УДК 535.14

ОБ ИЗЛУЧЕНИИ ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЕЙ, ДВИЖУЩЕЙСЯ ПО ВИНТОВОЙ ЛИНИИ В ПРОЗРАЧНОЙ АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ

А. Б. Куканов и *Б. Д. Ориса*

В работе применен метод Ситенко и Коломенского для определения электрической напряженности поля излучения заряженной частицей, движущейся по винтовой линии в прозрачном одноосном кристалле. Подсчитаны потери частицы на излучение. Для частного случая движения вдоль оптической оси с постоянной скоростью $v_\parallel$ полученная формула совпадает с известным результатом для интенсивности излучения Вавилова—Черенкова. Для другого частного случая равномерного движения по окружности в вакууме находим известный результат Шотта. На основе излагаемого метода рассмотрена также задача об излучении заряженной частицей при одномерном равномерно ускоренном (гиперболическом) движении в постоянном электрическом поле в вакууме. Получена формула для спектрально-углового распределения излучения, а также исследована поляризация этого излучения.

Теория потерь энергии зарядом, движущимся по винтовой линии в плазме, была разработана в [1, 2], причем в [1] при решении алгебраической системы уравнений для Фурье-компоненты $\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega)$ использовался метод разложения $\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega)$ по векторам поляризации $\mathbf{a}_l$ с эллиптической поляризацией, а затем потери подсчитывались по формуле

$$W = -\int (\mathbf{E}\mathbf{j})\, d\mathbf{r}, \tag{1}$$

выражающей мощность силы торможения, действующей на частицу со стороны создаваемого ею электромагнитного поля в среде. В [2] использовался гамильтонов формализм. В настоящей работе мы попытаемся развить третий подход к решению задачи об излучении заряженной частицы, движущейся по винтовой линии в анизотропной среде, основанный на методе Ситенко и Коломенского [3] определения напряженностей полей из уравнений Максвелла без предварительного перехода к потенциалам. Этот метод уже использовался для подсчета потерь энергии на излучение Вавилова—Черенкова в анизотропных средах [4–6]. Ограничиваясь случаем прозрачного одноосного кристалла (оптическая ось которого параллельна оси Oz) и считая, что внешнее постоянное магнитное поле $\mathbf{H}$ направлено вдоль оси Oz, запишем координаты частицы в функции t лабораторного времени в виде

$$x_e(t) = R\cos\bar{\omega}t, \quad y_e(t) = R\sin\bar{\omega}t, \quad z_e(t) = v_\parallel t, \tag{2}$$

где $v_\parallel$ — постоянная составляющая скорости частицы вдоль оси Oz, а угловая скорость $\bar{\omega}$ вращения частицы связана с постоянной поперечной к полю составляющей скорости $v_\perp$ и расстоянием R частицы до оси Oz формулой $\bar{\omega} = v_\perp R^{-1}$.

Выражение для энергии излучения в единицу времени частицей, движущейся по траектории (2), можно записать в виде

$$W = \frac{e^2}{4\pi^3} \operatorname{Re} i \int \omega^{-1} v_k v'_j T^{-1}_{kj} e^{i\mathbf{k}[\mathbf{r}_e(t) - \mathbf{r}_e(t')] - i\omega(t-t')}\, dt'\, d\mathbf{k}\, d\omega. \tag{3}$$

