Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 3 (84), 2014

УДК 512.548

О полиадических операциях на декартовых степенях

А.М. Гальмак, А.Д. Русаков

Определяются и изучаются полиадические операции на декартовых степенях n-арных группоидов.
Ключевые слова: декартова степень, группоид, полугруппа, полиадическая операция.

The polyadic operations on the cartesian powers of n-ary groupoids are defined and studied in this paper.
Keywords: cartesian power, groupoid, semigroup, polyadic operation.

Введение. Полиадические операции, определенные на декартовых степенях множеств, впервые появились у Э. Поста [1], который изучал две такие операции. Одна из них была определена им на $(m-1)$-ой декартовой степени $\mathbf{S}_T^{m-1}$ симметрической группы $\mathbf{S}_T$ всех подстановок конечного множества T. Вторую операцию Э. Пост определил на $(m-1)$-ой декартовой степени $\mathbf{GL}_n^{m-1}(\mathrm{C})$ полной линейной группы $\mathbf{GL}_n(\mathrm{C})$ над полем C всех комплексных чисел. Обе отмеченные полиадические операции Э. Поста имеют арность, равную m, и в опрделении каждой из них неявно присутствует подстановка из $\mathbf{S}_{m-1}$, а именно цикл $\sigma = (12 \ldots m-1)$.

Конструкция, которую Э. Пост использовал при построении своих m-арных операций, допускает различные обобщения. В этом направлении можно отметить результаты С.А. Русакова [2], [3]. Еще одно из таких обобщений может быть осуществлено заменой в конструкции Э. Поста конкретных – симметрической и полной линейной групп произвольной группой и даже произвольным группоидом. При этом желательно, чтобы при такой замене было снято ограничение, связывающее арность полиадической операции и число компонент в упорядоченных наборах, на которых действует эта операция. Можно осуществить еще одно обобщение конструкции Э. Поста, заменив d ней цикл $\sigma = (12 \ldots m-1)$ любой подстановкой из $\mathbf{S}_{m-1}$.

Все перечисленные обобщения реализованы в работах одного из авторов [4]–[7], а также в книгах [8, 9]. В частности, в [4] для любых целых $k \geq 2$, $l \geq 2$ и любой подстановки σ множества $\{1, \ldots, k\}$ на k-ой декартовой степени A^k полугруппы A определена l-арная операция $[\ ]_{l,\sigma,k}$, которая при

$$k = m-1,\ l = m,\ \sigma = (12 \ldots m-1),\ A = \mathbf{S}_n$$

совпадает с операцией Э. Поста, определенной на декартовой степени $\mathbf{S}_n^{m-1}$ симметрической группы $\mathbf{S}_n$, а при

$$k = m-1,\ l = m,\ \sigma = (12 \ldots m-1),\ A = \mathbf{GL}_n(\mathrm{C})$$

операция $[\ ]_{l,\sigma,k}$ совпадает с операцией Э. Поста, определенной на декартовой степени $\mathbf{GL}_n^{m-1}(\mathrm{C})$ полной линейной группы $\mathbf{GL}_n(\mathrm{C})$.

Отмеченные выше две m-арные операции Э. Поста и почти все их обобщения характеризуются тем, что в определении каждой из них присутствует бинарная операция. В связи с этим возникает необходимость определения и изучения обобщений, в которых бинарная операция заменяется полиадической операцией арности больше двух. Именно такие полиадические операции и являются основным объектом изучения в данной статье.

1. Определение операции $\eta_{s,\sigma,k}$.

Определение 1.1. Пусть $< A, \eta >$ – n-арный группоид, $n \geq 2$, $s \geq 1$, $l = s(n-1)+1$, $k \geq 2$, $\sigma \in S_k$. Определим на A^k вначале n-арную операцию:

$$\begin{aligned}\eta_{1,\sigma,k}(\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n) &= \eta_{1,\sigma,k}((x_{11}, \ldots, x_{1k}) \ldots (x_{n1}, \ldots, x_{nk})) = \\ &= (\eta(x_{11}x_{2\sigma(1)} \ldots x_{n\sigma^{n-1}(1)}), \ldots, \eta(x_{1k}x_{2\sigma(k)} \ldots x_{n\sigma^{n-1}(k)}));\end{aligned} \tag{1.1}$$

