Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 3 (84), 2014

УДК 512.542

О пересечении A-допустимых подгрупп, не принадлежащих заданному классу групп

Р.В. Бородич, М.В. Селькин

Рассматриваются свойства ядер всех максимальных A-допустимых подгрупп группы G, не содержащих $\Im$-корадикал группы G, не принадлежащих формации $\Im$, индексы которых делятся (не делятся) на простые числа из π Устанавливается их строение и условия принадлежности указанных подгрупп формации $\Im$.
Ключевые слова: максимальная подгруппа, формация, группа операторов.

The intersections of the given systems of maximal subgroups of finite groups are investigated.
Keywords: maximal subgroup, formation, group of operators.

Все рассматриваемые в статье группы предполагаются конечными. Исследование пересечений максимальных подгрупп является одной из классических задач теории групп. Начало этого направления связано с работой Г. Фраттини [1]. Полученные им результаты в дальнейшем развивались в работах многих авторов [2] и [3].

В настоящей работе элементы теории пересечений максимальных подгрупп рассматриваются в группах с операторами, что позволяет по-новому взглянуть на обобщенные подгруппы Фраттини. В связи с этим возникает естественная задача, связанная с исследованием влияния свойств этих подгрупп на строение самой группы.

Через M_G обозначают ядро подгруппы M в группе G (пересечение всех подгрупп из G, сопряженных с подгруппой M).

Пусть даны группа G, множество A и отображение $f: A \mapsto End(G)$, где $End(G)$ – гомоморфное отображение группы G в себя или эндоморфизм группы G. Подгруппа M называется A-допустимой, если M выдерживает действие всех операторов из A, то есть, $M^{\alpha} \subseteq M$ для любого оператора $\alpha \in A$.

Несложно заметить, что так как операторы действуют как соответствующие им эндоморфизмы, то каждая характеристическая подгруппа является A-допустимой для произвольной группы операторов.

Обозначим через $\Phi(G, A)$ пересечение ядер всех максимальных A-допустимых подгрупп.

Класс групп $\Im$ называется формацией, если выполняются следующие условия:

1) если $G \in \Im$ и $N \lhd G$, то $G/N \in \Im$;

2) если $G/N_1 \in \Im$ и $G/N_2 \in \Im$, то $G/N_1 \cap N_2 \in \Im$. В случае, если выполняется только первое условие, то класс групп $\Im$ называют гомоморфом.

Формацию $\Im$ называют локальной, если из $G/\Phi(G) \in \Im$ следует, что $G \in \Im$.

Пусть $\Im$ – формация. Тогда через $G^{\Im}$ обозначается $\Im$-корадикал группы G — пересечение всех нормальных подгрупп N группы G, для которых $G/N \in \Im$. В дальнейшем под $\Im$-корадикалом понимается $\Im$-корадикал группы G.

Заметим, что максимальная A-допустимая подгруппа M либо целиком содержит $\Im$-корадикал группы G, либо $MG^{\Im} = G$. Действительно. Так как произведение A-допустимых подгрупп A-допустимо и $G^{\Im}$ – характеристическая подгруппа, а, следовательно, A-допустимая, то $MG^{\Im} = M$ или $MG^{\Im} = G$.

Пусть $\Im$ – непустая формация и группа G имеет группу операторов A. Через $D^{\Im}(G,A)$ обозначим пересечение ядер всех максимальных A-допустимых подгрупп группы G, не содержащих $\Im$-корадикал группы G.

Пусть $\Im$ – непустая формация, группа G имеет группу операторов A, π – некоторое множество простых чисел. Через $D_{\pi}^{\Im}(G,A)$ ($D_{\pi}^{\Im}(G,A)$) обозначим пересечение ядер всех максимальных A-допустимых подгрупп группы G, не содержащих $\Im$-корадикал группы G, индексы которых делятся (не делятся) на простые числа из π.

Пусть $\Im$ – непустая формация, группа G имеет группу операторов A, π – некоторое множество простых чисел. Через $\overline{D}_{\pi}^{\Im}(G,A)$ ($\overline{D}_{\pi}^{\Im}(G,A)$) обозначим пересечение ядер всех максимальных A-допустимых подгрупп группы G, не содержащих $\Im$-корадикал группы G, не принадлежащих формации $\Im$, индексы которых делятся (не делятся) на простые числа из π.

В случае, когда $\Im$ совпадает с формацией всех нильпотентных групп, подгруппу $D^{\Im}(G,A)$ будем обозначать через $\Delta(G,A)$.

Отметим, если $A=1$, то подгруппы $\Phi(G,A)$, $\Delta(G,A)$, $D^{\Im}(G,A)$, $D_{\pi}^{\Im}(G,A)$, $D_{\pi}^{\Im}(G,A)$, $\overline{D}_{\pi}^{\Im}(G,A)$, $\overline{D}_{\pi}^{\Im}(G,A)$ совпадают соответственно с подгруппами $\Phi(G)$ (подгруппа Фраттини), $\Delta(G)$ (подгруппа Гашюца), $\Delta^{\Im}(G)$, $\Delta_{\pi}^{\Im}(G)$, $\Delta_{\pi}^{\Im}(G)$, $\overline{\Delta}_{\pi}^{\Im}(G)$, $\overline{\Delta}_{\pi}^{\Im}(G)$, строение которых изучены в [3].