Здесь e — заряд частицы, $v_k = v_k(t)$ и $v'_j = v_j(t')$ k-тая и j-тая ($k, j = x, y, z$) компоненты вектора скорости частицы соответственно в моменты t и t'. $\mathbf{r}_e(t)$ — ее радиус-вектор. Обозначив через $\varepsilon_l = \varepsilon_l(\omega) > 0$, $\mu_l = \mu_l(\omega) > 0$ соответственно электрическую и магнитную проницаемости вдоль ($l = 3$) и перпендикулярно ($l = 1$) оптической оси кристалла, $n^2 = k^2c^2\omega^{-2}$, $\varkappa = \{\sin\Theta\cos\Psi;\ \sin\Theta\sin\Psi;\ \cos\Theta\}$ — единичный вектор вдоль $\mathbf{k}$, c — скорость света в вакууме, имеем

$$v_k v'_j T^{-1}_{kj} = \left[\frac{1}{(n_\varepsilon^2 - n_\mu^2)(n^2 - n_\varepsilon^2)} + \frac{1}{(n_\mu^2 - n_\varepsilon^2)(n^2 - n_\mu^2)}\right]\frac{M_{jk}v_k v'_j}{A}. \tag{4}$$

$A = \varepsilon_1^2\varepsilon_3 n_\varepsilon^{-2} n_\mu^{-2}$, n_ε и n_μ — коэффициенты преломления волн в рассматриваемом кристалле, M_{jk} — алгебраические дополнения элементов t_{jk} в определителе $|T_{jk}|$ [7]. Для количества энергии, излучаемой частицей в единицу времени, получаем

$$W = W_\mu + W_\varepsilon, \tag{5}$$

$$W_\mu = \frac{e^2}{c^3}\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}\int_0^\infty\int_{-\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}}^{\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}} \mu_3\omega^2 v_\perp^2 J'^2_\nu(y_\mu)\,\delta(\omega\beta_\parallel s_\mu - \omega + \nu\tilde\omega)\,d\omega\,ds_\mu, \tag{6}$$

$$W_\varepsilon = \frac{e^2}{c^3}\int_0^\infty\int_{-\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}}^{\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}} \mu_1\omega^2 v_\parallel^2 J_0^2(y_\varepsilon)\left(1 - \frac{s_\varepsilon^2}{\varepsilon_1\mu_1}\right)\delta(\omega\beta_\parallel s_\varepsilon - \omega)\,d\omega\,ds_\varepsilon +$$

$$+ \frac{e^2}{c^3}\sideset{}{'}\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}\int_0^\infty\int_{-\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}}^{\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}} \mu_1\omega^2\frac{(\varepsilon_1\mu_1 v_\parallel - cs_\varepsilon)^2}{\varepsilon_1\mu_1(\varepsilon_1\mu_1 - s_\varepsilon^2)} J_\nu^2(y_\varepsilon)\,\delta(\omega\beta_\parallel s_\varepsilon - \omega + \nu\tilde\omega)\,d\omega\,ds_\varepsilon. \tag{7}$$

Здесь

$$s_\gamma = n_\gamma\cos\Theta,\ \ \gamma = \varepsilon,\ \mu;\ \ y_\gamma = \frac{\omega n_\gamma}{c}\sin\Theta R;\ \ \beta_\parallel = \frac{v_\parallel}{c};\ \ \sideset{}{'}\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} = \sum_{-\infty}^{-1} + \sum_{+1}^{\infty}. \tag{8}$$

Если в (6) и (7) положить $\tilde\omega = v_\perp R^{-1} = 0$ и проинтегрировать в (7) по s_ε, получим, используя формулу $J_0^2(z) + 2\sum_{\nu=1}^{\infty} J_\nu^2(z) = 1$, при условии $\varepsilon_1\mu_1\beta_\parallel^2 > 1$ результаты [8, 9, 5] для интенсивности излучения Вавилова—Черенкова заряженной частицей, движущейся со скоростью $v_\parallel$ вдоль оптической оси кристалла

$$W_\mu = 0,\ \ W_\varepsilon = \frac{e^2 v_\parallel}{c^2}\int \mu_1\omega\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_1\mu_1\beta_\parallel^2}\right)d\omega,\ \ \text{если}\ \ \varepsilon_1\mu_1\beta_\parallel^2 > 1. \tag{9}$$

