Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, №4(25), 2004

УДК 517.926

О разрешении вопроса эквивалентности дифференциальных систем в смысле совпадения отражающих функций

В. В. Мироненко

Ранее автором были доказаны следующие утверждения:

Теорема 1. *Дифференциальная система*

$$\frac{dx}{dt} = X(t,x),\ t \in R,\ x \in D \subset R^n, \tag{1}$$

эквивалентна в смысле совпадения отражающих функций [1, с.11] дифференциальной системе

$$\frac{dx}{dt} = X(t,x) + \alpha(t)\Delta(t,x), \tag{2}$$

где $\alpha(t)$ *— произвольная непрерывная скалярная нечетная функция, если вектор-функция* $\Delta(t,x)$ *является решением дифференциального уравнения в частных производных*

$$\frac{\partial \Delta}{\partial t} + \frac{\partial \Delta}{\partial x} X - \frac{\partial X}{\partial x}\Delta = 0. \tag{3}$$

Следствие. *Пусть функции* $\Delta_k(t,x)$ *являются решениями дифференциального уравнения в частных производных (3). Тогда все дифференциальные системы вида*

$$\frac{dx}{dt} = X(t,x) + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(t)\Delta_k(t,x), \tag{4}$$

где $\alpha_k(t)$ *— нечетные скалярные непрерывные функции, такие, что ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(t)\Delta_k(t,x)$ *сходится к непрерывно дифференцируемой функции, эквивалентны между собой в смысле совпадения отражающих функций, и все они эквивалентны дифференциальной системе (1).*

Лемма. *Пусть функция* $\Delta(t,x)$ *определяется формулой* $\Delta = \Delta^{(0)} = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(t)\Delta_k(t,x)$ *где* $\alpha_k(t)$ *— s раз дифференцируемые функции, а* $\Delta_k(t,x)$ *— один раз дифференцируемые функции, являющиеся решениями уравнения (3), и пусть для каждого* i, $i = \overline{1, s-1}$, *функции* $\Delta^{(i)}(t,x)$ *определены по формулам*

$$\Delta^{(i+1)} := \frac{\partial \Delta^{(i)}}{\partial t} + \frac{\partial \Delta^{(i)}}{\partial x} X - \frac{\partial X}{\partial x}\Delta^{(i)}. \tag{5}$$

Тогда справедливы тождества

$$\Delta^{(1)} = \sum_{k=1}^{m} \frac{d\alpha_k}{dt}\Delta_k, \Delta^{(2)} = \sum_{k=1}^{m} \frac{d^2\alpha_k}{dt^2}\Delta_k, \ldots, \Delta^{(s)} = \sum_{k=1}^{m} \frac{d^s\alpha_k}{dt^s}\Delta_k. \tag{6}$$

Теорема 2. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) функции $\alpha_k(t)$, $k=\overline{0,m}$, *— нечетные, скалярные, линейно независимы на* $\mathbf{R}$, *дифференцируемы m раз;*

2) каждая из m раз дифференцируемых вектор-функций $\Delta_k(t,x)$ *является решением уравнения (3).*

Тогда существуют скалярные непрерывные функции $a_s(t)$, $s=\overline{0,m}$, *для которых имеет место тождество*

$$a_0\Delta^{(0)}+a_1(t)\Delta^{(1)}+\ldots+a_m\Delta^{(m)}\overset{t,x}{\equiv}0, \tag{7}$$

где функции $\Delta^{(k)}(t,x)$ *определяются по формулам (6).*

Теорема 3. *Пусть существуют скалярные функции* $a_s(t)$, $s=\overline{0,m}$, *для которых выполнено тождество (7). Тогда, если линейное дифференциальное уравнение*

$$a_0\alpha+a_1\frac{d\alpha}{dt}+\ldots+a_m\frac{d^m\alpha}{dt^m}=0 \tag{8}$$

имеет m нечетных решений $\alpha_1(t),\alpha_2(t),\ldots,\alpha_m(t)$, *вронскиан которых обращается в ноль лишь в изолированных точках, то дифференциальная система (1), для которой функции* $\Delta_k(t,x)$ *вычисляются по формулам (5), эквивалентна дифференциальной системе (1) в смысле совпадения отражающих функций.*

Отсюда вытекает следующий алгоритм проверки на эквивалентность в смысле совпадения отражающих функций дифференциальной системы (1) дифференциальной системе

$$\frac{dy}{dt}=Y(t,x),\ t\in R,\ x\in G\subset R^n. \tag{9}$$

1. Задаемся неким $m>0$ и по формулам (5) находим $\Delta^{(i)}$.
2. Из тождества (7) находим функции a_k. Для их нахождения составляем следующую систему:

$$a_0(t)\Delta(t,x_1)+a_1(t)\Delta^{(1)}(t,x_1)+\ldots+a_m(t)\Delta^{(m)}(t,x_1)\overset{t}{\equiv}0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_0(t)\Delta(t,x_m)+a_1(t)\Delta^{(1)}(t,x_m)+\ldots+a_m(t)\Delta^{(m)}(t,x_m)\overset{t}{\equiv}0,$$

где x_i – фиксированы.