а затем l-арную операцию

$$\eta_{s,\sigma,k}(\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_l) = \eta_{s,\sigma,k}((\mathrm{x}_{11}, \ldots, \mathrm{x}_{1k}) \ldots (\mathrm{x}_{l1}, \ldots, \mathrm{x}_{lk})) =$$
$$= \eta_{1,\sigma,k}(\mathrm{x}_1 \ldots \mathrm{x}_{n-1}\eta_{1,\sigma,k}(x_n \ldots x_{2(n-1)}\eta_{1,\sigma,k}(\ldots$$
$$\eta_{1,\sigma,k}(x_{(s-2)(n-1)+1} \ldots x_{(s-1)(n-1)}\eta_{1,\sigma,k}(x_{(s-1)(n-1)+1} \ldots x_{s(n-1)+1})) \ldots))). \qquad (1.2)$$

Замечание 1.1. Легко заметить, что если $n = 2$, то есть η – бинарная операция обозначаемая, например, символом $\circ$, то бинарная операция $\eta_{1,\sigma,k}$ совпадает с бинарной операцией $\overset{\sigma}{\circ}$ из [7, определение 1], а l-арная операция $\eta_{s,\sigma,k}$ – с l-арной операцией $[\ ]_{l,\sigma,k}$ из того же определения.

Теорема 1.1. Если

$$\eta_{s,\sigma,k}(\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_l) = (\mathrm{y}_1, \ldots, \mathrm{y}_\mathrm{k}), \qquad (1.3)$$

то для любого $j \in\{1, \ldots, k\}$ j-ая компонента y_j находится по формуле

$$y_j = \eta(x_{1j}x_{2\sigma(j)} \ldots x_{(n-1)\sigma^{n-2}(j)}\, \eta(x_{n\sigma^{n-1}(j)} \ldots x_{(2(n-1))\sigma^{2(n-1)-1}(j)}\, \eta(\ldots$$
$$\ldots \eta(x_{((s-1)(n-1)+1)\sigma^{(s-1)(n-1)}(j)} \ldots x_{(s(n-1)+1)\sigma^{s(n-1)}(j)}) \ldots))). \qquad (1.4)$$

Доказательство. Если $s = 1$, то доказывать нечего.

Пусть теперь $s > 1$. Полагая

$$\eta_{1,\sigma,k}(\mathbf{x}_{(s-1)(n-1)+1} \ldots \mathbf{x}_{s(n-1)+1}) = (y_1^{(s-1)}, \ldots, y_k^{(s-1)}),$$
$$\eta_{1,\sigma,k}(\mathbf{x}_{(s-2)(n-1)+1} \ldots \mathbf{x}_{(s-1)(n-1)}\eta_{1,\sigma,k}(\mathbf{x}_{(s-1)(n-1)+1} \ldots \mathbf{x}_{s(n-1)+1})) = (y_1^{(s-2)}, \ldots, y_k^{(s-2)}),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\eta_{1,\sigma,k}(\mathbf{x}_n \ldots \mathbf{x}_{2(n-1)}\eta_{1,\sigma,k}(\ldots \eta_{1,\sigma,k}(\mathbf{x}_{(s-2)(n-1)+1} \ldots \mathbf{x}_{(s-1)(n-1)}$$
$$\eta_{1,\sigma,k}(\mathbf{x}_{(s-1)(n-1)+1} \ldots \mathbf{x}_{s(n-1)+1})) \ldots)) = (y_1^{(1)}, \ldots, y_k^{(1)}),$$