В случае отсутствия в группе G указанных подгрупп будем полагать, что соответствующие пересечения совпадают с самой группой G.

Необходимо отметить, что не каждая максимальная подгруппа будет являться максимальной A-допустимой относительно некоторой группы операторов A, а также не всякая максимальная A-допустимая подгруппа группы является максимальной подгруппой в этой же группе [4].

Пусть P – множество всех простых чисел. Если $p \in P$ и $\pi \subseteq P$, то $\pi' = P \setminus \pi$; $p' = P \setminus \{p\}$. Подгруппа H группы G называется S_{π}-подгруппой, если $|G:H|$ не делится на числа из π.

Через $O_{\pi}(G)$ обозначают наибольшую нормальную π-подгруппу группы G.

Теорема 1. *Пусть группа G имеет группу операторов A, такую, что $(|G|,|A|)=1$, $\Im$ – локальная S_n-замкнутая формация, содержащая все нильпотентные группы, $\overline{D}_{\pi}^{\Im}(G,A) \neq G$ и $\overline{D}_{\pi}^{\Im}(G,A)$ – π-разрешимая подгруппа. Тогда в $\overline{D}_{\pi}^{\Im}(G,A)$ найдется π'-подгруппа V, нормальная в G, такая, что $\overline{D}_{\pi}^{\Im}(G,A)/V \in \Im$.*

Доказательство. Пусть G – контрпример минимального порядка. Подгруппа $\overline{D}_{\pi}^{\Im}(G,A)$ не принадлежит $\Im$, так как в противном случае в качестве подгруппы V можно взять единичную подгруппу.

Так как $\overline{D}_{\pi}^{\Im}(G,A) \neq G$, то, используя результат работы [4], заключаем, что $G \neq \overline{D}^{\Im}(G,A) \in \Im$, где $\overline{D}^{\Im}(G,A)$ – пересечение ядер всех максимальных A-допустимых подгрупп группы G, не принадлежащих формации $\Im$ и не содержащих $\Im$-корадикал. Но $\overline{D}^{\Im}(G,A) \subseteq \overline{D}_{\pi}^{\Im}(G,A)$. Следовательно, $\overline{D}^{\Im}(G,A) \subset \overline{D}_{\pi}^{\Im}(G,A)$. Поэтому в группе G найдется максимальная A-допустимая подгруппа M, не принадлежащая $\Im$ и не содержащая $\Im$-корадикал, такая, что $G = M\overline{D}_{\pi}^{\Im}(G,A)$. Если $|\overline{D}_{\pi}^{\Im}(G,A)|$ – π-число, то $|G:M| = |\overline{D}_{\pi}^{\Im}(G,A)| : |\overline{D}_{\pi}^{\Im}(G,A) \cap M|$ – π-число. Получили противоречие с тем, что $G = M\overline{D}_{\pi}^{\Im}(G,A) = M$. Значит, порядок подгруппы $\overline{D}_{\pi}^{\Im}(G,A)$ делится на простые числа из π'.

Пусть Σ – множество всех максимальных A-допустимых в группе G подгрупп, не принадлежащих формации $\Im$, не содержащих $\Im$-корадикал, индекс каждой из которых в G есть π-число.

Предположим, что в $\overline{D}_{\pi}^{\Im}(G,A)$ существует нормальная в G π'-подгруппа $V \neq 1$. Пусть в G/V найдется хотя бы одна подгруппа M/V, така я, что $M \in \Sigma$ и $M/V \in \Im$. Тогда $\overline{D}_{\pi}^{\Im}(G,A)/V \in \Im$, так как $\Im$ – замкнутая относительно инвариантных подгрупп формация. Опять получили противоречие с предположением. Если в G/V существует максимальная A-допустимая подгруппа H/V, не содержащая $\Im$-корадикал, индекс которой в G/V есть π-число, не принадлежащая $\Im$ и не принадлежащая Σ, то $H \in \Im$. Следовательно, $H/V \in \Im$. Получили противоречие. Значит, $\overline{D}_{\pi}^{\Im}(G/V,A) = \overline{D}_{\pi}^{\Im}(G,A)/V$. Так как $G/V \neq \overline{D}_{\pi}^{\Im}(G/V,A) = \overline{D}_{\pi}^{\Im}(G,A)/V$, то для G/V по предположению теорема верна. И тогда в $\overline{D}_{\pi}^{\Im}(G,A)/V$ будет существовать нормальная в G/V π'-подгруппа V^*/V такая, что $\overline{D}_{\pi}^{\Im}(G,A)/V/V^*/V \in \Im$. Следовательно, V^*-π'-подгруппа и $\overline{D}_{\pi}^{\Im}(G,A)/V^* \in \Im$, что противоречит предположению.

