Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, №3(18), 2003

УДК 681.3.06

Исследование колебаний пакетов рабочих лопаток турбомашин при нарушении симметрии системы

В.В.Орлов

Исследование колебаний пакетов рабочих лопаток турбомашин связано с необходимостью разработки методов расчета пакетов при разбросе парциальных свойств отдельных лопаток, что в большей или меньшей мере справедливо для любых систем лопаток. Трудность заключается в необходимости перехода от моделей отдельных лопаток с различными инерционными, жесткостными и геометрическими свойствами к модели всего пакета без существенной потери точности. Использование исходных моделей лопаток для формирования модели всей системы при ограниченном объеме оперативной памяти ЭВМ возможно лишь при их максимальном упрощении, что не может быть признано целесообразным для лопаток сложной формы.

В работе рассматривается методика расчетного исследования колебаний пакетов неоднородных рабочих лопаток на основе метода конечных элементов (МКЭ) и метода динамических суперэлементов (МДСЭ). Создан комплекс прикладных программ, позволяющий проводить расчеты свободных колебаний пакетов с разбросом парциальных свойств отдельных лопаток при любых проволочных связях и бандажах с учетом эффекта вращения.

При расчетах вводится понятие секции – сектора диска с укрепленной в нем лопаткой и участками демпферных связей. Конечно-элементная модель секции строится с использованием элементов различной формы и характеристик. Предусмотрена возможность моделирования полки интегрального бандажа или участка ленточного бандажа. Проволочная связь может быть сплошной или разрезанной в плоскости диска, припаянной или свободно вставленной в отверстия лопаток. При необходимости учета податливости заделки лопаток формируется модель хвостовика на основе метода суперэлементов в рамках статической задачи (метод статической конденсации), позволяющая учесть заданные условия закрепления хвостовика в диске и получить характеристики его жесткостных свойств. Для учета податливости диска формируются модели сектора диска и хвостовика методом статической конденсации.

Суть метода статической конденсации заключается в следующем. Подразделяем совокупность степеней свободы, описывающих поведение всей системы в методе конечных элементов, на две группы – зависимые и независимые. Используя соотношения метода конечных элементов для соотвествующей статической задачи, зависимые степени свободы необходимости выразить через независимые

$$\left(\bar{q}_1, \bar{q}_2, \ldots, \bar{q}_r\right)^T = K\left(\bar{\bar{q}}_1, \bar{\bar{q}}_2, \ldots, \bar{\bar{q}}_l\right)^T, \qquad (1)$$

где $\bar{q}_i$ (i=1,2,…,r) – зависимые, $\bar{\bar{q}}_i$ (i =1,2,...,l) – независимые степени свободы, K – матрица преобразования. Тогда переход от исходной системы к системе с сокращенным числом степеней свободы можно выразить следующим образом:

$$\left(\bar{q}_1, \ldots, \bar{q}_r, \bar{\bar{q}}_1, \ldots, \bar{\bar{q}}_l\right)^T = \left(\frac{K}{E}\right)\left(\bar{\bar{q}}_1, \ldots, \bar{\bar{q}}_l\right)^T, \qquad (2)$$

где E – единичная матрица размерности $(l \times l)$.

Данный метод успешно применяется для статического анализа конструкций и сооружений, однако он находит ограниченное и специфичное применение к общему анализу колебаний и динамики конструкций, поскольку преобразование (2) не обеспечивает удовлетворительного описания поведения сложных систем сокращенным числом степеней свободы.

В работе в рамках МКЭ реализован метод сокращения числа степеней свободы моделей, основанный на разложении по формам свободных колебаний отдельных частей исследуемой конструкции. Он получил название метода динамических суперэлементов (МДСЭ).