При $\varepsilon_1\mu_1\beta_\parallel^2 < 1$ $W_\mu = W_\varepsilon = 0$. Если положить в (6) и (7) $\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = \varepsilon$, $\mu_1 = \mu_3 = \mu$ и суммы $\sideset{}{'}\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}$ проинтегрировать по ω, получим следующее суммарное выражение для интенсивности излучения на гармониках $\nu \neq 0$:

$$W' = \left(\frac{ev_\perp}{cR}\right)^2\int_0^\pi\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\mu(\omega_\nu)\nu^2}{c'(1 - \beta_\parallel n\cos\Theta)^2}\left[\frac{(v_\parallel - c'\cos\Theta)^2}{\sin^2\Theta}J_\nu^2(x_\nu) + v_\perp^2 J'^2_\nu(x_\nu)\right]\times$$

$$\times\frac{\sin\Theta\,d\Theta}{\left|\frac{d}{d\omega}(\omega n)\beta_\parallel\cos\Theta - 1\right|_{\omega=\omega_\nu}}, \tag{10}$$

$$\omega_\nu = \frac{\tilde\omega\nu}{|1 - \beta_\parallel\cos\Theta n(\omega_\nu)|},\ \ x_\nu = \frac{v_\perp\nu\sin\Theta}{c'|1 - \beta_\parallel\cos\Theta n(\omega_\nu)|},\ \ c' = \frac{c}{n} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}. \tag{11}$$

В случае движения частицы по винтовой линии в вакууме ($\varepsilon = \mu = 1$) члены с $\nu = 0$ в (6) и (7) дают нуль, а формула (10) приводит к известному результату [2, 10], переходящему при $v_\parallel=0$ в формулу Шотта. При $v_\parallel=0$ и $\mu=1$ из (10) получаем формулу (15) работы [11].

Рассмотрим теперь применение формулы (1) на основе метода Ситенко и Коломенского для подсчета потерь энергии на излучение частицей, движущейся в вакууме в постоянном электрическом поле $\mathbf{E}$ ($\mathbf{E} \parallel Oz$). Ограничимся случаем одномерного (вдоль Oz) движения. Вопрос о возможности излучения при таком движении в настоящее время не вызывает сомнения [12–14], хотя раньше высказывались и противоположные мнения [15].

Как известно, уравнения гиперболического движения частицы можно записать в виде [16, 17] ($\mathcal{E}_0=m_0c^2$ — энергия покоя частицы)

$$x_e(t)=0,\quad y_e(t)=0,\quad z_e(t)=\frac{c}{a}\left(\sqrt{a^2t^2+1}-1\right),\quad a=\frac{ceE}{\mathcal{E}_0}. \tag{12}$$

Особенность рассматриваемой задачи по сравнению с предыдущей состоит в том, что величина W в формуле (1), выражающая мощность силы торможения, оказывается функцией времени. Поэтому для нахождения спектрально-углового распределения полного излучения мы должны проинтегрировать (1) по t от $-\infty$ до $+\infty$. Окончательно находим

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} W\,dt=\frac{2e^2}{\pi ca^2}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{\infty}\omega^2\sin\Theta K_{\frac{2}{1}}^{2}\left(\frac{\omega\sin\Theta}{a}\right)d\Theta\, d\omega. \tag{13}$$

Эту же формулу мы получим, если поле $\mathbf{E}(\mathbf{r},\ t)$ определим через потенциалы, воспользовавшись методом функций Грина [16] решения дифференциальных уравнений для потенциалов $\mathbf{A}$ и φ, а вычисления в (1) проведем, используя формулы [18].

