Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, №3(18), 2003

УДК 51.001.57

Процедуры численного моделирования режимов гидравлических процессов в открытом потоке произвольной структуры

Т.В.Прищепова

1. Актуальность компьютерного моделирования гидравлических процессов в открытом потоке

Задачами исследования гидравлических процессов (GIDRPOC) занимались многие исследователи [5, 6]. В общем виде практически никем до конца они не были решены. Большинство исследователей смогли решить задачу для частных случаев при сильных ограничениях. Главными ограничениями являются: постоянство угла наклона дна (θ), знание явного вида функции изменения ширины сечения потока (B_x), призматический характер русла. При поворотах потока, расширениях и сужениях русла появляются дополнительные силы $P(x,t)$ и $R(x,t)$, которые не учитываются классическими моделями на основе системы дифференциальных уравнений (СДУ) Сен-Веннана [6]. Поэтому необходима модификация уравнений Сен-Веннана путем добавления в СДУ этих дополнительных сил. Актуальность изучения поведения потоков повышается в случаях внезапных перекрытий или открытий движения потоков и поступления в поток паводковых притоков. Отдельные численные модели, предложенные многими авторами [5], лишь подчеркивают их пригодность для частных случаев и, как следствие, необходимость разработки высокотехнологичной методики построения и использования компьютерных моделей GIDRPOC.

Эта методика должна включать в себя технологию аппроксимации участков русла потока на элементарных участках ($ЭЛУ_i$) типовыми конструкциями русла потока, разбиения ($МЭЛУ_{ij}$) на микроэлементарные участки ($МЭЛУ_{ij}$), в которых выполняются условия применения модифицированных СДУ Сен-Веннана. В качестве технологической базы при исследовании GIDRPOC предлагается использовать ПТКИ GIDR [2]. В разработке библиотек процедур автор принимал участие. В данной работе излагается математическое обоснование процедур библиотеки LIB.GIDRP, используемых при расчете параметров потока на $МЭЛУ_{ij}$ для двух режимов GIDRPOC: неравномерного установившегося движения; неустановившегося движения, появляющегося при поступлении в поток паводковых притоков.

2. Модели неравномерного установившегося движения.

В тех случаях, когда русло открытого потока не является призматическим, классическая СДУ Сен-Веннана [5] не адекватна реальной ситуации. Это происходит из-за появления сил гидростатическиго давления P_x и бокового давления на поток жидкости R_x:

$$P_{xi} = g\cos\theta_i \int_0^{\eta}(\eta-\xi) b_i(x,\xi)\,d\xi;$$

$$R_{xi} = g\cos\theta_i \int_0^{\eta}(\eta-\xi)\frac{\partial b_i(x,\xi)}{\partial x}\,d\xi \qquad (1)$$

$$\eta = h_{x_i}\cos\theta_i,$$

где θ_i – угол уклона дна на i-ом ЭЛУ;

$b_i(x,\xi)$ – ширина поверхности русла, меняющаяся вдоль координаты движения потока (x);
h_{x_i} – глубина потока при меняющейся координате $ЭЛУ_i$ (x_i).

Классическая СДУ Сен-Веннана согласно [5] приобретает вид;

$$\frac{\partial \omega_{x_i}}{\partial x} V_{x_i} + \frac{\partial V_{x_i}}{\partial x} = 0; \tag{2}$$

$$\frac{\partial P_{x_i}}{\partial x} + \frac{\partial \omega_{x_i}}{\partial x} \frac{V_{x_i}^2}{2} + \omega_{x_i} V_{x_i} \frac{\partial V_{x_i}}{\partial x} = g \cdot \omega_{x_i} \left(\sin\theta_i - \frac{\omega_{x_i}^2 V_{x_i}^2}{K^2} \right) + \beta_{2_i} R_{xi};$$

где ω_{x_i} – площадь сечения русла при координате x_i;

V_{x_i} – скорость потока на $ЭЛУ_i$;

K^2 – коэффициент трения на $ЭЛУ_i$;

β_{2_i} – параметр формы русла на $ЭЛУ_i$, зависящий от угла уклона θ_i и типа формы русла.

Подставляя в систему (2) конкретные значения для производных ω_{x_i}, P_{xi} и R_{xi}, которые являются функциями x_i, h_{x_i}, V_{x_i}, находим частные случаи этой СДУ. Будем различать:

- три типа уклона дна θ_i на $ЭЛУ_i$ (положительный $\theta_i \rangle 0$, нулевой $\theta_i = 0$, отрицательный $\theta_i \langle 0$);
- четыре типа сечений ω_i $ЭЛУ_i$ (прямоугольное, треугольное, параболическое, трапециодальное);
- пять типов русла $ЭЛУ_i$ (расширяющаяся трапеция, сужающаяся трапеция, призматическое русло, поворот русла влево, поворот русла вправо). В зависимости от сочетания углов трапеции и типов русла знак коэффициента β_2 может быть разным.