В методе динамических суперэлементов исследуемую систему N представляют в виде объединения n подсистем N_i (i=1,2,…n)

$$N = \bigcup_{i=1}^{n} N_i \,, \tag{3}$$

причем поведение каждой из подсистем N_i описывается ее конечно-элементной моделью. Совокупность n_i степеней свободы каждой подсистемы также подразделяют на l_i независимых и r_i зависимых, где $l_i + r_i = n_i$. Выбор независимых степеней свободы должен удовлетворять условиям стыковки смежных суперэлементов.

Переход от исходной конечно-элементной модели подсистемы N_i к супер-модели с сокращенным числом степеней свободы получаем в виде

$$\left(\overline{q}_1,\dots,\overline{q}_{r_i},\overline{\overline{q}}_1,\dots,\overline{\overline{q}}_{l_i}\right)^T = \begin{pmatrix} K & \Phi \\ E & \mathrm{O} \end{pmatrix} \left(\overline{\overline{q}}_1,\dots,\overline{\overline{q}}_{l_m}, f_1,\dots,f_{k_i}\right)^T , \tag{4}$$

где $\overline{q}_i$ (i = 1,2,…,r$_i$), $\overline{\overline{q}}_i$ (i=1,2,..., l_i) – независимые степени свободы; K – матрица преобразования, аналогичная матрице K из соотношения (1); E – единичная матрица размерности (l_i x l_i); Ф – в общем случае прямоугольная матрица, имеющая в качестве столбцов формы свободных колебаний подсистемы, соответствующие первым K$_i$ собственным частотам; $f_i\left(i=1,\dots,K_i\right)$ обобщенные степени свободы, связанные с рассматриваемыми K_i формами свободных колебаний подсистемы. Тогда, если С и М – матрицы жесткости и инерции исходной конечно-элементной модели, то соответствующие матрицы супермодели определяются следующим образом:

$$\overline{C} = P^T C P, \quad \overline{M} = P^T M P , \tag{5}$$

где $P = \begin{pmatrix} K & \Phi \\ E & \Phi \end{pmatrix}$.

На следующем этапе применения МДСЭ решается задача объединения супер-моделей всех подсистем с целью формирования модели исследуемой конструкции. С этой целью на граничные степени свободы подсистем накладываются условия геометрической совместности. Рассмотрим это на примере объединения двух подсистем: N$_1$ с n_1 супер-степенями свободы $q_1, q_2, \dots, q_{n_1}$ и N$_2$ с n_2 супер-степенями свободы $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{n_2}$, причем k степеней свободы в обеих подсистемах принадлежат их общей границе. Тогда общее координатное преобразование для всей системы записывается в виде

$$\left(q_1,\dots,q_{n_1},\delta_1,\dots,\delta_{n_2}\right)^T = \mathrm{B}\left(q_1,\dots,q_{m_1},\delta_1,\dots,\delta_{m_2},p_1,\dots,p_k\right)^T , \tag{6}$$

где $m_1 = n_1 - k$; B – матрица преобразования, элементами которой являются нули и единицы; $p_1 \equiv \delta_{G_1} \equiv q_{G_1}, \dots, p_k \equiv \delta_{G_k} \equiv q_{G_k}$ и индексы G$_1$, G$_2$,..., G$_k$ означают степени свободы общей границы двух подсистем. Структура матрицы В в значительной степени зависит от расположения граничных степеней свободы в последовательности $q_1, q_2, \dots, q_{n_1}$ и $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{n_2}$. Если C$_1$, C$_2$, M$_1$ и M$_2$ – матрицы жесткости и инерции двух рассматриваемых подсистем, то матрицы жесткости и инерции всей системы получают на основе соотношений

$$\overline{C} = B^T \begin{pmatrix} C_1 & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & C_2 \end{pmatrix} B, \quad \overline{M} = B^T \begin{pmatrix} M_1 & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & M_2 \end{pmatrix} B . \tag{7}$$

Метод динамических суперэлементов позволяет исследовать динамику сложных конструкций с использованием сокращенного числа степеней свободы без существенной потери точности моделей. В данной работе он используется для формирования супер-моделей области пера лопатки и всей секции. Проведенные тестовые расчеты позволяют сделать вывод, что использование первых 10 форм свободных колебаний в МДСЭ гарантирует высокую точность моделей лопаток сложной формы.