Проводя далее интегрирование по ω в правой части (13), находим

$$a\int\limits_{-\infty}^{\infty} W\,dt=\frac{2}{3}\,\frac{e^2a^2}{c}\,\frac{9\pi}{32}\int\limits_0^{\pi}\frac{d\Theta}{\sin^2\Theta}. \tag{14}$$

Расходящийся результат для полной энергии излучения за бесконечное время естествен, если учесть, что интенсивность рассматриваемого источника, проинтегрированная по всем направлениям $\mathbf{n}$, постоянна и равна [14, 19]

$$\int\limits_{4\pi}\frac{d\mathcal{E}_{\mathbf{n}}}{dt'}=\int\limits_{4\pi}\frac{([\mathbf{EH}]\,\mathbf{n})}{4\pi}\,cR^2\left(1-\frac{(\mathbf{vn})}{c}\right)d\Omega=\frac{2}{3}\,\frac{e^2a^2}{c}=\text{const}. \tag{15}$$

Результат (14) получается также, если проинтегрировать по времени выражение для потока энергии, взятое на больших расстояниях от источника (t' — время источника)

$$a\int\limits_{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\mathcal{E}_{\mathbf{n}}=\frac{ae^2}{4\pi c^3}\int\limits_{4\pi}d\Omega\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left\{\frac{2\,(\mathbf{nW})\,(\mathbf{vw})}{c\left(1-\frac{(\mathbf{vn})}{c}\right)^4}+\frac{\mathbf{W}^2}{\left(1-\frac{(\mathbf{vn})}{c}\right)^3}-\right.$$

$$\left.-\frac{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)(\mathbf{nW})^2}{\left(1-\frac{(\mathbf{vn})}{c}\right)^5}\right\}dt'=\frac{2}{3}\,\frac{e^2a^2}{c}\,\frac{9\pi}{32}\int\limits_0^{\pi}\frac{d\Theta}{\sin^2\Theta}. \tag{16}$$

Излучение при гиперболическом движении линейно поляризовано, причем Фурье-компонента $\mathbf{E}(\mathbf{k},\ \omega)$ электрического поля излучения лежит в плоскости, содержащей волновой вектор $\mathbf{k}$ и вектор скорости частицы.

В заключение авторы сердечно благодарят А. А. Соколова за обсуждение полученных результатов.

Литература

[1] В. Д. Шафранов. Сб. «Вопросы теории плазмы», т. 3, Госатомиздат, М., 1963.
[2] В. Я. Эйдман. ЖЭТФ, *31*, 131, 1958.
[3] А. Г. Ситенко, А. А. Коломенский. ЖЭТФ, *30*, 511, 1956.
[4] Г. А. Бегиашвили, Э. В. Гедалин. ЖЭТФ, *36*, 1939, 1959.
[5] А. Б. Куканов. Опт. и спектр., *14*, 121, 1963.
[6] А. Б. Куканов, Тхай Куан. Опт. и спектр., *15*, 124, 1963.
[7] А. Б. Куканов. Изв. вузов, физика, № 8, 108, 1969.
[8] В. Л. Гинзбург. ЖЭТФ, *10*, 539, 1940.
[9] И. М. Франк, И. Е. Тамм. ДАН СССР, *14*, 107, 1937.
[10] А. А. Соколов, В. Ч. Жуковский, М. М. Колесников, Н. С. Никитина, О. Е. Шишанин. Изв. вузов, физика, № 2, 107, 1969.
[11] В. Н. Цытович. Вестн. МГУ, физика, № 11, 27, 1951.
[12] T. Fulton, F. Rohrlich. Ann. of Phys., *9*, 499, 1960.
[13] F. Rohrlich. Nuovo Cim., *21*, 802, 1961.
[14] А. И. Никишов, В. И. Ритус. ЖЭТФ, *56*, 2035, 1969.
[15] В. Паули. Теория относительности, 139. Гостехиздат, М.—Л., 1947.
[16] Д. Д. Иваненко, А. А. Соколов. Классическая теория поля, Гостехиздат, М., 1951.
[17] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Теория поля. Физматиздат, М., 1960.
[18] И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз, М., 1963.
[19] В. Л. Гинзбург. Усп. физ. наук, *98*, 569, 1969.

Поступило в Редакцию 15 октября 1969 г.