

Инвариантное распределение открытых экспоненциальных сетей массового обслуживания с зависящими от состояния сети многорежимными стратегиями обслуживания

А. А. Гаврилюк, Ю. В. Малинковский

1. Введение. Теория сетей массового обслуживания (СеМО) представляет собой относительно новый и весьма быстро развивающийся раздел теории массового обслуживания. Столь быстрое развитие теории сетей массового обслуживания можно объяснить актуальностью и перспективностью задач, связанных с проектированием и анализом сетей передачи данных и сетей ЭВМ, а также с математическим моделированием многозадачных вычислительных систем. Важное место в теории сетей массового обслуживания занимает класс сетей, инвариантное распределение которых представимо в форме произведения сомножителей, характеризующих отдельные узлы. Это в первую очередь связано с тем, что для других видов сетей стационарное распределение вероятностей состояний удастся определить только для частных случаев. Практически во всех работах, посвященных СеМО с мультипликативной формой инвариантного распределения, используется понятие квазиобратимости, которое впервые было введено Ф.П. Келли [1]. Это вызвано тем, что квазиобратимость узлов гарантирует существование инвариантной меры в форме произведения для соответствующего сети марковского процесса.

На настоящий момент в литературе редко рассматриваются аналитические модели сетей с ненадежными приборами в силу сложности нахождения инвариантной меры. СеМО, в которых приборы могут частично выходить из строя, работая при этом в ином, «щадающем» режиме, исследовались, например, в [2]. Существенным ограничением многих работ, исследующих инвариантное распределение открытых экспоненциальных СеМО с многорежимными стратегиями обслуживания, является предположение, что вероятность присоединения к очереди узла направляемой в него заявки, а также интенсивность обслуживания заявки узлом и интенсивности изменения режимов работы узла зависят не от состояния сети в целом, а только от состояния данного узла. Для случая одnoreжимной стратегии обслуживания данные ограничения были сняты в [3]. В настоящей работе указанные ограничения снимаются для случая многорежимных стратегий обслуживания заявок. Для этого на параметры модели приходится накладывать определенные условия, чтобы инвариантное распределение имело предполагаемую форму.

2. Постановка задачи. В сеть, состоящую из N однолинейных узлов, поступают независимые пуассоновские потоки заявок с интенсивностями $\gamma_1(x), \dots, \gamma_N(x)$, хотя бы одна из которых строго положительна при каждом x , $\gamma(x) = \sum_{l=1}^N \gamma_l(x)$ – суммарная интенсивность поступления заявок в сеть. В l -том узле находится единственный прибор, который может работать в $r_l + 1$ режимах. Состояние сети в момент времени $t \geq 0$ характеризуется случайным вектором $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t))$, где $x_l(t)$ – состояние l -того узла в момент времени t . Состояние l -того узла характеризуется парой чисел $(i_l(t), j_l(t))$, где $i_l(t)$ – число заявок в l -том узле в момент времени t , а $j_l(t)$ – номер режима, в котором работает прибор в l -том узле в момент времени t , $l = \overline{1, N}$, $j_l(t) = \overline{0, r_l}$.

Длительность обслуживания прибором l -того узла, находящегося в состоянии x_l ,

имеет показательное распределение с параметром $\mu_x(l)$, зависящим от состояния сети x . Назовем 0 основным режимом работы. Время пребывания прибора l -того узла в основном режиме работы имеет показательное распределение с параметром $\nu_x(l)$, зависящим от состояния сети x , после чего прибор переходит в режим 1. Для состояний l -того узла x_l , у которых $1 \leq j_l \leq r_l - 1$, время пребывания в режиме j_l также имеет показательное распределение, при этом с интенсивностью $\varphi_x(l)$, зависящей от состояния сети x , прибор l -того узла переходит в режим $j_l - 1$, а с интенсивностью $\nu_x(l)$, зависящей от состояния сети x , прибор l -того узла переходит в режим $j_l + 1$. Время пребывания в последнем, r_l -том режиме имеет показательное распределение с параметром $\varphi_x(l)$, зависящим от состояния сети x , после чего прибор переходит в режим $r_l - 1$. При этом переход прибора с режима 0 в режим 1 можно интерпретировать как частичную потерю работоспособности прибора. Аналогично, переход с режима j_l в режим $j_l + 1$ означает переход прибора в более щадящий режим обслуживания. Переход прибора с режима j_l в режим $j_l - 1$ означает восстановление тех функциональных возможностей, которые были утеряны при переходе прибора с режима $j_l - 1$ в режим j_l .