Рассмотрим пакет из r рабочих лопаток с произвольными промежуточными связями. В случае всех однотипных лопаток ввиду симметрии свойств системы необходима супер-модель одной секции. Для другого крайнего случая, когда все лопатки в пакете разнотипны по своим характеристикам, требуется формирование супер-модели каждой секции. И, наконец, при наличии в пакете нескольких лопаток с различными характеристиками требуется получение супер-моделей всех неоднородных секций и одной из однородных.

Пусть супер-модель i-ой секции имеет S_i степеней свободы, в том числе S_{l_i} левой границы, S_{P_i} – правой границы и S_{B_i} "внутренних" степеней свободы. Тогда при соответствующей нумерации узлов или после перестановки элементов матрицы жесткости и инерции секции будут иметь следующую структуру:

$$\begin{pmatrix} M^i_{ll} & M^i_{lB} & M^i_{lP} \\ M^i_{Bl} & M^i_{BB} & M^i_{BP} \\ M^i_{PL} & M^i_{PB} & M^i_{PP} \end{pmatrix} \tag{8}$$

Необходимо отметить, что $S_{l_i} = S_{P,i-1}, S_{P_i} = S_{l,i+1}$, где i=2, 3,…, r-1.

На основе полученных соотношений МДСЭ для каждой секции формируем матрицы жесткости и инерции всей системы

$$\begin{pmatrix} M^1_{ll} & M^1_{lB} & M^1_{lP} & O & O & O & \cdots & O & O & O & O \\ M^1_{Bl} & M^1_{BB} & M^1_{BP} & O & O & O & \cdots & O & O & O & O \\ M^1_{Pl} & M^1_{PB} & M^1_{PP}+M^2_{ll} & M^2_{eB} & M^2_{eP} & O & \cdots & O & O & O & O \\ O & O & M^2_{Bl} & M^2_{BB} & M^2_{BP} & O & \cdots & O & O & O & O \\ O & O & M^2_{Pl} & M^2_{PB} & M^2_{PP}+M^3_{ll} & M^3_{EB} & \cdots & O & O & O & O \\ O & O & O & O & M^3_{BL} & M^3_{BB} & \cdots & O & O & O & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ O & O & O & O & O & O & \cdots & M^{-1}_{BB} & M^{-1}_{BP} & O & O \\ O & O & O & O & O & O & \cdots & M^{-1}_{PB} & M^{-1}_{PP}+M^{r}_{ll} & M^{r}_{lB} & M^{r}_{lP} \\ O & O & O & O & O & O & \cdots & O & M^{r}_{Bl} & M^{r}_{BB} & M^{r}_{BP} \\ O & O & O & O & O & O & \cdots & O & M^{r}_{Pl} & M^{r}_{PB} & M^{r}_{PP} \end{pmatrix} \tag{9}$$

Число S супер-степеней свободы всей системы вычисляется по формуле

$$S = \sum_{i=1}^{r} \left(S_{l_i} + S_{B_i} \right) + S_{pr} \,. \tag{10}$$

Отметим, что выбор числа супер-степеней свободы каждой секции определяется условиями стыковки соседних секций, а также оценкой (10) и характеристиками оперативной памяти используемой ЭВМ. Для пакетов с однородными лопатками вычислительные затраты минимальны, тогда как при исследовании пакетов со всеми разнотипными лопатками – максимальны.

Разработанный метод позволяет исследовать свободные колебания пакетов рабочих лопаток с произвольными связями в поле центробежных сил при значительном (в крайнем случае – полном) нарушении симметрии системы.

Abstract

The author considered the technique of the research of fluctuations of the packages of non-uniform working blades and the method of dynamic superelements.

Гомельский государственный
университет им. Ф.Скорины

Поступило 7.04.2003