После подстановки в систему (2) конкретных для $ЭЛУ_i$ значений ω_{x_i}, P_{xi} и R_{xi}, θ_i получаем СДУ, в которой все переменные коэффициенты являются функциями трех переменных (x_i, h_{x_i}, V_{x_i}). Разрешаем эту систему относительно производных:

$$\frac{\partial h_{xi}}{\partial x} = \varphi_1(h_{xi}, V_{xi}, x_i);$$
$$\frac{\partial V_{xi}}{\partial x} = \varphi_2\, \varphi_1(h_{xi}, V_{xi}, x_i). \tag{3}$$

При нахождении уравнений свободной поверхности h_{xi} и эпюр изменения скоростей потока V_{xi} вдоль координаты x_i на $ЭЛУ_i$ используется численный метод суммирования конечных разностей:

$$h_{xi_k} = h_{xi_{k-1}} + \frac{\partial h_{xi}}{\partial x}\Delta x;$$

$$V_{xi_k} = V_{xi_{k-1}} + \frac{\partial V_{xi}}{\partial x}\Delta x, \tag{4}$$

где k – номер интервала изменения координаты x_i на $ЭЛУ_i$ на постоянную величину Δx.

Таким образом, предлагается поделить поток на m $ЭЛУ_i$ различной длины l_i вдоль координаты движения жидкости, а затем все $ЭЛУ_i$ поделить на $МЭЛУ_{ij}$ постоянной длины Δx, число которых зависит от длины $ЭЛУ_i$. В итоге все русло будет разбито на $МЭЛУ_{ij}$ постоянной длины. Расчет основных параметров потока (x_{ik}, $V_{x_{ik}}$) осуществляется по формулам (4).

Для всех $МЭЛУ_{ij}$, принадлежащих к одному и тому $ЭЛУ_i$, значения производных $\frac{\partial h_{xi}}{\partial x}$ и $\frac{\partial V_{xi}}{\partial x}$ определяются из СДУ (3). Вид функций φ_1 и φ_2 для каждого типа $ЭЛУ_i$ будет различным. Расчеты для каждого типа $ЭЛУ_i$ ведутся с помощью соответствующих процедур, реализующих решение СДУ (3). Эти процедуры составили библиотеку процедур LIB.GIDUST, моделирующих GIDRP на $ЭЛУ_i$ соответствующего типа. Типы процедур отличаются друг от друга сечением, углом наклона θ_i (число которых равно 3); типом русла потока (число которых равно 5); типом сечения (число которых равно 4). Таким образом, в библиотеке процедур моделирования установившегося неравномерного движения (LIB.GIDUST) реализовано 60 процедур.

3. Модели неустановившегося движения потока в открытых руслах.

Для неустановившегося движения параметры потока (ω_{xt}, B_{xt}, V_{xt}) являются функциями, зависящими не только от геометрии русла, формы русла и типа сечения, но и от изменения координат времени и положения сечения потока. В общем случае представим эти параметры и расход жидкости (Q_{xt}) через сечение как функции, зависящей от x и t.

$$\omega_{xt_i} = \psi_1(h_{x_i}, x_i, t);\ B_{xt_i} = \psi_2(x_i, t);$$

$$V_{xt_i} = \psi_3(h_{x_i}, x_i, t);\ Q_{xt_i} = \psi_4(h_{x_i}, x_i, t). \tag{5}$$

Поэтому частные производные по времени в СДУ Сен-Веннана уже равны нулю. Для конкретных значений геометрии русла и формы потока необходимо найти функциональные зависимости этих производных:

$$\frac{\partial \omega_{xt_i}}{\partial t} = \frac{\partial \omega_{xt_i}}{\partial x} V_{xt_i};\ \frac{\partial B_{xt_i}}{\partial t} = \frac{\partial B_{xt_i}}{\partial x} V_{xt_i}; \tag{6}$$

$$\frac{\partial V_{xt_i}}{\partial t} = \frac{\partial V_{xt_i}}{\partial x} V_{xt_i};\ \frac{\partial Q_{xt_i}}{\partial x} = \frac{\partial \omega_{xt_i}}{\partial x} V_{xt_i}^2 + \frac{\partial \omega_{xt_i}}{\partial x} \omega_{xt_i} V_{xt_i}.$$

