

Одно обобщение формулы Кристоффеля

Ю. Л. КИШАКЕВИЧ

Пусть R – обобщенная спектральная функция [1] задачи Коши

$$\omega_{n+1} + \omega_{n-1} + b_n \omega_n = x \omega_n; \quad n = 0, 1, \dots \quad (1)$$

$$\omega_{-1} = 0; \quad \omega_0 = 1 \quad (2)$$

где $b_n \in C$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), т.е. полиномы $\omega_n(x)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) ортонормальны относительно некоторого аддитивного и однородного функционала R , определенного на линейном пространстве полиномов с комплексными коэффициентами:

$$|R|\omega_n \omega_k\rangle = \delta_{nk} \quad n, k = 0, 1, 2, \dots$$

Из работ В.Лянце [2] известно, что уже в случае экспоненциально убывающего потенциала b_n спектральная функция, вообще говоря, не является мерой, а обобщенной функцией, связанной с регуляризацией особенностей типа полюса.

В монографии Г.Сеге [4] формулами Кристоффеля называются формулы, связывающие полиномы, ортогональные на некотором отрезке относительно мер $d\alpha(x)$ и $\rho(x)d\alpha(x)$, где полином $\rho(x)$ неотрицателен на этом отрезке. Автор рассматривает случай, когда обобщенная спектральная функция задачи Коши (1)-(2) возмущена или с помощью мультипликатора, или с помощью линейной комбинации δ -функций, сосредоточенных у разных точках комплексной плоскости. Эти результаты изложены в работе [6].

В этой статье рассматривается эта же задача, что и в формуле Кристоффеля, но для возмущения, порожденного функционалом $x^{-1}\delta$ (см. [4]).

Лемма 1. Пусть $p(x)$ – произвольный полином с комплексными коэффициентами. Тогда

$$|x^{-1}\delta|p(x)\rangle = p'(0).$$

Доказательство. По определению операции x^{-1} [6]

$$|x^{-1}\delta|p(x)\rangle = \left| \delta \left| \frac{p(x) - p(0)}{x} \right| \right\rangle = |\delta|g(x)\rangle = g(0), \quad (3)$$

где $g(x) = \frac{p(x) - p(0)}{x}$ как полином непрерывный в точке $x = 0$ т.е.

$$g(0) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{p(x) - p(0)}{x} = p'(0) \quad (4)$$

Из равенств (4) и (5) вытекает утверждение леммы.

Лемма 2. Пусть $p(x)$, $g(x)$ – произвольные полиномы с комплексными коэффициентами. Тогда

$$|x^{-1}\delta|p(x)g(x)\rangle = p'(0)g(0) + p(0)g'(0)$$

Доказательство. Введем обозначение $p(x)g(x) \equiv G(x)$. Тогда вследствие леммы 1 имеем:

$$|x^{-1}\delta|G(x)\rangle = G'(0) = p'(0)g(0) + p(0)g'(0)$$

Пусть S – обобщенная спектральная функция задачи Коши

$$a_{n-1}\varphi_{n-1} + a_n\varphi_{n+1} + b_n\varphi_n = x\varphi_n \quad (5)$$

$$\varphi_{-1} = 0 \quad \varphi_0 = 1 \quad (6)$$

где $a_n \in C$, $a_n \neq 0$, $b_n \in C$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). Тогда имеет место равенство:

$$C_n = (a_0 a_1 \dots a_{n-1})^{-1}, \quad (7)$$

где C_n – старший коэффициент многочлена φ_n .

В этой статье будет применена такая методика решения обратных задач спектральной теории: вначале по S – известной обобщенной спектральной функции некоторой задачи (5)-(6) возобновляем S – ортогональные полиномы со старшими коэффициентами, равными единице, потом находим коэффициенты a_n разностного уравнения, старшие коэффициенты S – ортонормированных полиномов и коэффициенты b_n разностного уравнения.

Пусть система полиномов $P_n(x)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) удовлетворяет двум условиям:

1) $P_n(x)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) – n -той степени со старшим коэффициентом 1;

2) $|S|P_m P_n\rangle = K_n \delta_{m,n}$, $m, n = 0, 1, 2, \dots$, $K_n \neq 0$, $K_0 = 1$.

Если $\phi_n(x)$ – S -ортонормированные полиномы, т.е.

$$\phi_n(x) = C_n P_n(x), \quad |S|\phi_n \phi_m\rangle = \delta_{m,n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

то имеют место следующие равенства:

$$1 = |S|\phi_n^2\rangle = |S|P_n^2\rangle C_n^2 = K_n C_n^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Из этого равенства и равенства (7) вытекает, что

$$a_0^2 = K_1, \quad a_{n-1}^2 = \frac{K_n}{K_{n-1}}, \quad n = 2, 3, \dots \quad (8)$$

Выбирая определенную ветвь $\sqrt{z}$, находим из последних формул a_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) и строим S -ортонормированные полиномы следующим образом:

$$\phi_n(x) = a_0^{-1} a_1^{-1} \dots a_{n-1}^{-1} P_n(x) \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Введем обозначения:

а) $D_n = \|\delta_{jk} + (\omega_j \omega_k)'\|$ ($j, k = 0, 1, 2, \dots, n-1$; производные здесь и далее берутся в точке $x = 0$)

б) $\det D_n = \Delta_n$ ($n = 1, 2, \dots$)

$$в) \gamma_n^{-1} = \sqrt{\frac{\Delta_2}{\Delta_1}} \cdot \prod_{k=2}^n \sqrt{\frac{\Delta_{k-1} \Delta_{k+1}}{\Delta_k^2}} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

$$г) \Phi_n(x) = \frac{1}{\Delta_n} \begin{vmatrix} & & & \vdots & \omega_n' \\ & & & \vdots & (\omega_1 \omega_n)' \\ & & & \vdots & \dots \\ & & D_n & \vdots & (\omega_{n-1} \omega_n)' \\ \dots & \dots & \dots & \vdots & (\omega_{n-1} \omega_n)' \\ \omega_0(x) & \omega_1(x) & \dots & \omega_{n-1}(x) & \omega_n(x) \end{vmatrix} \quad (n = 1, 2, \dots; \quad (9)$$

Теорема. Если $\Delta_n \neq 0$ ($n = 2, 3, \dots$), то многочлены $\varphi_n(x) = \gamma_n \Phi_n(x)$ ортонормированы относительно функционала

$$S = R + x^{-1} \delta.$$

Полиномы $\varphi_n(x)$ удовлетворяют разностное уравнение

$$a_n \varphi_{n+1} + a_{n-1} \varphi_{n-1} + \hat{b}_n \varphi_n = x \varphi_n(x) \quad (n = 0, 1, \dots)$$

и начальные условия

$$\varphi_{-1} = 0; \quad \varphi_0 = 1$$

Коэффициенты этого разностного уравнения определяются по формулам:

$$a_0 = \sqrt{\frac{\Delta_2}{\Delta_1}}, \quad a_n = \sqrt{\frac{\Delta_n \Delta_{n+2}}{\Delta_{n+1}^2}} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

$$\hat{b}_n = \gamma_n^2 \frac{\Delta_{n+1}}{\Delta_n} b_n + \frac{\gamma_n^2}{\Delta_n} \begin{vmatrix} & & & \vdots & \omega_n \\ & & & \vdots & (\omega_1 \omega_n)' \\ & & & \vdots & \dots \\ & & & \vdots & (\omega_n \omega_{n-1})' \\ \dots & \dots & \dots & \vdots & (\omega_{n+1} \omega_n)' \\ \omega_{n+1} & (\omega_1 \omega_{n+1})' & \dots & (\omega_{n+1} \omega_{n-1})' & (\omega_{n+1} \omega_n)' \end{vmatrix} - \gamma_n^2 \frac{\Delta_{n+1}}{\Delta_n^2} \begin{vmatrix} 1 & \omega_1 & \dots & \omega_{n-2} & \omega_n \\ \omega_1 & 1 + (\omega_1^2)' & \dots & (\omega_1 \omega_{n-2})' & (\omega_1 \omega_n)' \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_{n-1} & (\omega_1 \omega_{n-1})' & \dots & (\omega_{n-1} \omega_{n-2})' & (\omega_{n-1} \omega_n)' \end{vmatrix} \quad (10)$$

Доказательство. Легко проверить, что полиномы $\Phi_n(x)$ удовлетворяют двум условиям:

а) $\Phi_n(x)$ – полиномы точно n -той степени со старшим коэффициентом 1;

$$б) |S|\Phi_n \Phi_m\rangle = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \frac{\Delta_{n+1}}{\Delta_n} & m = n \end{cases}$$

Сначала докажем, что $|S|\Phi_n \Phi_m\rangle = 0$ при $m < n$. Так как $\Phi_m(x) = \sum_{k=0}^m C_{mk} \omega_k(x)$,

то $|S|\Phi_n \Phi_m\rangle = \sum_{k=0}^m C_{mk} |S|\Phi_n \omega_k\rangle$. Из равенства (11) имеем:

$$\Phi_n(x) \omega_k(x) = \frac{1}{\Delta_n} \begin{vmatrix} & & & \vdots & \omega_n \\ & & & \vdots & (\omega_1 \omega_n)' \\ & & & \vdots & \dots \\ & & & \vdots & (\omega_{n-1} \omega_n)' \\ \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots \\ \omega_0 \omega_k & \omega_1 \omega_k & \dots & \omega_{n-1} \omega_k & \omega_n \omega_k \end{vmatrix} \quad (11)$$

Из равенств (11) вследствие соотношений

$$|S|\omega_p \omega_k\rangle = |R|\omega_p \omega_k\rangle + (\omega_p \omega_k)' = \delta_{pk} + (\omega_p \omega_k)' = \begin{cases} (\omega_p \omega_k)' & p \neq k \\ 1 + (\omega_k^2)' & p = k \end{cases}$$