Пусть $\Phi(G,A) \neq 1$. Если $M/\Phi(G,A) \in \Im$, где $M \in \Sigma$, то $\overline{D}_{\pi}^{\Im}(G,A)/\Phi(G,A) \in \Im$, так как $\Im$ – S_n-замкнутая формация. А поэтому согласно работы [4] подгруппа $\overline{D}_{\pi}^{\Im}(G,A)$ принадлежит $\Im$, что противоречит предположению. Следовательно, в фактор-группе $G/\Phi(G,A)$ каждая максимальная A-допустимая подгруппа $M/\Phi(G,A)$, где $M \in \Sigma$, не принадлежит формации $\Im$, то есть, $G/\Phi(G,A) \neq \overline{D}_{\pi}^{\Im}(G/\Phi(G,A)) = \overline{D}_{\pi}^{\Im}(G,A)/\Phi(G,A)$. Так как $|G/\Phi(G,A)| < |G|$, то в $G/\Phi(G,A)$ существует нормальная π'-подгруппа $V^*/\Phi(G,A)$, такая, что $\overline{D}_{\pi}^{\Im}(G,A)/\Phi(G,A)/V^*/\Phi(G,A) \in \Im$. Если положить, что $\Im$ – формация всех π'-групп, то на основании работы [4] имеем, что $V^* = V_1^* \times V_2^*$, где V_1^* – π-подгруппа, а V_2^* – π'-подгруппа, то есть, получили, что в G существует нормальная π'-подгруппа, что противоречит предположению.

Итак, в дальнейшем предполагаем, что $\Phi(G,A) = 1$.

Пусть N_1 – минимальная нормальная в G подгруппа, содержащаяся в $\overline{D}_{\pi}^{\Im}(G,A)$. Так как в группе G не существует инвариантных π'-подгрупп, $\overline{D}_{\pi}^{\Im}(G,A)$ – π-разрешимая подгруппа и $N \subseteq \Im$, то N_1 – собственная π-подгруппа $\overline{D}_{\pi}^{\Im}(G,A)$.

Так как $\Phi(G,A) = 1$, то в группе G существует максимальная A-допустимая подгруппа M, такая, что $G = MN_1$. Если M – $\Im$-абнормальная максимальная A-допустимая подгруппа, то $M \in \Im$, так как $|G:M| = |N_1|$ – π-число. Отсюда следует, что $G/N_1 \in \Im$. Следовательно, $G/\overline{D}_{\pi}^{\Im}(G,A) \in \Im$, то есть, всякая максимальная в G подгруппа, содержащая подгруппу $\overline{D}_{\pi}^{\Im}(G,A)$, является подгруппой, содержащей $\Im$-корадикал, что противоречит выбору подгруппы $\overline{D}_{\pi}^{\Im}(G,A) \neq G$.

Следовательно, M – максимальная A-допустимая подгруппа группы G, содержащая $\Im$-корадикал. Итак, каждая максимальная A-допустимая в группе G подгруппа, не содержащая нормальную подгруппу N_1, содержит $\Im$-корадикал. Следовательно, N_1 является $\Im$-гиперцентральной нормальной подгруппой группы G, то есть, $G/C_G(N_1) \in f(p) \cap \Im$, где p делит порядок N_1. Так как $\Im$ – S_n-замкнутая формация, то

$$\overline{D}_{\pi}^{\Im}(G,A)C_G(N_1)/C_G(N_1) \cong \overline{D}_{\pi}^{\Im}(G,A)/C_G(N_1) \cap \overline{D}_{\pi}^{\Im}(G,A) =$$
$$= \overline{D}_{\pi}^{\Im}(G,A)/C_{\overline{D}_{\pi}^{\Im}(G,A)}(N_1) \in f(p) \cap \Im,$$

где p делит $|N_1|$.

Пусть L/H — произвольный главный фактор подгруппы $\overline{D}_{\pi}^{\Im}(G,A)$, такой, что $L \subseteq N_1$. Так как $C_{\overline{D}_{\pi}^{\Im}(G,A)}(N_1) \subseteq C_{\overline{D}_{\pi}^{\Im}(G,A)}(L/N)$, то $\overline{D}_{\pi}^{\Im}(G,A)/C_{\overline{D}_{\pi}^{\Im}(G,A)}(L/N) \in f(p) \cap \Im$, где p делит $|L/N|$. Значит, подгруппа N_1 является $\Im$-гиперцентральной в подгруппе $\overline{D}_{\pi}^{\Im}(G,A)$.