и используя (1.1) и (.12), получим

$$y_j^{(s-1)} = \eta(x_{((s-1)(n-1)+1)j}x_{((s-1)(n-1)+2)\sigma(j)} \ldots x_{(s(n-1)+1)\sigma^{n-1}(j)},$$
$$y_j^{(s-2)} = \eta(x_{((s-2)(n-1)+1)j}x_{((s-2)(n-1)+2)\sigma(j)} \ldots x_{((s-1)(n-1))\sigma^{n-2}(j)}y^{(s-1)}_{\sigma^{n-1}(j)} =$$
$$= \eta(x_{((s-2)(n-1)+1)j}x_{((s-2)(n-1)+2)\sigma(j)} \ldots x_{((s-1)(n-1))\sigma^{n-2}(j)}$$
$$\eta(x_{((s-1)(n-1)+1)\sigma^{n-1}(j)}x_{((s-1)(n-1)+2)\sigma(\sigma^{n-1}(j))} \ldots x_{(s(n-1)+1)\sigma^{n-1}(\sigma^{n-1}(j))})) =$$
$$= \eta(x_{((s-2)(n-1)+1)j}x_{((s-2)(n-1)+2)\sigma(j)} \ldots x_{((s-1)(n-1))\sigma^{n-2}(j)}$$
$$\eta(x_{((s-1)(n-1)+1)\sigma^{n-1}(j)}x_{((s-1)(n-1)+2)\sigma^{n}(j)} \ldots x_{(s(n-1)+1)\sigma^{2(n-1)}(j)})),$$
$$y_j^{(1)} = \eta(x_{nj}x_{(n+1)\sigma(j)} \ldots x_{(2(n-1))\sigma^{n-2}(j)}\, \eta(x_{(2(n-1)+1)\sigma^{n-1}(j)} \ldots x_{(3(n-1))\sigma^{2(n-1)-1}(j)}$$
$$\eta(\ldots \eta(x_{((s-1)(n-1)+1\sigma^{(s-2)(n-1)}(j)} \ldots x_{(s(n-1)+1)\sigma^{(s-1)(n-1)}(j)}) \ldots))),$$
$$y_j = \eta(x_{1j}x_{2\sigma j} \ldots x_{(n-1)\sigma^{n-2}(j)}y^{(1)}_{\sigma^{n-1}(j)}) =$$
$$= \eta(x_{1j}x_{2\sigma(j)} \ldots x_{(n-1)\sigma^{n-2}(j)}\, \eta(x_{n\sigma^{n-1}(j)}x_{(n+1)\sigma(\sigma^{n-1}(j))} \ldots x_{(2(n-1))\sigma^{n-2}(\sigma^{n-1}(j))}$$
$$\eta(x_{(2(n-1)+1)\sigma^{n-1}(\sigma^{n-1}(j))} \ldots x_{(3(n-1))\sigma^{2(n-1)-1}(\sigma^{n-1}(j))}\, \eta(\ldots$$
$$\ldots \eta(x_{((s-1)(n-1)+1)\sigma^{(s-2)(n-1)}(\sigma^{n-1}(j))} \ldots x_{(s(n-1)+1)\sigma^{(s-1)(n-1)}\sigma^{n-1}(j)}) \ldots)))) =$$
$$= \eta(x_{1j}x_{2\sigma j} \ldots x_{(n-1)\sigma^{n-2}(j)}\, \eta(x_{n\sigma^{n-1}(j)}x_{(n+1)\sigma^{n}(j)} \ldots x_{(2(n-1))\sigma^{2(n-1)-1}(j)}$$
$$\eta(x_{(2(n-1)+1)\sigma^{2(m-1)}(j)} \ldots x_{3(n-11)\sigma^{3(n-1)-1}(j)}\, \eta(\ldots$$
$$\ldots \eta(x_{((s-1)(n-1)+1)\sigma^{(s-1)(n-1)}(j)} \ldots x_{(s(n-1)+1)\sigma^{s(n-1)}(j)}) \ldots)))).$$

Теорема доказана.

С помощью n-арной операции η n-арного группоида $< A, \eta >$ можно для всякого $l = s(n-1) + 1$, где $s \geq 1$, на том же множестве A определить две l-арные операции

$${}^{(s)}\eta(a_1 \ldots a_l) = \eta(\eta(\ldots\eta(\eta(a_1 \ldots a_n)a_{n+1} \ldots a_{2n-1}) \ldots)a_{(s-1)(n-1)+2} \ldots a_{s(n-1)+1}), \qquad (1.5)$$
$$\eta^{(s)}(a_1 \ldots a_l) = \eta(a_1 \ldots a_{n-1}\eta(a_n \ldots a_{(2n-1)}\eta(\ldots \eta(a_{(s-1)(n-1)+1} \ldots a_{s(n-1)+1}) \ldots))), \qquad (1.6)$$

которые называются соответственно *левой s-ой производной операцией* от операции η и *правой s-ой производной операцией* от операции η.

