Известия Гомельского государственного университета
имени Ф.Скорины, 4(25), 2004

УДК 512.542

О неразрешимых насыщенных формациях нильпотентного дефекта 3

В. Г. Сафонов

В работе рассматриваются только конечные группы. Используется терминология принятая в [1]–[3].

Пусть $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F}$ — насыщенные формации. Тогда $\mathfrak{H}$-дефектом насыщенной формации $\mathfrak{F}$ [4] называют длину решетки $\mathfrak{F}/_l\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H}$ насыщенных формаций, заключенных между $\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F}$. Если $\mathfrak{H}=\mathfrak{N}$ — формация всех нильпотентных групп, то $\mathfrak{N}$-дефект насыщенной формации называют её нильпотентным дефектом. В работе [4] установлен ряд общих свойств $\mathfrak{H}$-дефекта насыщенной формации, а также дана классификация насыщенных формаций нильпотентного дефекта $\leqslant 2$. Задача изучения и классификации насыщенных формаций нильпотентного дефекта 3 поставлена в монографии Л.А.Шеметкова и А.Н.Скибы [2] (проблема 20.9). В 1996 г. решение этой задачи в классе всех разрешимых групп было дано автором в работе [5]. Кроме того, полученные в данной работе результаты позволили свести решение указанной задачи к классификации неразрешимых неприводимых насыщенных формаций с нильпотентным дефектом 3 (насыщенная формация $\mathfrak{F}$ называется неприводимой, если $\mathfrak{F}\neq l\,\mathrm{form}(\cup_{i\in I}\mathfrak{X}_i)=\vee_l(\mathfrak{X}_i|i\in I)$, где $\{\mathfrak{X}_i|i\in I\}$ — набор всех собственных насыщенных подформаций из $\mathfrak{F}$). В дальнейшем, в работе [6], была получена классификация неприводимых насыщенных формаций такого рода с разрешимой максимальной насыщенной подформацией.

Будем говорить, что насыщенная формация $\mathfrak{F}$ имеет $\mathfrak{H}$-уровень равный k, и записывать $l_{\mathfrak{H}}(\mathfrak{F})=k$, если $\mathfrak{F}$ содержит неприводимую насыщенную подформацию с $\mathfrak{H}$-дефектом k, и $\mathfrak{H}$-дефект любой другой неприводимой насыщенной подформации из $\mathfrak{F}$ не превосходит k.

Из основного результата работы [4] следует, что $\mathfrak{N}$-уровень (нильпотентный уровень) любой насыщенной формации нильпотентного дефекта 2 равен 1 или 2.

Обозначим через $d_{\mathfrak{N}}(\mathfrak{F})$ нильпотентный дефект насыщенной формации $\mathfrak{F}$.

Лемма 1 [5]. *Пусть $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{X}$ — произвольные насыщенные формации, имеющие конечный нильпотентный дефект. Тогда*

$$d_{\mathfrak{N}}(\mathfrak{M}\vee_l\mathfrak{X})=d_{\mathfrak{N}}(\mathfrak{M})+d_{\mathfrak{N}}(\mathfrak{X})-d_{\mathfrak{N}}(\mathfrak{M}\cap\mathfrak{X}).$$

Лемма 2 [5]. *Пусть f, m и h — минимальные локальные экраны формаций $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ соответственно. Тогда если $\mathfrak{F}=\mathfrak{M}\vee_l\mathfrak{H}$, то имеет место равенство $f=m\vee h$.*

Напомним, что группа G называется критической [3], если G — группа минимального порядка из $\mathfrak{F}\setminus\mathfrak{M}$ для некоторых двух формаций $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{M}$. Критическая группа $G\notin\mathfrak{H}$ называется $\mathfrak{H}$-базисной, если у формации, ею порожденной, имеется лишь единственная максимальная подформация $\mathfrak{M}$, причем $\mathfrak{M}\subseteq\mathfrak{H}$.