Заявка, обслуженная в l -том узле, мгновенно с вероятностью π_{li} направляется в i -тый узел, а с вероятностью π_{l0} покидает сеть ($l, i = \overline{1, N} : \sum_{i=0}^N \pi_{li} = 1$).

Для удобства введем следующие обозначения. Пусть $e_i^{(1)}$ – двухмерный вектор, у которого первый компонент по i -той координате равен единице, а остальные координаты равны нулю. Аналогично, $e_i^{(2)}$ – двухмерный вектор, у которого второй компонент по i -той координате равен единице, а остальные координаты равны нулю. Кроме того, будем считать, что $\mu_x(l) = 0$ при $i_l = 0$; $\nu_x(l) = 0$ при $j_l = r_l$; $\varphi_x(l) = 0$ при $j_l = 0$.

Предположим, что справедливы следующие два условия:

$$\nu_{x-e_l^{(2)}}(l) \mu_x(l) \varphi_{x-e_l^{(1)}}(l) = \nu_{x-e_l^{(1)}-e_j^{(2)}}(l) \mu_{x-e_j^{(2)}}(l) \varphi_x(l), \quad (1)$$

гарантирующее обратимость за счет внутренних изменений узла, т.е.

$$p(x + e_l^{(2)}) \varphi_{x+e_l^{(2)}} = p(x) \nu_x(l)$$

и

$$\frac{\varepsilon_j(x + e_l^{(1)}) \varepsilon_l(x)}{\mu_{x+e_l^{(1)}+e_j^{(1)}}(j) \mu_{x+e_l^{(1)}}(i)} = \frac{\varepsilon_l(x + e_j^{(1)}) \varepsilon_j(x)}{\mu_{x+e_l^{(1)}+e_j^{(1)}}(i) \mu_{x+e_j^{(1)}}(j)}, \quad i, j = \overline{1, N}, \quad (2)$$

гарантирующее выполнение

$$\frac{p(x + e_l^{(1)})}{p(x)} = \frac{\varepsilon_l(x)}{\mu_{x+e_l^{(1)}}(l)},$$

где $(\varepsilon_1(x), \varepsilon_2(x), \dots, \varepsilon_N(x))$ – решение уравнения графика

$$\varepsilon_l(x) = \gamma_l(x) + \sum_{j=1}^N \varepsilon_j(x) \pi_{jl}. \quad (3)$$

Будем считать также, что уравнение трафика (3) имеет единственное решение $(\varepsilon_1(x), \varepsilon_2(x), \dots, \varepsilon_N(x))$, для которого $\varepsilon_1 > 0, \dots, \varepsilon_N > 0$, а величины $\mu_x(l), \varphi_x(l), \nu_x(l)$ строго положительны. Тогда $x(t)$ – неприводимый марковский процесс на фазовом пространстве $X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_N$, где $X_l = \{(i_l, j_l) \mid i_l = 0, 1, 2, \dots; j_l = \overline{0, r_l}\}$.