Предположим, что $M_G \cap \overline{D}_{\pi}^{\Im}(G,A)=1$. Тогда

$$M_G(M \cap \overline{D}_{\pi}^{\Im}(G,A))/M_G \cong M \cap \overline{D}_{\pi}^{\Im}(G,A)/M \cap \overline{D}_{\pi}^{\Im}(G,A) \cap M_G = M \cap \overline{D}_{\pi}^{\Im}(G,A) \in \Im.$$

Но $M \cap \overline{D}_{\pi}^{\Im}(G,A) \cong \overline{D}_{\pi}^{\Im}(G,A)/N_1$, так как

$$\overline{D}_{\pi}^{\Im}(G,A)/N_1 = G \cap \overline{D}_{\pi}^{\Im}(G,A)/N_1 = MN_1 \cap \overline{D}_{\pi}^{\Im}(G,A)/N_1 =$$
$$=(M \cap \overline{D}_{\pi}^{\Im}(G,A))N_1/N_1 \cong M \cap \overline{D}_{\pi}^{\Im}(G,A)/M \cap \overline{D}_{\pi}^{\Im}(G,A) \cap N_1 = M \cap \overline{D}_{\pi}^{\Im}(G,A).$$

Так как N_1 – $\Im$-гиперцентральная в $\overline{D}_{\pi}^{\Im}(G,A)$ подгруппа и $\overline{D}_{\pi}^{\Im}(G,A)/N_1 \in \Im$, то $\overline{D}_{\pi}^{\Im}(G,A) \in \Im$, что противоречит предположению.

Следовательно, $M_G \cap \overline{D}_{\pi}^{\Im}(G,A) \neq 1$. Так как $N_1 \cap M_G \cap \overline{D}_{\pi}^{\Im}(G,A)=1$, то в $\overline{D}_{\pi}^{\Im}(G,A)$ существует минимальная нормальная в G π-подгруппа $N_2 \neq N_1$.

Покажем, что для G/N_1 и G/N_2 условия теоремы выполняются. Пусть найдутся одновременно хотя бы по одной подгруппе $M_k/N_1 \in \Im$ и $M_l/N_2 \in \Im$, где $M_k \in \Sigma$, $M_l \in \Sigma$. Тогда $\overline{D}_{\pi}^{\Im}(G,A)/N_1 \in \Im$ и $\overline{D}_{\pi}^{\Im}(G,A)/N_2 \in \Im$, так как $\Im$ – S_n-замкнутая формация. Следовательно, $\overline{D}_{\pi}^{\Im}(G,A) \in \Im$, что противоречит предположению.

Пусть теперь в G/N_1 найдется хотя бы одна максимальная A-допустимая подгруппа $M_i/N_1 \in \Im$, $M_i \in \Sigma$, а в G/N_2 все M_j/N_2 не принадлежат $\Im$, где $M_j \in \Sigma$. Тогда $\overline{D}_{\pi}^{\Im}(G/N_2,A)=\overline{D}_{\pi}^{\Im}(G,A)/N_2$ и для G/N_2 теорема верна, то есть, в $\overline{D}_{\pi}^{\Im}(G,A)/N_2$ существует нормальная в G/N_2 π'-подгруппа V^*/N_2, такая, что $\overline{D}_{\pi}^{\Im}(G,A)/N_2/V^*/N_2 \cong \overline{D}_{\pi}^{\Im}(G,A)/V^* \in \Im$. Но и $\overline{D}_{\pi}^{\Im}(G,A)/N_1 \in \Im$. Следовательно, $\overline{D}_{\pi}^{\Im}(G,A)/N_1 \cap V^* \in \Im$. Если бы $N_1 \subseteq V^*$, то $N_2/N_2 \neq N_1N_2/N_2 \subseteq V^*/N_2$ и N_1N_2/N_2 – π'-подгруппа. Но это противоречит тому, что N_1 – π-подгруппа. Следовательно, $N_1 \cap V^*=1$. Поэтому $\overline{D}_{\pi}^{\Im}(G,A) \in \Im$. Опять получили противоречие с предположением. Точно такие рассуждения можно провести, если предположить, что в G/N_2 найдется хотя бы одна максимальная A-допустимая подгруппа $M/N_2 \in \Im$, где $M \in \Sigma$, а в G/N_1 всякая максимальная A-допустимая подгруппа H/N_1 не принадлежит $\Im$, где $H \in \Sigma$.

Значит, в G/N_1 и G/N_2 не найдется ни одной максимальной A-допустимой подгруппы, не содержащей $\Im$-корадикал, принадлежащей формации $\Im$ и имеющей своим индексом в соответствующей фактор-группе π-число, то есть, $G/N_1 \neq \overline{D}_{\pi}^{\Im}(G/N_1,A)=\overline{D}_{\pi}^{\Im}(G,A)/N_1$ и $G/N_2 \neq \overline{D}_{\pi}^{\Im}(G/N_2,A)=\overline{D}_{\pi}^{\Im}(G,A)/N_2$. Используя предположение, получаем, что в $\overline{D}_{\pi}^{\Im}(G,A)/N_1$ и $\overline{D}_{\pi}^{\Im}(G,A)/N_2$ существуют нормальные соответственно в G/N_1 и G/N_2 π'-подгруппы V_1/N_1 и V_2/N_2 такие, что $\overline{D}_{\pi}^{\Im}(G,A)/N_1/V_1/N_1 \in \Im$ и $\overline{D}_{\pi}^{\Im}(G,A)/N_2/V_2/N_2 \in \Im$. Отсюда имеем, что $\overline{D}_{\pi}^{\Im}(G,A)/V_1 \cap V_2 \in \Im$.

