg\varphi\ E_{гр}}{1-\mu^2}\ \varepsilon_x , \tag{8}$$

$$\tau = c + \sigma \cdot \operatorname{tg} \varphi = \frac{(1+2\mu\ tg\varphi)\,E_{гр}}{2\,(1-\mu^2)}\ \varepsilon_x . \tag{9}$$

Выражения (8) и (9) можно объединить следующим образом

$$\tau = \frac{(ks+2\mu\ tg\varphi)\,E_{гр}}{2\,(1-\mu^2)}\ \varepsilon_x , \tag{10}$$

где ks – коэффициент связности,
ks = 0 – несвязный грунт, ks = 1 – связный грунт.
Сила трения равна

$$F = \int_S \tau\, ds = L \int_0^a \tau\, dx , \tag{11}$$

где L – периметр поперечного сечения стержня.
Энергия трения определится выражением

$$Э_{тр} = \frac{1}{2}\int_0^a F^T \varepsilon_x\, dx = \frac{L}{2}\iint_s \tau^T\ \varepsilon_x\, dx\, dx . \tag{12}$$

Подставим в (12) выражение (10)

$$Э_{тр} = \frac{L}{2}\cdot\frac{ks+2\mu\ tg\varphi}{2(1-\mu^2)}\,E_{гр}\cdot\iint_s \varepsilon^T\ \varepsilon_x\, dx\, dx . \tag{13}$$

Для линейно-упругого стержня его растяжение может быть представлено линейной функцией

$$U = \alpha_1 + \alpha_2\, x . \tag{14}$$

Рассматривая элемент дискретизации стержня с двумя узлами i, j на его концах, значения коэффициентов в (14) определим через узловые перемещения U_i, U_j, в итоге получим

$$U = \frac{1}{a}\left[(x_j - x)U_i + (x - x_i)U_j\right], \tag{15}$$

где a – длина единичного элемента стержня.
Для рассматриваемого случая

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{a}(-U_i + U_j) = \frac{1}{a}\ [-1 \quad 1] \begin{Bmatrix} U_i \\ U_j \end{Bmatrix}. \tag{16}$$

В (13) подставим (16), проинтегрируем полученное выражение по {U} и получим

$$\frac{\partial Э_{ТР}}{\partial\{U\}} = \frac{(ks + 4\mu\, tg\varphi)\, S\, E_{гр}}{2(1-\mu^2)a} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \{U\},$$

где S – площадь боковой поверхности стержня.
Следовательно, матрица жёсткости при трении будет равна

$$[K_{ТР}] = \frac{(ks + 2\mu\, tg\varphi)\, S\, E_{гр}}{2(1-\mu^2)a} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \tag{17}$$

Энергия растяжения значительно превосходит энергию прогиба [1]. Сравним энергию растяжения армирующего элемента с энергией трения его с грунтом.
Матрица жёсткости армирующего элемента при растяжении будет равна:

$$[K_{ар}] = \frac{t F E_c}{a} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \tag{18}$$

где $$t = \frac{1-\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)}.$$

t – коэффициент вида деформации;
F – площадь поперечного сечения армирующего элемента;
E_c – модуль деформации армирующего материала.

Полученные выражения матриц жёсткости позволяют сравнить энергоёмкость каждого из деформационных процессов. Отношение этих матриц равно

$$m = \frac{(ks + 2\mu\ tg\varphi) S\, E_{гр}}{2t(1-\mu^2)\, F\, E_c}. \tag{19}$$

Численное значение величин в выражении (19) показывает, что энергия трения примерно в десять раз превосходит энергию растяжения, которая в свою очередь, значительно превосходят энергию изгиба. Отсюда следует, что энергия трения, иначе сила сцепления армирующего материала с грунтом, имеет определяющее значение при расчёте и устройстве армированных грунтовых оснований фундаментов. Кроме того, из этого сравнения следует, что в качестве армирующего материала может быть использован нежёсткий материал, имеющий хорошее сцепление с грунтом и с физико-механическими характеристиками в $4 \div 5$ раз превосходящими соответствующие характеристики армируемого грунта, например, дарнит. Как показали результаты компьютерного моделирования и соответствующие экспериментальные исследования, несущая способность армированных грунтовых оснований возрастает в 1,5 – 2 раза [4]. Таким образом, армирование грунтовых оснований позволит иметь определённый экономический эффект и этим самым снизить стоимость возводимых строительных объектов на территориях, содержащих грунтовые слои пониженной несущей способности.

Abstract

The author offers a mathematical model of interaction of a material of the reinforced elements with a ground foundation and investigates effectiveness of this interaction.

Литература

1. Быховцев В.Е. Компактный алгоритм построения матрицы жесткости в методе конечных элементов. – Изд. АН БССР, серия физ.-мат., №1, Наука, 1983, с.34-37.
2. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир,1975. – 540с.
3. Партон В.З., Перлин П.И. Методы математической теории упругости. – М.: Наука, 1981. – 688 с.
4. Сеськов В.Е., Быховцев В.Е., Феофилов Ю.В. Рекомендации по армированию песчаных намывных и насыпных оснований // Госстрой БССР, НИИС, Мн. – 1984. – 12 с.
5. Цытович Н.А. Механика грунтов. – М: Стройиздат, 1963. – 542 с.

Гомельский государственный
университет имени Ф. Скорины

Поступило 12.04.04