3. Основной результат. Введем функции

$$G_{l,j_l}(x) = \prod_{k=1}^{j_l} \frac{\varepsilon_l(x - ke_l^{(1)})}{\mu_{x-(k-1)e_l^{(1)}}(l)}, \quad l = \overline{1, N}, \quad x \in X;$$
$$H_{l,j_l}(x) = \prod_{k=1}^{j_l} \frac{\nu_{x-ke_l^{(2)}}(l)}{\varphi_{x-(k-1)e_l^{(2)}}(l)}, \quad l = \overline{1, N}, \quad x \in X.$$

Лемма. Пусть выполняются условия (1) и (2) и ряды

$$\sum_{x \in X} [\gamma(x) + \sum_{l=1}^N (\mu_x(l) + \nu_x(l) + \varphi_x(l))] \times$$
$$\times \prod_{l=1}^N G_{l,j_l}(x - i_1 e_1^{(1)} - \dots - i_{l-1} e_{l-1}^{(1)}) H_{l,j_l}(x - j_1 e_1^{(2)} - \dots - j_{l-1} e_{l-1}^{(2)}) \quad (4)$$

сходятся. Тогда марковский процесс $x(t)$ эргодичен.

Доказательство леммы проводится аналогично доказательству леммы 3 из [3].

Обозначим через q_{xy} и q_{xy}^R инфинитезимальные интенсивности перехода из состояния x в состояние y для стационарных процессов $x(t)$ и $x(-t)$ соответственно, $x, y \in X$. Очевидно, что для процесса $x(t)$

$$q_{x, x+e_l^{(1)}} = \gamma_l(x); \tag{5}$$

$$q_{x, x-e_l^{(1)}} = \mu_x(l) \pi_{l0}, \quad i_l \neq 0, \quad l \neq 0; \tag{6}$$

$$q_{x, x-e_l^{(1)}+e_m^{(1)}} = \mu_x(l) \pi_{lm}, \quad i_l \neq 0, \quad i_m \neq 0, \quad l \neq 0; \tag{7}$$

$$q_{x, x+e_j^{(2)}} = \nu_x(l); \tag{8}$$

$$q_{x, x-e_j^{(2)}} = \varphi_x(l), \quad j_l \neq 0, \tag{9}$$

для всех других состояний интенсивность $q_{xy} = 0$.

Интенсивность выхода из состояния x для процесса $x(t)$ равна

$$q_x = \gamma(x) + \sum_{l=1}^N [\mu_x(l) + \nu_x(l) + \varphi_x(l)].$$

Теорема. Пусть выполнены условия (1) и (2) и ряды (4) сходятся. Тогда финальное стационарное распределение процесса $x(t)$ имеет следующую форму:

$$p(x) = \prod_{l=1}^N [G_{l,j_l}(x - i_1 e_1^{(1)} - \dots - i_{l-1} e_{l-1}^{(1)}) H_{l,j_l}(x - j_1 e_1^{(2)} - \dots - j_{l-1} e_{l-1}^{(2)})] p(0), \tag{10}$$

где

$$p(0) = (\sum_{x \in X} \prod_{l=1}^N G_{l,j_l}(x - i_1 e_1^{(1)} - \dots - i_{l-1} e_{l-1}^{(1)}) H_{l,j_l}(x - j_1 e_1^{(2)} - \dots - j_{l-1} e_{l-1}^{(2)}))^{-1}.$$

Здесь предполагается, что $G_{i,j_i}(x) = 1$ при $i_i = 0$ и что $H_{i,j_i}(x) = 1$ при $j_i = 0$.

Доказательство. Для доказательства того, что $p(x)$, определенные в (10), образуют стационарное распределение марковского процесса $x(t)$, достаточно [4,5] подобрать функцию

$$q_x^R: (X \times X) | \{(x, x), x \in X\} \rightarrow [0; \infty),$$

которая бы удовлетворяла соотношениям

$$p(x)q^R(x, y) = p(y)q(y, x), \quad x, y \in X, \quad (11)$$

и

$$q^R(x) = \sum_{y \neq x} q^R(x, y) = \sum_{y \neq x} q(y, x) = q(x). \quad (12)$$

В этом случае $q^R(x, y)$ будут являться инфинитезимальными интенсивностями перехода для обращенной во времени цепи Маркова $x(-t)$.