Пусть $V_1 \cap V_2 = V \neq 1$. Подгруппа N_1 не содержится в подгруппе V_2, так как N_1 – π-подгруппа, а V_2/N_2 – π'-подгруппа. Аналогично N_2 не содержится в V_1, так как N_2 – π-подгруппа, а V_1/N_1 – π'-подгруппа. Следовательно, $V_1 \cap V_2$ – π'-подгруппа. А по предположению в $\overline{D}_{\pi}^{\Im}(G,A)$ не существует нормальных в G π'-подгрупп. Значит, $V_1 \cap V_2 = 1$ и $\overline{D}_{\pi}^{\Im}(G,A) \in \Im$. Получили противоречие с предположением. Теорема полностью доказана.

Если $\Im = N$ – формация нильпотентных групп, то из теоремы 1 получаем следующее

Следствие 1.1. *Пусть группа G имеет группу операторов A, такую, что $(|G|,|A|)=1$, и в группе G существует ненильпотентная максимальная A-допустимая* *подгруппа, индекс которой в G есть π-число. Если $\overline{\Delta}_{\pi}(G,A)$ – π-разрешимая подгруппа, тогда в группе G существует нормальная π'-подгруппа V, такая, что $\overline{\Delta}_{\pi}(G,A)/V \in N$.*

Если группа операторов A единична, то из теоремы 1 следует результат работы [3].

Теорема 2. *Пусть группа G имеет группу операторов A, такую, что $(|G|,|A|)=1$, $\Im$ – S_n-замкнутая локальная формация, содержащая все нильпотентные группы. Если N – нормальная π-подгруппа группы G и $N \subseteq \overline{D}_{\pi}^{\Im}(G,A)$, то либо $N \in \Im$, либо $G^{\Im} \subseteq N$.*

Доказательство. Пусть G – группа наименьшего порядка, для которой теорема не выполняется.

Если $N=1$, то $N \in \Im$. Значит, можно предположить, что в N существует минимальная нормальная в G подгруппа K, отличная от единицы. Так как $N/K \subseteq \overline{D}_{\pi}^{\Im}(G,A)/K \subseteq \overline{D}_{\pi}^{\Im}(G/K,A)$, то для фактор-группы G/K теорема выполняется. Следовательно, в G/K либо $G^{\Im}K/K \subseteq N/K$, либо $N/K \in \Im$. Если $G^{\Im}K/K \subseteq N/K$, то $G^{\Im} \subseteq N$, что противоречит предположению теоремы. Отсюда заключаем, что $N/K \in \Im$.

Предположим, что $K \subseteq \Phi(G,A)$. Тогда из [4] подгруппа N принадлежит формации $\Im$. Значит, K не содержится в $\Phi(G,A)$.

Если предположить, что всякая максимальная A-допустимая подгруппа группы G, не содержащая подгруппу K, содержит $\Im$-корадикал, то из [4] получаем, что $N \in \Im$. Снова получили противоречие. Следовательно, в группе G существует такая максимальная A-допустимая подгруппа H, не содержащая $\Im$-корадикал, что $G=HK$. Если $H \in \Im$, то $G^{\Im} \subseteq K \subseteq N$, что противоречит предположению. Поэтому подгруппа H не принадлежит формации $\Im$.

Так как K – π-подгруппа, то H –максимальная A-допустимая подгруппа группы G, не содержащая $\Im$-корадикал и не принадлежащая формации $\Im$, индекс которой в G есть π-число. Но по условию $N \subseteq \overline{D}_{\pi}^{\Im}(G,A)$. Значит, $G=H$. Полученное противоречие полностью доказывает теорему.

Если группа операторов A является единичной, то из теоремы 2 можно получить результаты М.В. Селькина [3], В.В. Шлыка [5], Л.И. Шидова [6], В.А. Ведерникова и Е.Т. Огаркова [7].

Теорема 3. *Пусть группа G имеет группу операторов A, такую, что $(|G|,|A|)=1$, $\Im$ – S_n-замкнутая локальная формация. Если N – нормальная π-подгруппа группы G и $N/N \cap D_{\pi}^{\Im}(G,A) \in \Im$, тогда $N = N_1 \times N_2$, множители которого удовлетворяют следующим условиям:*

1) $N_1 \in \Im$;

2) $\pi(N_2) \cap \pi(\Im) = \varnothing$;

3) $N_2 \subseteq \Phi(G,A)$.

Доказательство. Пусть G – контрпример минимального порядка, для которого теорема не выполняется.

Если $N \cap D_{\pi}^{\Im}(G,A)=1$, то теорема верна. Пусть K – минимальная нормальная в G подгруппа, отличная от 1, содержащаяся в $N \cap D_{\pi}^{\Im}(G,A)$. Так как $N/K/N/K \cap D_{\pi}^{\Im}(G/K,A) = = N/K/N/K \cap D_{\pi}^{\Im}(G,A)/K = N/K/N \cap D_{\pi}^{\Im}(G,A)/ \cong N/N \cap D_{\pi}^{\Im}(G,A) \in \Im$, то для фактор-группы G/K теорема справедлива, то есть, $N/K \in \Im$. Если $K \subseteq \Phi(G,A)$, то на основании работы [4] подгруппа N принадлежит $\Im$, что противоречит предположению. Значит, K не содержится в $\Phi(G,A)$.