можем найти $|S|\Phi_n \omega_k\rangle$ при $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$. Для примера найдем

$$|S|\Phi_n \omega_1\rangle = \frac{1}{\Delta_n} \begin{vmatrix} & & & \vdots & \omega_n' \\ & D_n & & \vdots & (\omega_1 \omega_n)' \\ & & & \vdots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \vdots & (\omega_{n-1} \omega_n)' \\ \omega_1' & 1 + (\omega_1^2)' & \dots & (\omega_{n-1} \omega_1)' & (\omega_n \omega_1)' \end{vmatrix} = 0,$$

ибо определитель содержит две одинаковых строки. Аналогично доказывается, что $|S|\Phi_n \omega_k\rangle = 0$ при $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$. Таким образом, $|S|\Phi_n \Phi_m\rangle = 0$ при $m \neq n$. Легко видеть, что

$$|S|\Phi_n^2\rangle = |S|\Phi_n \omega_n\rangle = \frac{1}{\Delta_n} \begin{vmatrix} & & & \vdots & \omega_n' \\ & D_n & & \vdots & (\omega_1 \omega_n)' \\ & & & \vdots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \vdots & (\omega_{n-1} \omega_n)' \\ \omega_n' & (\omega_1 \omega_n)' & \dots & (\omega_{n-1} \omega_n)' & 1 + (\omega_n^2)' \end{vmatrix} = \frac{\Delta_{n+1}}{\Delta_n}. \quad (12)$$

Тогда, пользуясь формулами (8), находим коэффициенты разностного уравнения a_n :

$$a_0^2 = \frac{\Delta_2}{\Delta_1}; \quad a_{n-1}^2 = \frac{\Delta_{n+1} \Delta_{n-1}}{\Delta_n^2}; \quad n > 1.$$

Полиномы $\varphi_n(x) = \gamma_n \Phi_n(x)$ уже будут ортонормированы. Докажем, что полиномы $\varphi_n(x)$ удовлетворяют некоторому разностному уравнению второго порядка на полуоси. Пусть

$$x\varphi_n(x) = \sum_{k=0}^{n+1} d_{n,k} \varphi_k(x)$$

Вследствие S -ортонормированности полиномов $\varphi_n(x)$ отсюда вытекает, что

$$d_{n,k} = 0 \text{ при } k = 0, 1, 2, \dots, n-2.$$

Легко видеть, что

$$d_{n,n-1} = |S|x\varphi_n(x)\varphi_{n-1}(x)\rangle = d_{n-1,n}.$$

С другой стороны

$$d_{n,n-1} = \left| S \left| \varphi_n(x) \left(\sqrt{\frac{\Delta_{n-1} \Delta_{n+1}}{\Delta_n^2}} \varphi_n(x) + p_{n-1}(x) \right) \right| \right\rangle = \sqrt{\frac{\Delta_{n-1} \Delta_{n+1}}{\Delta_n^2}} = a_{n-1} \quad n \geq 1$$

Ищем теперь $\hat{b}_n = d_{n,n}$ $n = 0, 1, 2, \dots$. Вследствие (11) имеем

$$\hat{b}_n = d_{n,n} = |S|x\varphi_n^2(x)\rangle = \gamma_n^2 |S|x\Phi_n^2(x)\rangle = \gamma_n^2 \left| S \left| x\Phi_n(x) \left(\omega_n(x) + \sum_{k=0}^{n-1} C_{nk} \omega_k(x) \right) \right| \right\rangle$$

Используя (1), отсюда имеем:

$$\hat{b}_n = d_{n,n} = \gamma_n^2 \left(|S|\Phi_n \omega_{n+1}\rangle + b_n |S|\Phi_n \omega_n\rangle + C_{n,n-1} |S|\Phi_n \omega_n\rangle \right). \quad (13)$$

Положив в равенстве (11) $k = n + 1$, найдем вначале $\Phi_n \omega_{n+1}$, а потом и $|S|\Phi_n \omega_{n+1}\rangle$. Коэффициент $C_{n,n-1}$ находим из равенства (10) как алгебраическое дополнение к $\omega_{n-1}(x)$.

Подставив в равенство (13) значения $|S|\Phi_n \omega_{n+1}\rangle$, $|S|\Phi_n \omega_n\rangle$ и коэффициента $C_{n,n-1}$, получим равенство (10). Теорема доказана.

Abstract

The author considers relations between polynomials forming a part of the spectral function of the problem of Cauchy.

Литература

1. Кишакевич Ю.Л. Спектральная функция типа Марченко разностного оператора четного порядка // Матем. заметки, 1972. – Т.11. – № 4. – С.437-446.
2. Лянце В.Е. Спектр і резольвента несамоспряженого різницевого оператора // УМЖ, 1968. – 20. – №4. – С.489- 503
3. Сеге Г. Ортогональные многочлены. М.: Физматгиз, 1962. – 500 с.
4. Лянце В.Е., Кишакевич Ю.Л. Узагальнені ортогональні поліноми. Дрогобич: НВЦ “Каменярь” ДДПУ, 2002. – 135 с.

Дрогобычский государственный
университет им. И. Франка

Поступило 12.04.04