Пусть

$$\begin{aligned} q_{x, x+e_i^{(1)}}^R &= \frac{p(x+e_i^{(1)})}{p(x)} q_{x+e_i^{(1)}, x} = \varepsilon_i(x) \pi_{i0}; \\ q_{x, x-e_i^{(1)}}^R &= \frac{p(x-e_i^{(1)})}{p(x)} q_{x-e_i^{(1)}, x} = \frac{\mu_x(l)}{\varepsilon_i(x-e_i^{(1)})} \gamma_{x-e_i^{(1)}}(l); \\ q_{x, x-e_i^{(1)}+e_m^{(1)}}^R &= \frac{p(x-e_i^{(1)}+e_m^{(1)})}{p(x)} q_{x-e_i^{(1)}+e_m^{(1)}, x} = \frac{\varepsilon_m(x-e_i^{(1)}) \mu_x(l)}{\varepsilon_i(x-e_i^{(1)})} \pi_{ml}; \\ q_{x, x+e_i^{(2)}}^R &= \frac{p(x+e_i^{(2)})}{p(x)} q_{x+e_i^{(2)}, x} = \nu_x(l); \\ q_{x, x-e_i^{(2)}}^R &= \frac{p(x-e_i^{(2)})}{p(x)} q_{x-e_i^{(2)}, x} = \varphi_x(l), \end{aligned}$$

для всех остальных состояний интенсивность $q_{xy}^R = 0$.

Путем подстановки равенств (5) – (9) легко проверить, что для функции q^R соотношение (11) действительно выполняется. Осталось показать выполнение (12).

$$\begin{aligned} q_x^R &= \sum_{l=1}^N [\varepsilon_l(x) \pi_{l0} + \frac{\mu_x(l)}{\varepsilon_l(x-e_l^{(1)})} \gamma_l(x-e_l^{(1)}) + \sum_{m=1}^N \frac{\varepsilon_m(x-e_l^{(1)}) \mu_x(l)}{\varepsilon_l(x-e_l^{(1)})} \pi_{ml} + \nu_x(l) + \varphi_x(l)] = \\ &= \sum_{l=1}^N [\varepsilon_l(x) \pi_{l0} + \nu_x(l) + \varphi_x(l) + \frac{\mu_x(l)}{\varepsilon_l(x-e_l^{(1)})} (\gamma_l(x-e_l^{(1)}) + \sum_{m=1}^N \varepsilon_m(x-e_l^{(1)}) \pi_{ml})] = \\ &= [\text{в силу уравнения трафика (5)}] = \sum_{l=1}^N \varepsilon_l(x) \pi_{l0} + \sum_{l=1}^N [\nu_x(l) + \varphi_x(l) + \mu_x(l)] = \\ &= \gamma(x) + \sum_{l=1}^N [\mu_x(l) + \nu_x(l) + \varphi_x(l)] = q_x, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Abstract

The authors consider an invariant distribution of the open exponential networks of the mass service with the multimode strategies of the service which depend on the condition of the network.

Литература

1. Kelly F.P. Networks of Queues // Adv. Appl. Probab, 1976. – V. 8. – No 2. – P.416-432.
2. Малинковский Ю.В., Нуеман А.Ю.. Мультипликативность стационарного распределения в открытых сетях с многорежимными стратегиями обслуживания // Весці нацыянальнай акадэміі навук Беларусі, 2001. – №3. – С.129-134.
3. Евдокимович В.Е., Малинковский Ю.В.. Сети массового обслуживания с динамической маршрутизацией и динамическими вероятностными обходами узлов заявками // Проблемы передачи информации, 2001. – Т. 35. – Вып. 3. – С.55-66.
4. Henderson W., Pearce C.E., Pollett P.K., Taylor P.G. Connecting Internally Balanced Quasireversible Markov Processes // Adv. Appl. Probab, 1992. – V.24. – No 4. – P. 934-959.
5. Miyazawa M., Taylor P.G. A Geometric Product-Form Distribution for a Queueing Network with Non-Standard Batch Arrivals and Batch Transfers // Adv. Appl. Probab, 1997. – V. 29. – No 2. – P. 523-544.

Гомельский государственный
университет им. Ф.Скорины

Поступило 12.04.04