Если предположить, что всякая максимальная A-допустимая подгруппа группы G, не содержащая подгруппу K, содержит $\Im$-корадикал, то, используя результат работы [4], получаем, что $N \in \Im$. Снова получили противоречие. Следовательно, в группе G существует такая максимальная A-допустимая подгруппа H, не содержащая $\Im$-корадикал, что $G = HK$. Если $H \in \Im$, то $G^{\Im} \subseteq K \subseteq N$, что противоречит предположению. Поэтому подгруппа H не принадлежит формации $\Im$.

Так как K является π-подгруппой группы G, то H — максимальная A-допустимая подгруппа группы G, не содержащая $\Im$-корадикал и не принадлежащая формации $\Im$, индекс которой в G есть π-число. Откуда следует, что $K \subseteq N$. Полученное противоречие полностью доказывает теорему.

Следствие 3.1. *Пусть группа G имеет группу операторов A, такую, что $(|G|,|A|)=1$, $\Im$ – S_n-замкнутая локальная формация, содержащая все нильпотентные группы. Если N – нормальная π-подгруппа группы G и $N / N \cap D_{\pi}^{\Im}(G,A) \in \Im$, то $N \in \Im$.*

Если A – единичная группа операторов, то из теоремы 3 следуют соответствующие результаты работ [3, 5, 8].

Теорема 4. *Пусть группа G имеет группу операторов A, такую, что $(|G|,|A|)=1$, $\Im$ – локальная формация и $G^{\Im}$ – π-разрешимая подгруппа группы G. Если индекс любой максимальной A-допустимой подгруппы группы G, не содержащей $\Im$-корадикал, есть π-число, то $G^{\Im}$ – π-подгруппа.*

Доказательство. Пусть G – группа наименьшего порядка, для которой теорема не выполняется. Если $\pi \cap \pi(G) = \varnothing$, то в группе G все максимальные A-допустимые подгруппы будут содержать $\Im$-корадикал. Так как $\Im$ – насыщенная формация, то $G \in \Im$ и $G^{\Im} = 1$ можно считать π-группой. Поэтому $\pi \cap \pi(G) \neq \varnothing$ и $G^{\Im} \neq 1$.

Замечаем, что условия теоремы для фактор-группы выполняются. Если в группе G существует нормальная π-подгруппа $L \neq 1$, то по предположению $G^{\Im}L / L$ будет являться π-подгруппой, а следовательно, и $G^{\Im}$ есть π-группа, что противоречит предположению.

В дальнейшем предполагаем, что в группе G не существует нормальных π-подгрупп, отличных от 1.

Подгруппа $G^{\Im}$ не может быть π'-подгруппой. Так как $G^{\Im}$ не принадлежит $\Phi(G,A)$ и $G^{\Im}$ – π'-группа, то индекс всякой максимальной A-допустимой подгруппы в G, не содержащей $\Im$-корадикал, будет являться π'-числом. Но это противоречит условию теоремы.

Пусть N – собственная минимальная нормальная в G подгруппа, содержащаяся в $G^{\Im}$. Так как $G^{\Im}$ является π-разрешимой подгруппой группы G и $G^{\Im}$ не является π'-группой, то N – собственная π'-подгруппа из $G^{\Im}$. Так как для всех групп, порядок которых меньше $|G|$, теорема верна, то в G / N $\Im$-корадикал $G^{\Im} / N$ является π-группой. Подгруппа $N \subseteq \Phi(G,A)$, так как N – π'-группа. Поэтому $N \subseteq D^{\Im}(G,A) \cap G^{\Im} \subseteq \Phi(G,A)$ и, значит, $G^{\Im} / G^{\Im} \cap \Phi(G,A)$ есть π-группа. Порядок $G^{\Im}$ делится на некоторые простые числа из π и π'. Применяя результат работы [4], получаем, что $G^{\Im} = G_{\pi}^{\Im} \times G_{\pi'}^{\Im}$, то есть, в группе G существует нормальная π-подгруппа, отличная от 1. Полученные противоречия полностью доказывают теорему.

В случае единичности группы операторов A из теоремы 4 следуют соответствующие результаты М.В. Селькина [3], В.В. Шлыка [5].

Теорема 5. *Пусть группа G имеет группу операторов A, такую, что $(|G|,|A|)=1$. В группе G всегда $G^{\Im} \cap \Phi^{\Im}(G,A) = G^{\Im} \cap \Phi(G,A)$, причем, либо $\pi(G^{\Im}) = \pi(G^{\Im} / G^{\Im} \cap \Phi(G,A))$, либо всякая максимальная A-допустимая подгруппа, не содержащая $\Im$-корадикал, не принадлежит насыщенному гомоморфу $\Im$.*

Доказательство. Если в группе G все максимальные A-допустимые подгруппы содержат $\Im$-корадикал, то $G^{\Im} \subseteq \Phi(G,A)$ и $G^{\Im} / G^{\Im} \cap \Phi(G,A)$ – единичная подгруппа. В этом случае имеем, что $\pi(G^{\Im}) = \pi(G^{\Im} / G^{\Im} \cap \Phi(G,A))$.

