Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 3 (84), 2014

Математика

УДК 517.925

К вопросу о различении центра, фокуса и седло-фокуса для системы Дарбу

В.В. Блашкевич[1], А.А. Денисковец[2], В.Ю. Тыщенко[1]

Решена задача определения топологического типа (центра, фокуса или седло-фокуса) для изолированного состояния равновесия системы Дарбу, имеющего пару чисто мнимых и один вещественный характеристические корни. Приведен класс систем, для которых применим полученный алгоритм решения данной задачи.
Ключевые слова: центр, фокус, седло-фокус, система Дарбу, трехмерные дифференциальные системы.

The problem of definition of topological type (a centre, a focus or a saddle-focus) for the isolated equilibrium state of darboux system having to steam purely imaginary and one real characteristic roots is solved. The class of systems for which the received algorithm of a solution of the given problem is applicable is reduced
Keywords: centre, focus, saddle-focus, Darboux system, three-dimensional differential systems.

Проблема различения центра и фокуса для двумерной автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений исследуется длительное время (см., например, монографию [1]). В то же время аналогичные вопросы в трехмерном случае почти не изучались. В данной работе будем рассматривать вопрос о различении топологического типа изолированного состояния равновесия трехмерной системы Дарбу, имеющего пару чисто мнимых и один вещественный характеристические корни. В этом случае возникает задача различения центра, фокуса и седло-фокуса [2, с. 202 – 203].

Рассмотрим трехмерную систему Дарбу [3]

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_1x + b_1y + c_1z + xR(x,y,z), \\ \dfrac{dy}{dt} = a_2x + b_2y + c_2z + yR(x,y,z), \\ \dfrac{dz}{dt} = a_3x + b_3y + c_3z + zR(x,y,z), \end{cases} \tag{1}$$

где $R(x,y,z)$ есть гладкая однородная функция степени однородности $m \geq 1$, и для этой системы $O(0,0,0)$ является изолированным состоянием равновесия с парой чисто мнимых и одним вещественным характеристическими корнями. Непосредственными вычислениями убеждаемся, что в этом случае с помощью линейного однородного невырожденного преобразования (не меняющего топологический тип состояния равновесия $O(0,0,0)$) систему Дарбу (1) приводим к виду

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -\beta y + xS(x,y,z), \\ \dfrac{dy}{dt} = \beta x + yS(x,y,z), \\ \dfrac{dz}{dt} = \lambda z + zS(x,y,z), \end{cases} \tag{2}$$

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

где $\beta \neq 0$, $S(x, y, z)$ есть гладкая однородная функция степени однородности $m \geq 1$.

Рассмотрим два логически возможных случая: 1) $\lambda \neq 0$; 2) $\lambda = 0$.

В первом случае, не умаляя общности, будем полагать $\lambda < 0$ (ибо в противном случае этого всегда можно добиться заменой независимой переменной $t \mapsto -t$). Далее для определения топологического типа состояния равновесия $O(0,0,0)$ системы Дарбу (2) исследуем поведение этой системы на асимптотически устойчивой (притягивающей) интегральной плоскости $z = 0$. В результате получаем двумерную автономную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -\beta y + xT(x, y), \\ \dfrac{dy}{dt} = \beta x + yT(x, y), \end{cases} \tag{3}$$

где $T(x, y) \equiv S(x, y, 0)$. Тогда (с учетом $\lambda < 0$) имеем, что: 1) если состояние равновесия $O(0,0)$ системы (3) является устойчивым фокусом, то состояние равновесия $O(0,0,0)$ системы Дарбу (2) (а, значит, и системы Дарбу (1)) будет фокусом; 2) если состояние равновесия $O(0,0)$ системы (3) является центром, то состояние равновесия $O(0,0,0)$ системы Дарбу (2) есть центр; 3) если состояние равновесия $O(0,0)$ системы (3) является неустойчивым фокусом, то состояние равновесия $O(0,0,0)$ системы Дарбу (2) будет седло-фокусом.

Для определения характера состояния равновесия $O(0,0)$ системы (3), следуя [4], перейдем к полярным координатам. В результате имеем двумерную автономную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{d\rho}{dt} = T(\cos\varphi, \sin\varphi)\rho^{1+m}, \\ \dfrac{d\varphi}{dt} = \beta, \end{cases} \tag{4}$$

уравнением траекторий которой будет

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = \frac{T(\cos\varphi, \sin\varphi)\rho^{1+m}}{\beta}. \tag{5}$$

Дифференциальное уравнение (5) имеет общий интеграл

$$\rho^{-m} = C - \frac{m}{\beta}\int_0^{\varphi} T(\cos\tau, \sin\tau)d\tau, \tag{6}$$

где C есть произвольная постоянная. Теперь на основании представлений (4) – (6) приходим к следующим выводам: 1) состояние равновесия $O(0,0)$ системы (3) при $\beta\int_0^{2\pi} T(\cos\tau, \sin\tau)d\tau > 0$ является неустойчивым фокусом; 2) состояние равновесия $O(0,0)$ системы (3) при $\beta\int_0^{2\pi} T(\cos\tau, \sin\tau)d\tau = 0$ является центром; 3) состояние равновесия $O(0,0)$ системы (3) при $\beta\int_0^{2\pi} T(\cos\tau, \sin\tau)d\tau < 0$ является устойчивым фокусом. Таким образом, мы получили такое утверждение.