СДУ Сен-Веннана для неустановившегося движения приобретает вид:

$$\frac{\partial\omega_{xt_i}}{\partial t}+\frac{\partial Q_{xt_i}}{\partial x}=q(x,t); \tag{7}$$

$$\frac{\partial Q_{xt_i}}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(P_{xt_i}+\frac{Q_{xt_i}}{2\omega_{xt_i}}\right)=g\cdot\omega_{xt_i}\left(\sin\theta_i-\frac{Q^2_{xt_i}}{K^2}\right)+R_{xt_i}.$$

После подстановки (6) в (7) СДУ принимает вид:

$$2\frac{\partial\omega_{xt_i}}{\partial x}V_{xt_i}+\frac{\partial V_{xt_i}}{\partial x}\omega_{xt_i}=q(x_i,t); \tag{8}$$

$$\frac{3}{2}V^2_{xt_i}\frac{\partial\omega_{xt_i}}{\partial x}+2\omega_{xt_i}V_{xt_i}\frac{\partial V_{xt_i}}{\partial x}+\frac{\partial P_{xt_i}}{\partial x}=g\cdot\omega_{xt_i}\left(\sin\theta_i-\frac{\omega^2_{xt_i}V^2_{xt_i}}{K^2}\right)+R_{xt_i}.$$

Подставляя в (8) конкретные значения функций и их производных

$$\omega_{xt_i}=\psi_5(h_{xt_i},V_{xt_i},x_i,t);\ P_{xt_i}=\psi_6(h_{xt_i},V_{xt_i},x_i,t)$$
$$R_{xt_i}=\psi_7(h_{xt_i},V_{xt_i},x_i,t). \tag{9}$$

Для соответствующих типов формы русел, сечений потоков и углов уклона дна находим частные случаи СДУ для $ЭЛУ_i$. Для каждого конкретного случая система (8) после преобразования может быть представлена в виде:

$$\frac{\partial h_{xt_i}}{\partial x}=\frac{\Phi_1(h_{xt_i},V_{xt_i},x_i,t)}{\Phi_2(h_{xt_i},V_{xt_i},x_i,t)};$$
$$\frac{\partial V_{xt_i}}{\partial x}=\frac{\Phi_3(h_{xt_i},V_{xt_i},x_i,t)}{\Phi_4(h_{xt_i},V_{xt_i},x_i,t)}. \tag{10}$$

В СДУ (10) все переменные и коэффициенты являются функциями четырех переменных. Поэтому СДУ (10) разрешима относительно производных только численно, несмотря на упрощение функций (10) за счет линеализации формул расчета координат берегов русел B_{xt_i} и выбора частных типов $ЭЛУ_i$. Основные характеристики потока на $МЭЛУ_{ij}$ можно найти численно, используя способ конечных разностей по итеративным формулам:

$$h_{xit_k}=h_{xit_{k-1}}+\frac{\partial h_{xit_{k-1}}}{\partial x}\Delta x;\ V_{xit_k}=V_{xit_{k-1}}+\frac{\partial V_{xit_k}}{\partial x}\Delta x, \tag{11}$$

где k – номер шага изменения координаты x_i на постоянную величину Δx.

Итак, для каждого типа $ЭЛУ_i$ реализуются расчеты с помощью (10) и (11) в виде соответствующих процедур, составивших в совокупности библиотеку процедур неустановившегося движения на $ЭЛУ_i$ (LIB.GIDNUS). Для удобства расчетов сохраняется один и тот же шаг изменения координаты x (Δx). Поэтому используется переменный шаг изменения временной координаты, определяемый на каждом шаге по формулам $\Delta t_{k-1} = \Delta x / V_{xit_{k-1}}$. Разности $\xi_{x_2 t_{k-1}} = h_{x_i t_k} - h_{x_{ik}}$ позволяют определить величину превышения волны прорыва над свободной поверхностью вычисленной для установившегося движения потока. Очевидно, что максимум $\xi_{x_i t_{k-1}}$ по длине потока даст амплитуду фронта волны прорыва: $h_{лб}(t) = \max\limits_k \xi_{x_i t_k}$. При $h_{лб}(t)\rangle 0$ имеет место положительная волна прорыва, а при $h_{лб}(t)\langle 0$ волна прорыва будет отрицательной. Для нахождения координат изменения этого фронта в любой момент времени необходимо найти места разрыва свободной поверхности потока. Скорость движения фронта волны прорыва определяется по формуле:

$$W_{xit_k} = \frac{\omega_{xit_k} \cdot V_{xit_k} - \omega_{xi_k} \cdot V_{xi_k}}{B_{xit_k} \cdot h_{лб(t)}}. \tag{12}$$

Таким образом, неустановившееся движение на МЭЛУ$_{ij}$ характеризуется следующим набором параметров:

– характером свободной поверхности, представленной множеством $\{ h_{x_i t_k} \}$, элементы которого определяются по формуле (11);

– эпюрой изменения скоростей $\{ V_{x_i t_k} \}$;

– характеристиками волны прорыва $h_{лб}(t)$ и W_{xit_k} .