Используя правую s-ую производную операцию $\eta^{(s)}$, равенство (1.4) из теоремы 1.1 можно переписать в виде

$$y_j = \eta^{(s)}(a_{1j}a_{2\sigma(j)} \ldots a_{(s(n-1)+1)\sigma^{s(n-1)}(j)}). \quad (1.7)$$

l-Арная операция $\eta^{(s)}$, определенная на множестве A, позволяет, согласно определению 1.1, определить на множестве A^k l-арную операцию

$$\eta^{(s)}_{1,\sigma,k}((a_{11}, \ldots, a_{1k}) \ldots (a_{l1}, \ldots, a_{lk})) = (z_1, \ldots, z_k), \quad (1.8)$$

где

$$z_j = \eta^{(s)}(a_{1j}a_{2\sigma(j)} \ldots a_{l\sigma^{l-1}(j)}),\ j = 1, 2, \ldots, k. \quad (1.9)$$

Сравнивая (1.7) и (1.9), и, учитывая условие $l = s(n-1) + 1$, видим , что $y_j = z_j$. Следовательно, левые части в (1.3) и (1.8) равны, то есть l-арные операции $\eta_{s,\sigma,k}$ и $\eta^{(s)}_{1,\sigma,k}$ совпадают.

Таким образом, имеет место

Предложение 1.1. Для любого $s \geq 1$ l-арные операции $\eta_{s,\sigma,k}$ и $\eta^{(s)}_{1,\sigma,k}$ совпадают.

Предложение 1.1 позволяет сводить изучение операции $\eta_{s,\sigma,k}$ к изучению операции $\eta^{(s)}_{1,\sigma,k}$.

Замечание 1.2. Легко проверяется, что для ассоциативной n-арной операции η ее левая и правая s-ые производные операции ${}^{(s)}\eta$ и $\eta^{(s)}$ совпадают и являются ассоциативными. Другими словами, если $< A, \eta >$ – n-арная полугруппа, то $< A, {}^{(s)}\eta >$ и $< A, \eta^{(s)} >$ – совпадающие l-арные полугруппы.

Для ассоциативной n-арной операции η символы внутренних операций в (1.5) и (1.6) обычно не указывают, а вместо симолов ${}^{(s)}\eta$ и $\eta^{(s)}$ в случаях, когда не возникает разночтений, используют символ η.

Как отмечалось в замечании 1.1, если η – бинарная операция, обозначаемая символом $\circ$, то бинарная операция $\eta_{1,\sigma,k}$ совпадает с бинарной операцией $\overset{\sigma}{\circ}$, а l-арная операция $\eta_{s,\sigma,k}$ – с l-арной операцией $[\ ]_{l,\sigma,k}$ из [7]. При этом равенства (1.1), (1.2) и (1.4) принимают вид

$$\mathbf{x}_1 \overset{\sigma}{\circ} \mathbf{x}_2 = (x_{11}, \ldots, x_{1k}) \overset{\sigma}{\circ} (x_{21}, \ldots, x_{2k}) = (x_{11}x_{2\sigma(1)}, \ldots, x_{1k}x_{2\sigma(k)}), \quad (1.10)$$

$$[\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 \ldots \mathbf{x}_k]_{l,\sigma,k} = \mathbf{x}_1 \overset{\sigma}{\circ} (\mathbf{x}_2 \overset{\sigma}{\circ} (\ldots (\mathbf{x}_{l-2} \overset{\sigma}{\circ} (\mathbf{x}_{l-1} \overset{\sigma}{\circ} \mathbf{x}_l)) \ldots)), \quad (1.11)$$

$$y_j = x_{1j}(x_{2\sigma(j)}(\ldots (x_{(s(n-1))\sigma^{s(n-2)-1}(j)} x_{((s(n-1)+1)\sigma^{s(n-1)}(j)}) \ldots)). \quad (1.12)$$

Для сокращения записей в правых частях равенств (1.10) и (1.12) символ операции $\circ$ не указан.