Теорема 1. *Если* $\lambda < 0$, *то состояние равновесия* $O(0,0,0)$ *системы Дарбу* (2) *является:*

1) *фокусом при* $\beta\int_0^{2\pi} S(\cos\tau, \sin\tau, 0)d\tau < 0$;

2) *центром при* $\beta\int_0^{2\pi} S(\cos\tau, \sin\tau, 0)d\tau = 0$;

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

3) *седло-фокусом при* $\beta \int_0^{2\pi} S(\cos\tau, \sin\tau, 0)d\tau > 0$.

Кроме того, на основании хода доказательства теоремы 1 можно сделать следующие выводы.

Теорема 2. *Для того, чтобы при* $\lambda \neq 0$ *состояние равновесия* $O(0,0,0)$ *системы Дарбу* (2) *было устойчивым по Ляпунову, необходимо и достаточно, чтобы* $\lambda < 0$ *и* $\beta \int_0^{2\pi} S(\cos\tau, \sin\tau, 0)d\tau \leq 0$.

Теорема 3. *Для того, чтобы при* $\lambda \neq 0$ *состояние равновесия* $O(0,0,0)$ *системы Дарбу* (2) *было асимптотически устойчивым, необходимо и достаточно, чтобы* $\lambda < 0$ *и* $\beta \int_0^{2\pi} S(\cos\tau, \sin\tau, 0)d\tau < 0$.

Пример 1. Рассмотрим систему Дарбу

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y + x\left(-x^2 - y^2 + z^2\right), \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y\left(-x^2 - y^2 + z^2\right), \\ \dfrac{dz}{dt} = -z + z\left(-x^2 - y^2 + z^2\right). \end{cases}$$

Так как $\int_0^{2\pi} \left(-\cos^2\tau - \sin^2\tau\right)d\tau = -2\pi < 0$, то в силу теорем 1 и 3 приходим к выводу, что состояние равновесия $O(0,0,0)$ данной системы является устойчивым фокусом.

Пример 2. Рассмотрим систему Дарбу

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y + x\left(x^2 - y^2 + z^2\right), \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y\left(x^2 - y^2 + z^2\right), \\ \dfrac{dz}{dt} = -z + z\left(x^2 - y^2 + z^2\right). \end{cases}$$

Так как $\int_0^{2\pi} \left(\cos^2\tau - \sin^2\tau\right)d\tau = 0$, то в силу теорем 1 и 2 приходим к выводу, что состояние равновесия $O(0,0,0)$ данной системы является устойчивым центром.

Пример 3. Рассмотрим систему Дарбу

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y + x\left(x^2 + y^2 + z^2\right), \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y\left(x^2 + y^2 + z^2\right), \\ \dfrac{dz}{dt} = z + z\left(x^2 + y^2 + z^2\right). \end{cases}$$

Так как $\int_0^{2\pi} \left(\cos^2\tau \sin^2\tau\right)d\tau = 2\pi > 0$, то в силу теоремы 1 приходим к выводу, что состояние равновесия $O(0,0,0)$ данной системы является седло-фокусом.

Пусть теперь функция $R(x, y, z)$ (а, значит, и функция $S(x, y, z)$) является однородным полиномом степени m. Тогда принимая во внимание тот факт, что при нечетных m интеграл $\int_0^{2\pi} S(\cos\tau, \sin\tau, 0)d\tau = 0$, на основании теорем 1 – 3 имеем такие утверждения.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Теорема 4. *Состояние равновесия* $O(0,0,0)$ *с парой чисто мнимых и одним ненулевым характеристическим корнями полиномиальной системы Дарбу* (1) *при нечетном* m *является центром, устойчивым при отрицательном вещественном характеристическом корне, и неустойчивым при положительном вещественном характеристическом корне.*

Теорема 5. *Если трехмерное вещественное автономное проективное матричное уравнение Риккати* [5] *имеет состояние равновесия с парой чисто мнимых и одним ненулевым характеристическими корнями, то данное состояние равновесия является центром, устойчивым при отрицательном вещественном характеристическом корне, и неустойчивым при положительном вещественном характеристическом корне.*

Отметим, что вышеприведенные утверждения справедливы и для трехмерной автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -\beta y + F(x,y,z), \\ \dfrac{dy}{dt} = \beta x + G(x,y,z), \\ \dfrac{dz}{dt} = \lambda z + zH(x,y,z), \end{cases}$$

где гладкие функции $F(x,y,0) \equiv xT(x,y)$, $G(x,y,0) \equiv yT(x,y)$, $H(0,0,0) \equiv 0$, а $T(x,y)$ есть гладкая однородная функция степени однородности $m \ge 1$.