Волновой расход определяется разностью потоков, проходящих вдоль координаты.. между неустановившимся и установившимся движениями потока:

$$\Delta Q_{ВП_к}(x_i,t) = Q_{xit_k} - Q_{xi_k} = B_{xit_k} \cdot W_{xit_k} \cdot h_{лб}(t). \tag{13}$$

Начальный и текущий приросты потока:

$$q_0(x) = \frac{Q_x}{\omega_x};\ q\ (x_i,t) = \frac{Q_{xit_k}}{\omega_{xit_k}}. \tag{14}$$

Как видим, имеется возможность задавать различные комбинации притоков открытого потока: $q_0(x)$ – в начале потока из-за паводковых вод, формируемых в верховьях потока; распределением вдоль координаты движения потока x и задаваемого функцией (14); из-за шлюзовых операций («открыть» и «закрыть» поток на величину $\Delta q\ (x_{0i},t)$), которые приводят к появлению двух волн прорыва, движущихся в обе стороны изменения координаты x_i. Различные варианты действия паводковых притоков и шлюзовых операций моделируются с помощью процедуры PRITOK (тип, T_1, T_2, $q_0(x)$), параметрами которой являются: тип притока, его начальная амплитуда $q_0(x)$, T_1 и T_2 – моменты начала и конца воздействия притока на GIDPR в открытом потоке, заданным множеством $\{ МЭЛУ_{ik} \}$. Процедура PRITOK [4] моделирует следующие типы притока: паводковый приток, поступающий из верховьев потока; паводковый приток, действующий на участке (x_1, x_2) в интервале времени (T_1 T_2); приток от шлюзовой операции «открыть», установленной при координате x_1 в момент времени T_1; приток от шлюзовой операции «закрыть», установленной при координате x_1 в момент времени T_1.

Таким образом, ПТКИ GIDR расширен двумя библиотеками процедур: LIB.GIDUST и LIB.GIDNUS [1, 3]. Применение этих процедур позволяет оперативным образом компоновать имитационную модель движения открытого потока, аппроксимирующую геометрию потока вдоль координаты его движения x множеством $\{ МЭЛУ_{ik} \}$ и позволяющую исследовать раздельно два режима движения (установившееся и неустановившееся). При этом, кроме основных характеристик потока, библиотеки процедур позволяют вычислить характеристики переходных процессов в открытых потоках.

Abstract

The author considered the models of the steady-stated movement and the unsteady movement of a stream in open channels.

Литература

1. Абу-Халава М.И., Максимей И.В., Прищепова Т.В. Библиотеки упрощенных моделей гидравлических процессов / ж. Электронное моделирование. К., 2002. – Т. 24. – № 3. С. 97–104.

2. Абу-Халава М.И., Максимей И.В., Прищепова Т.В. Методика применения программно-технологического комплекса исследования гидравлических процессов при возникновении чрезвычайных ситуаций из-за паводковых притоков в руслах рек. //Цифровая обработка информации управление в чрезвычайных ситуациях: докл. 3-й межд. конф. Минск, 28–30.05.2002 г. ИТК НАН Беларуси, – Минск, 2002. – Т2. – С. 14–18.

3. Абу-Халава М.И., Максимей И.В., Прищепова Т.В. Средства и технология математического моделирования гидравлических процессов в открытых руслах. //Весці ГрГУ им. Я. Купалы, 2002. – Сер. 2. – №1. – С. 89–97,

4. Абу-Халава М.И., Максимей И.В., Прищепова Т.В. Имитационные модели переходных процессов как инструмент проектирования безопасности функционирования открытых потоков (сб. Актуальные проблемы развития транспортных систем и строительного комплекса: Тр. межд. практ. конф. БелГУТа. – Гомель, 2001. – С. 272–273.

5. Абу-Халава М.И. Аналитико-имитационное моделирование гидравлических процессов. //Computer data analysis and modeling сессу. Тр. 6-ой м. конф. /Минск, БГУ, 2002. – С. 11–16.

6. Христианович С.А. Неустановившееся движение в каналах и реках //Некоторые новые вопросы механики сплошной среды, Изд. АН СССР, М., 1938. – С. 12–145.

Белорусский государственный
университет транспорта

Поступило 10.04.03