Если к тому же бинарная операция η ассоциативна, то равенство (1.12) может быть переносимо следующим образом.

$$y_j = x_{1j}x_{2\sigma(j)} \ldots x_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)}x_{l\sigma^{l-1}(j)}.$$

Именно таким равенством в [8, определении 3.1.4] была определена l-арная операция $[\ ]_{l,\sigma,k}$ на k-ой декартовой степени полугруппы A.

Таким образом, l-арная операция $[\ ]_{l,\sigma,k}$ из [8], определенная на k-ой декартовой степени полугруппы, является частным случаем l-арной операции $[\ ]_{l,\sigma,k}$ из [7], определенной на k-ой декартовой степени группоида. Последняя операция, в свою очередь, является частным случаем l-арной операции из определения 1.1, определенной на k-ой декартовой степени n-арного группоида.

Частичным случаем l-арной операции $\eta_{s,\sigma,k}$ является и n-арная операция $\tilde{\eta}$ из [6], которая совпадает с n-арной операцией $\eta_{1,(12\ldots n-1),n-1}$.

Равенство (1.4) наводит на мысль об определении еще одной l-арной операции.

Определение 1.2. Пусть $< A, \eta >$ – n-арный группоид, $n \geq 2$, $s \geq 1$, $l = s(n-1) + 1$, $k \geq 2$, $\sigma \in S_k$. Определим на A^k l-арную операцию

$$\eta'_{s,\sigma,k}(\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_l) = \eta'_{s,\sigma,k}((x_{11}, \ldots, x_{1k}) \ldots (x_{l1}, \ldots, x_{lk})) = (z_1, \ldots, z_k),$$

где для любого $j \in \{1, \ldots, k\}$ j-ая компонента z_j находится по формуле

$$z_j = \eta(\eta(\ldots \eta(\eta(a_{1j}a_{2\sigma(j)} \ldots a_{n\sigma^{n-1}(j)})a_{(n+1)\sigma^{n}(j)} \ldots a_{(2n-1)\sigma^{2n-2}(j)}) \ldots$$

$$\ldots)a_{((s-1)(n-1)+2)\sigma^{(s-1)(n-1)+1}(j)} \ldots a_{(s(n-1)+1)\sigma^{s(n-1)}(j)}).$$

Сравнивая последнюю формулу с формулой (4), замечаем, что для ассоциативной n-арной операции η имеем $y_j = z_j$. Следовательно, в этом случае l-арные операции $\eta_{s,\sigma,k}$ и $\eta'_{s,\sigma,k}$ совпадают.

2. Ассоциативность операции $\eta_{s,\sigma,k}$.

Теорема 2.1. Если n-арная операция η-ассоциативна, а подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то l-арная операция $\eta_{s,\sigma,k}$ -ассоциативна.

Доказательство. Ввиду предложения 1.1, достаточно доказать ассоциативность l-арной операции $\eta^{(s)}_{1,\sigma,k}$.

Зафиксируем $i \in \{1, \ldots, l-1\}$ и положим

$$\eta^{(s)}_{1,\sigma,k}(\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_{i-1}\eta^{(s)}_{1,\sigma,k}(\mathbf{a}_i \ldots \mathbf{a}_{i+l-1})\mathbf{a}_{i+l} \ldots \mathbf{a}_{2l-1}) = (y_1, \ldots, y_k), \tag{2.1}$$

$$\eta^{(s)}_{1,\sigma,k}(\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_{i}\eta^{(s)}_{1,\sigma,k}(\mathbf{a}_{i+1} \ldots \mathbf{a}_{i+l})\mathbf{a}_{i+l+1} \ldots \mathbf{a}_{2l-1}) = (z_1, \ldots, z_k), \tag{2.2}$$

$$\eta^{(s)}_{1,\sigma,k}(\mathbf{a}_i \ldots \mathbf{a}_{i+l-1}) = (u_1, \ldots, u_k),$$

$$\eta^{(s)}_{1,\sigma,k}(\mathbf{a}_{i+1} \ldots \mathbf{a}_{i+l}) = (v_1, \ldots, v_k),$$