Во втором случае в силу однородности гладкой функции $S(x,y,z)$ приходим к выводу, что $S(0,0,0) = 0$ и состояние равновесия $O(0,0,0)$ системы Дарбу (2) является изолированным тогда и только тогда, когда $S(x,y,z) > 0$, $\forall (x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \setminus O(0,0,0)$, или $S(x,y,z) < 0$, $\forall (x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \setminus O(0,0,0)$. Не умаляя общности, будем полагать, что $S(x,y,z) < 0$, $\forall (x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \setminus O(0,0,0)$ (так как в противном случае этого всегда можно добиться заменой независимой переменной $t \mapsto -t$). Далее, как и в первом случае, для определения топологического типа состояния равновесия $O(0,0,0)$ системы Дарбу (2) переходим к двумерной автономной системе обыкновенных дифференциальных уравнений (3) и на основе характера ее состояния равновесия $O(0,0)$ (с учетом того, что функция $S(x,y,z)$ имеет один и тот же знак на $\mathbf{R}^3 \setminus O(0,0,0)$) получаем следующие утверждения.

Теорема 6. *Если* $\lambda = 0$, $S(x,y,z) < 0$, $\forall (x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \setminus O(0,0,0)$, *то состояние равновесия* $O(0,0,0)$ *системы Дарбу* (2) *является:*

1) *фокусом при* $\beta \int\limits_0^{2\pi} S(\cos\tau, \sin\tau, 0)\, d\tau < 0$;

2) *седло-фокусом при* $\beta \int\limits_0^{2\pi} S(\cos\tau, \sin\tau, 0)\, d\tau > 0$.

Теорема 7. *Для того, чтобы при* $\lambda = 0$ *изолированное состояние равновесия* $O(0,0,0)$ *системы Дарбу* (2) *было асимптотически устойчивым, необходимо и достаточно, чтобы* $S(x,y,z) < 0$, $\forall (x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \setminus O(0,0,0)$ *и* $\beta \int\limits_0^{2\pi} S(\cos\tau, \sin\tau, 0)\, d\tau < 0$.

Пример 4. Рассмотрим систему Дарбу

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y - x\left(x^2 + y^2 + z^2\right), \\ \dfrac{dy}{dt} = x - y\left(x^2 + y^2 + z^2\right), \\ \dfrac{dz}{dt} = -z\left(x^2 + y^2 + z^2\right). \end{cases}$$

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Так как $\int_0^{2\pi}\left(-\cos^2\tau-\sin^2\tau\right)d\tau=-2\pi<0$, то в силу теорем 6 и 7 приходим к выводу, что состояние равновесия $O(0,0,0)$ данной системы является устойчивым фокусом.

Пример 5. Рассмотрим систему Дарбу

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-y+x\left(x^2+y^2+z^2\right),\\ \dfrac{dy}{dt}=x+y\left(x^2+y^2+z^2\right),\\ \dfrac{dz}{dt}=z\left(x^2+y^2+z^2\right).\end{cases}$$

Так как $\int_0^{2\pi}\left(\cos^2\tau\sin^2\tau\right)d\tau=2\pi>0$, то в силу теоремы 6 приходим к выводу, что состояние равновесия $O(0,0,0)$ данной системы является седло-фокусом.

Литература

1. Амелькин, В.В. Нелинейные колебания в системах второго порядка / В.В. Амелькин, Н.А. Лукашевич, А.П. Садовский. – Минск : Изд-во БГУ, 1982. – 208 с.

2. Пуанкаре, А. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями / А. Пуанкаре. – М.–Л. : ГИТТЛ, 1947. – 392 с.

3. Горбузов, В. Н. Решения, интегралы и предельные циклы системы Дарбу n–го порядка / В.Н. Горбузов, П.Б. Павлючик // Дифференциальные уравнения и процессы управления. – 2002. – № 2. – С. 26–46. [Электронный ресурс] / – Режим доступа: http://www.math.spbu.ru/diffjournal. Дата доступа 10.05.2014.

4. Горбузов, В.Н. Исследование поведения интегральных кривых одного частного случая уравнения Дарбу / В.Н. Горбузов // Исследования по математике: Тр. / Гроднен. гос. ун-т. – Гродно, 1979. – С. 2–7.

5. Winternitz, P. Lie groups and solutions of nonlinear differential equations / P. Winternitz // Lect. Notes in Phys. – 1983. – V. 189. – P. 263–331.

[1]Гродненский государственный
университет им. Я. Купалы

[2]Гродненский государственный
аграрный университет

[1]Гродненский государственный
университет им. Я. Купалы

Поступила в редакцию 13.05.2014

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