3. После подстановки функций a_k в соотношение (7) возможны два случая:
   A) Тождество (7) не выполняется. Тогда системы (1) и (2) либо не эквивалентны вообще, либо не эквивалентны при выбранном *m*, и, значит, его нужно увеличить.
   B) Тождество (7) выполняется. Тогда идем дальше.
4. Составляем уравнение (8) для определения функций α_k. Находим нечетные решения уравнения (8). Возможны два случая:
   A) Таких решений нет вовсе. Тогда системы (1) и (2) либо не эквивалентны вообще, либо не эквивалентны при выбранном *m*, и, значит, его нужно увеличить.
   B) Существует $r\le m$ четных решений уравнения (8). Тогда идем дальше.
5. Составляем систему

$$\Delta^{(0)} = \sum_{k=1}^{r} \alpha_k \Delta_k, \Delta^{(1)} = \sum_{k=1}^{r} \frac{d\alpha_k}{dt} \Delta_k, ..., \Delta^{(r)} = \sum_{k=1}^{m} \frac{d^r \alpha_k}{dt^r} \Delta_k \qquad (10)$$

для определения функций Δ_k.

6. Находим Δ_k и проверяем для каждого из них выполнения тождества (3). Возможны два случая:
   A) Тождество (3) не выполняется. Тогда системы (1) и (9) либо не эквивалентны вообще, либо не эквивалентны при выбранном m, и, значит, его нужно увеличить.
   B) Тождество (3) выполняется. Тогда системы (1) и (9) эквивалентны.

Продемонстрируем работу алгоритма на конкретном примере.

Пример. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = 1 + tx^2 + \left(t^3 - 2t^2\right)x - t^4 + t^3.$$

Согласно [1, с. 24], если существует стационарное дифференциальное уравнение, которому может быть эквивалентно в смысле совпадения отражающих функций исходное уравнение, то это стационарное уравнение имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = 1.$$

Выясним, эквивалентны ли в смысле совпадения отражающих функций указанные дифференциальные уравнения.

Воспользуемся изложенным алгоритмом, положив $m=2$. Найдем по формулам (5) функции

$$\Delta^{(0)} = tx^2 + \left(t^3 - 2t^2\right)x - t^4 + t^3,$$
$$\Delta^{(1)} = x^2 + \left(3t^2 - 2t\right)x + t^2 - 3t^3,$$
$$\Delta^{(2)} = 6tx - 6t^2.$$

Тождество (7) в нашем случае примет вид

$$a_0\left[tx^2 + \left(t^3 - 2t^2\right)x - t^4 + t^3\right] + a_1\left[x^2 + \left(3t^2 - 2t\right)x + t^2 - 3t^3\right] +$$
$$+ a_2\left[6tx - 6t^2\right] \equiv 0.$$

Соберем коэффициенты при соответствующих степенях x и приравняем их к нулю:

$$a_0 t + a_1 = 0,$$
$$a_0\left(t^3 - 2t^2\right) + a_1\left(3t^2 - 2t\right) + 6a_2 t = 0.$$

Положив здесь $a_0 = 3$, получим $a_1 = -3t$, $a_2 = t^2$. Таким образом, дифференциальное уравнение (8) имеет следующий вид:

$$3\alpha(t) - 3t\frac{d\alpha(t)}{dt} + t^2\frac{d^2\alpha(t)}{dt^2} = 0.$$

Это уравнение имеет два нечетных решения $\alpha_1(t) = t$, $\alpha_2(t) = t^3$. Составим систему (10) для определения функций Δ_k, $k = 1,2$:

$$tx^2 + \left(t^3 - 2t^2\right)x - t^4 + t^3 = t\Delta_1 + t^3\Delta_2,$$
$$x^2 + \left(3t^2 - 2t\right)x + t^2 - 3t^3 = \Delta_1 + 3t^2\Delta_2,$$
$$6tx - 6t^2 = 6t\Delta_2.$$

Решив ее, получаем $\Delta_1 = (x-t)^2$, $\Delta_2 = x-t$. Нетрудно проверить, что каждая из этих функций удовлетворяет соотношению (3), а значит, рассматриваемые дифференциальные уравнения эквивалентны в смысле совпадения отражающих функций.

Abstract

The procedure which gives us an opportunity to establish the equivalence of two given differential systems in sense of coincidence of reflecting functions was obtained.

Литература

1. Мироненко В. И. Отражающая функция и периодические решения дифференциальных уравнений. – Мн., Университетское, 1986. – 76 с.

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступило 12.04.04