где

$$\mathbf{a}_i = (a_{i1}, \ldots, a_{ik}),\ i = 1, 2, \ldots, 2l-1.$$

Согласно замечанию 2.2, l-арная операция $\eta^{(s)}$ является ассоциативной. Используя этот факт, а также определение 1.1 и тождественность подстановки σ^{l-1}, получим

$$y_j = \eta^{(s)}(a_{1j}a_{2\sigma(j)} \ldots a_{(i-1)\sigma^{i-2}(j)}u_{\sigma^{i-1}(j)}a_{(i+l)\sigma^{i}(j)}a_{(i+l+1)\sigma^{i+1}(j)} \ldots a_{(2l-1)\sigma^{l-1}(j)}) =$$

$$= \eta^{(s)}(a_{1j}a_{2\sigma(j)} \ldots a_{(i-1)\sigma^{i-2}(j)}\,\eta^{(s)}(a_{i\sigma^{i-1}(j)}a_{(i+1)\sigma(\sigma^{i-1}(j))} \ldots$$

$$\ldots a_{(i+l-2)\sigma^{l-2}(\sigma^{i-1}(j))}a_{(i+l-1)\sigma^{l-1}(\sigma^{i-1}(j))})a_{(i+l)\sigma^{l-1+i}(j)}a_{(i+l+1)\sigma^{i+1}(j))} \ldots a_{(2l-1)\sigma^{l-1}(j)}) =$$

$$= \eta^{(s)}(a_{1j}a_{2\sigma(j)} \ldots a_{(i-1)\sigma^{i-2}(j)}\,\eta^{(s)}(a_{i\sigma^{i-1}(j)}a_{(i+1)\sigma^{i}(j)} \ldots$$

$$\ldots a_{(i+l-2)\sigma^{l-3}(\sigma^{i}(j))}a_{(i+l-1)\sigma^{l-2}(\sigma^{i}(j))})a_{(i+l)\sigma^{l-1}(\sigma^{i}(j))}a_{(i+l+1)\sigma^{i+1}(j)} \ldots a_{(2l-1)\sigma^{l-1}(j)}) =$$

$$= \eta^{(s)}(a_{1j}a_{2\sigma(j)} \ldots a_{(i-1)\sigma^{i-2}(j)}a_{i\sigma^{i-1}(j)}\,\eta^{(s)}(a_{(i+1)\sigma^{i}(j)} \ldots$$

$$\ldots a_{(i+l-2)\sigma^{l-3}(\sigma^{i}(j))}a_{(i+l-1)\sigma^{l-2}(\sigma^{i}(j))}a_{(i+l)\sigma^{l-1}(\sigma^{i}(j))})a_{(i+l+1)\sigma^{i+1}(j)} \ldots a_{(2l-1)\sigma^{l-1}(j)}) =$$

$$= \eta^{(s)}(a_{1j}a_{2\sigma(j)} \ldots a_{i\sigma^{i-1}(j)}v_{\sigma^{i}(j)}a_{(i+l-1)\sigma^{i+1}(j)} \ldots a_{(2l-1)\sigma^{l-1}(j)}) = z_j\ ,$$

то есть $y_j = z_j$ для любого $j = 1, \ldots, k$. Поэтому левые части в (2.1) и (2.2) равны, что означает ассоциативность l-арной операции $\eta^{(s)}_{1,\sigma,k}$, а значит, и l-арной операции $\eta_{s,\sigma,k}$. Теорема доказана.

Если подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^n = \sigma$, то она удовлетворяет и условию $\sigma^l = \sigma^{s(n-1)+1} = \sigma$. Поэтому из теоремы 2.1 вытекает.

Следствие 2.1. Если n-арная операция η-ассоциативна, а подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^n = \sigma$, то l-арная операция $\eta_{s,\sigma,k}$-ассоциативна.

Если η – бинарная операция, то из теоремы 2.1 вытекает

Следствие 2.2 [8, с. 144]. Если A – полугруппа, а подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то l-арная операция $[\ ]_{l,\sigma,k}$ – ассоциативна.

Если в теореме 2.1 положить $s = 1$, $k = n-1$, $\sigma = (12 \ldots n-1)$, то получим

Следствие 2.3 [8, с. 245]. Если $< A, \eta >$ – n-арная полугруппа, то $< A^{n-1}, \tilde{\eta} >$ – n-арная полугруппа.