Пусть в группе G существует по крайне мере одна максимальная A-допустимая подгруппа M, не содержащая $\Im$-корадикал, принадлежащая гомоморфу $\Im$. Покажем, что $\pi(G^{\Im}) = \pi(G^{\Im} / G^{\Im} \cap \Phi(G, A))$. Предположим, что существует простое число p, делящее $|G^{\Im}|$, которое не делит порядок $G^{\Im} / G^{\Im} \cap \Phi(G, A)$. Тогда $G^{\Im} / G^{\Im} \cap \Phi(G, A)$ можно считать и p-замкнутой и p'-замкнутой. Используя работу [4] $G^{\Im} = G_p^{\Im} \times G_{p'}^{\Im}$, причем, в силу выбора числа p $G_p^{\Im} \subseteq \Phi(G, A)$. Так как M – максимальная A-допустимая подгруппа, не содержащая $\Im$-корадикал, то $G = MG^{\Im} = M(G_p^{\Im} \times G_{p'}^{\Im}) = MG_{p'}^{\Im}$. Но $M \in \Im$. Следовательно, $G / G_{p'}^{\Im} \in \Im$ и $G^{\Im} = G_{p'}^{\Im}$, а это противоречит выбору числа p. Таким образом, не существует такого простого числа p, делящего $|G^{\Im}|$, которое бы не делило $|G^{\Im} / G^{\Im} \cap \Phi(G, A)|$. Значит, $\pi(G^{\Im}) = \pi(G^{\Im} / G^{\Im} \cap \Phi(G, A))$.

Покажем теперь, что $G^{\Im} \cap D^{\Im}(G, A) = G^{\Im} \cap \Phi(G, A)$. Так как всякая максимальная A-допустимая подгруппа H группы G, не содержащая $D^{\Im}(G, A)$, содержит $\Im$-корадикал. Тогда на основании работы [4] $G^{\Im} \cap D^{\Im}(G, A) \subseteq \Phi(G, A)$. Поэтому $G^{\Im} \cap D^{\Im}(G, A) \subseteq G^{\Im} \cap \Phi(G, A)$. Но $\Phi(G, A) \subseteq D^{\Im}(G, A)$. Следовательно, $G^{\Im} \cap \Phi(G, A) \subseteq G^{\Im} \cap D^{\Im}(G, A)$, а значит, и $G^{\Im} \cap D^{\Im}(G, A) = G^{\Im} \cap \Phi(G, A)$. Теорема доказана.

Из теоремы 5 при единичности группы операторов следует соответствующий результат работы [3].

Теорема 6. *Пусть группа* G *имеет группу операторов* A*, такую, что* $(|G|, |A|) = 1$, $\Im$ *–* S_n*-замкнутая локальная формация, содержащая все нильпотентные группы,* $\overline{D}_{\pi}^{\Im}(G, A)$ *–* π*-разрешимая подгруппа. Тогда либо* $D_{\pi}^{\Im}(G, A) \in \Im$ *и* $\pi(G^{\Im}) = \pi(G^{\Im} / G^{\Im} \cap \Phi(G, A))$*, либо в* $\overline{D}_{\pi}^{\Im}(G, A)$ *найдется* π'*-подгруппа* V*, нормальная в* G*, такая, что* $\overline{D}_{\pi}^{\Im}(G, A) / V \in \Im$.

Доказательство. Пусть G – группа наименьшего порядка для которой теорема не выполняется.

Если в группе G все максимальные A-допустимые подгруппы не содержат $\Im$-корадикал, то $G^{\Im} \subseteq \Phi(G, A)$. Так как $\Im$ – насыщенная формация, содержащая все нильпотентные группы, то на основании работы [4] получаем, что $G \in \Im$. В этом случае $\overline{D}_{\pi}^{\Im}(G, A) = G$ и в качестве π'-подгруппы V можно выбрать единичную подгруппу.

Следовательно, в группе G существуют максимальные A-допустимые подгруппы, не содержащие $\Im$-корадикал. Пусть всякая максимальная в G A-допустимая подгруппа, не содержащая $\Im$-корадикал, принадлежит формации $\Im$. Тогда $\overline{D}_{\pi}^{\Im}(G, A) = G$ – π-разрешимая подгруппа. Согласно теореме 4 $\pi(G^{\Im}) = \pi(G^{\Im} / G^{\Im} \cap \Phi(G, A))$, где $G^{\Im} / G^{\Im} \cap \Phi(G, A)$ – главный фактор группы G. Так как G – π-разрешимая группа, то $G^{\Im}$ – либо π'-группа, либо p-группа, где $p \in \pi$. В первом случае $G / G^{\Im} = \overline{D}_{\pi}^{\Im}(G, A) / G^{\Im} \in \Im$, что противоречит предположению. Во втором случае всякая максимальная A-допустимая подгруппа, не содержащая $\Im$-корадикал, имеет в группе G своим индексом π-числа. Следовательно, $D_{\pi}^{\Im}(G, A) = D^{\Im}(G, A)$. Используя работу [4], получаем, что $D^{\Im}(G, A) \in \Im$. Получили противоречие с предположением.