Если подстановка γ удовлетворяет условию $\gamma^l = \gamma$, то для обратной подстановки γ^{-1} верно соответствующее равенство $(\gamma^{-1})^l = \gamma^{-1}$. Поэтому из теоремы 2.1 вытекает

Следствие 2.4. Если n-арная операция η ассоциативна, подстановка γ удовлетворяет условию $\gamma^l = \gamma$, $\sigma = \gamma^{-1}$, то l-арная операция $\eta_{s,\sigma,k}$ ассоциативна.

Из следствия 2.1 вытекает

Следствие 2.5. Если n-арная операция η ассоциативна, подстановка γ удовлетворяет условию $\gamma^n = \gamma$, $\sigma = \gamma^{-1}$, то l-арная операция $\eta_{s,\sigma,k}$ ассоциативна.

Из следствия 2.2 вытекает

Следствие 2.6 [8, с. 147]. Если A – полугруппа, $\sigma = \gamma^{-1}$, где γ – подстановка, удовлетворяющая $\sigma^l = \sigma$, то l-арная операция $[\ ]_{l,\sigma,k}$ ассоциативна.

Если подстановки $\sigma, \tau \in S_k$ удовлетворяют условию

$$\sigma^l = \sigma,\ \tau^l = \tau,\ \sigma\tau = \tau\sigma,$$

то для подстановка $\sigma\tau$ верно соответствующее равенство $(\sigma\tau)^l = \tau\sigma$. Поэтому из теоремы 2.1 вытекает

Следствие 2.7. Если n-арная операция ассоциативна, σ и τ – подстановки, для которых $\sigma^l = \sigma$, $\tau^l = \tau$, $\sigma\tau = \tau\sigma$, то l-арная операция $\eta_{s,\sigma\tau,k}$ ассоциативна.

Из следствия 2.1 вытекает

Следствие 2.8. Если n-арная операция η ассоциативна, σ и τ подстановка, для которых $\sigma^n = \sigma$, $\tau^n = \tau$, $\sigma\tau = \tau\sigma$, то l-арная операция $\eta_{s,\sigma\tau,k}$ ассоциативна

Из следствия 2.2 вытекает

Следствие 2.9 [8, с. 148]. Если A – полугруппа, σ и τ – подстановки, для которых $\sigma^l = \sigma$, $\tau^l = \tau$, $\sigma\tau = \tau\sigma$, то l-арная операция $[\ ]_{l,\sigma\tau,k}$ ассоциативна.

Литература

1. Post, E.L. Polyadic groups / E.L. Post // Trans. Amer. Math. Soc. – 1940. – Vol. 48, № 2. – P. 208 – 350.
2. Русаков, С.А. Алгебраические n-арные системы / С.А. Русаков. – Минск : Навука і тэхніка, 1992. – 245 с.
3. Русаков, С.А. Некоторые приложения теории n-арных групп / С.А. Русаков. – Минск : Беларуская навука, 1998. – 167 с.
4. Гальмак, А.М. Многоместные ассоциативные операции на декартовых степенях / А.М. Гальмак // Весці НАН Беларусі. – 2008. – № 3. – С. 28–34.
5. Гальмак, А.М. О многоместных операциях на декартовых степенях / А.М. Гальмак // Веснік МДУ ім. А.А. Куляшова. – 2008. – № 2–3 (30). – С. 134–139.
6. Гальмак, А.М. Об n-арных операциях на декартовых степенях n-арных группоидов / А.М. Гальмак // Веснік МДУ ім. А.А. Куляшова. – 2009. – № 2–3 (33). – С. 172–139.
7. Гальмак, А.М. Об операции $[\ ]_{l,\sigma,k}$ / А.М. Гальмак // Веснік МДУ ім. А.А. Куляшова. – 2010. – № 1 (35). – С. 34–38.
8. Гальмак, А.М. Многоместные операции на декартовых степенях / А.М. Гальмак. – Минск : Изд. центр БГУ, 2009. – 265 с.
9. Гальмак, А.М. Полиадические операции на множествах функций / А.М. Гальмак, Ю.И. Кулаженко. – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2013. – 192 с.

Могилевский государственный
университет им. А.А. Кулешова

Поступила в редакцию 20.05.2014