Следовательно, в группе G существуют максимальные A-допустимые подгруппы, не содержащие $\Im$-корадикал и не принадлежащие формации $\Im$. Предположим, что все максимальные A-допустимые подгруппы группы G, не содержащие $\Im$-корадикал и не принадлежащие формации $\Im$, имеют своими индексами в G не π-числа. Значит, $\overline{D}_{\pi}^{\Im}(G, A) = G$ – π-разрешимая группа. А так как в π-разрешимой группе любая максимальная A-допустимая подгруппа имеет своим индексом либо π-число, либо π'-число, то всякая максимальная A-допустимая подгруппа группы G, не содержащая $\mathfrak{F}$-корадикал и не принадлежащая формации $\mathfrak{F}$, имеет своим индексом в G π'-число.

Если теперь в группе G всякая максимальная A-допустимая подгруппа, не содержащая $\mathfrak{F}$-корадикал и принадлежащая $\mathfrak{F}$, имеет в G своим индексом π'-число, то по теореме 4 $G^{\mathfrak{F}}$ есть π'-подгруппа. И в этом случае теорема верна.

Если же предположить, что в группе G существует максимальная A-допустимая подгруппа, не содержащая $\mathfrak{F}$-корадикал, принадлежащая формации $\mathfrak{F}$ и имеющая в G своим индексом π-число, то $D_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G,A) \in \mathfrak{F}$, так как $\mathfrak{F}$ – S_n-замкнутая формация. Используя теорему 5, получаем, что $\pi(G^{\mathfrak{F}}) = \pi(G^{\mathfrak{F}} / G^{\mathfrak{F}} \cap \Phi(G,A))$. А это противоречит предположению.

Значит, можно считать, что в группе G не существует максимальных A-допустимых подгрупп, не содержащая $\mathfrak{F}$-корадикал, принадлежащих формации $\mathfrak{F}$. Используя теорему 4, получаем, что $G^{\mathfrak{F}}$ – π'-подгруппа. Отсюда следует, что $\overline{D}_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G,A)/G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$, что противоречит предположению.

Следовательно, в дальнейшем полагаем, что в группе G существует максимальная A-допустимая подгруппа, не содержащая $\mathfrak{F}$-корадикал, не принадлежащая формации F, индекс которой в G есть π-число. Используя теорему 1, получаем, что в $\overline{D}_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G,A)$ существует π'-подгруппа V, нормальная в G, такая, что $\overline{D}_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G,A)/V \in \mathfrak{F}$. Теорема полностью доказана.

Заметим, что $D_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G,A) \subseteq \overline{D}_{\pi}^{F}(G,A)$ и

$$VD_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G,A)/V \cong D_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G,A)/V \cap D_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G,A) \in \mathfrak{F},$$

так как $\mathfrak{F}$ – S_n-замкнутая формация и $V \cap D_{\pi}^{\mathfrak{F}}(G,A)$ – π'-подгруппа, то в случае, когда группа операторов A единична, из теоремы 6 вытекают результаты работ [3], [5], [8].

Литература

1. Frattini, G. Intorno alla generasione dei gruppi di operazioni / G. Frattini // Atti Acad. Dei Lincei 1885. – Vol. 1. – P. 281–285.
2. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп. / Л.А. Шеметков – М. : Наука, 1978. – 267 с.
3. Селькин, М.В. Максимальные подгруппы в теории классов конечных групп / М.В. Селькин – Минск : Беларуская навука : 1997. 144 с.
4. Бородич, Е.Н. О пересечении подгрупп в группах с операторами / Е.Н. Бородич, Р.В. Бородич, М.В. Селькин. // Вестник БГУ, сер.1, – 2012. – С. 54–62.
5. Шлык, В.В. О пересечении максимальных подгрупп в конечных группах / В.В. Шлык // Мат. заметки. – 1973. – Т. 14, № 3. – С. 429–439.
6. Шидов, Л.И. О максимальных подгруппах конечных групп / Л.И. Шидов // Сиб. матем. ж., – 1971. – Т. 12, № 3. – с. 682–683.
7. Ведерников, В.А. Об обобщённой подгруппе Фраттини конечной группы // В.А. Ведерников, Т.Т. Огарков / IV Всесоюз. симпозиум по теории групп. – Новосибирск, 1973. – С. 22–23.
8. Ведерников, В.А. Конечные группы с обобщённой подгруппой Фраттини / В.А. Ведерников, Н.Г. Дука // IX Всесоюз. алгебраич. коллоквиум. – Гомель, – 1968. – С. 44.

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступила в редакцию 13.05.2014