Лемма 3. *Пусть $\mathfrak{F}$ — неприводимая насыщенная формация, $\mathfrak{M}$ — максимальная насыщенная подформация $\mathfrak{F}$, f и m — минимальные локальные экраны формаций $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{M}$ соответственно. Тогда $\mathfrak{F}=l\,\mathrm{form}\,G$, где G — такая монолитическая группа с монолитом $P=G^{\mathfrak{M}}$, что выполняется одно из следующих условий:*

1) $P=G^{\mathfrak{N}_pm(p)}$ — неабелева группа, $f(p)$ — минимальная не $(\mathfrak{N}_pm(p))$-формация для любого $p\in\pi(P)$ и $m(q)=f(q)$ при любом простом $q\notin\pi(P)$;

2) $G=[P]M$, где $P=C_G(P)=F_p(G)$ — p-группа, M — $(\mathfrak{N}_pm(p))$-базисная группа с монолитом $S=M^{\mathfrak{N}_pm(p)}$ и $m(q)=f(q)$ при любом простом $q\neq p$.

Доказательство. Ввиду следствия 18.5 [2] формация $\mathfrak{F} = l\,\mathrm{form}\,G$, где G — такая монолитическая группа с монолитом $P = G^{\mathfrak{M}}$, что $f(p)$ — минимальная не $\mathfrak{N}_p m(p)$-формация для любого $p \in \pi(P)$. Если P неабелев монолит группы G, то ввиду леммы 18.2 [2] для любого $p \in \pi(P)$ формация $\mathrm{form}\,G = f(p)$ имеет единственную максимальную подформацию $\mathrm{form}(G/P)$. Так как $f(p)$ — минимальная не $\mathfrak{N}_p m(p)$-формация, то $P = G^{\mathfrak{N}_p m(p)}$. Пусть $q \notin \pi(P)$. Тогда если $q \notin \pi(G)$, то $f(q) = m(q) = \varnothing$. Если же $q \in \pi(G) \setminus \pi(P)$, то $P \subseteq F_q(G)$ и

$$(G/P)/F_q(G/P) = (G/P)/(F_q(G)/P) \simeq G/F_q(G).$$

Поскольку $G/P \in \mathfrak{M}$, то $(G/P)/F_q(G/P) \in m(q)$. Поэтому $G/F_q(G) \in m(q)$. Но тогда $f(q) = \mathrm{form}(G/F_q(G)) \subseteq m(q)$. Значит, $m(q) = f(q)$ для любого простого $q \notin \pi(P)$. Таким образом, группа G удовлетворяет условию 1) леммы.

Пусть P — абелева p-группа. Выберем в $f(p) \setminus \mathfrak{N}_p m(p)$ группу минимального порядка H. Тогда H — монолитическая группа с монолитом $S = H^{\mathfrak{N}_p m(p)}$ и $f(p) = \mathrm{form}\,H$. Поскольку $f(p)$ — минимальная не $(\mathfrak{N}_p m(p))$-формация, то H — $(\mathfrak{N}_p m(p))$-базисная группа. Понятно, что $O_p(H) = 1$. Следовательно, ввиду следствия 18.8 [2] существует точный неприводимый $F_p[H]$-модуль V. Положим $F = [V]H$. Поскольку $F/O_p(F) \simeq H \in f(p)$, то по лемме 8.2 [2] группа $F \in \mathfrak{F}$. С другой стороны, так как $F/F_p(F) \simeq H \notin \mathfrak{N}_p m(p)$, то группа $F \notin \mathfrak{M}$. Значит, $\mathfrak{F} = l\,\mathrm{form}\,F$. Пусть теперь q — произвольное простое число отличное от p. Если $q \notin \pi(\mathfrak{F})$, то, понятно, $f(q) = m(q) = \varnothing$. Пусть $q \in \pi(\mathfrak{F})$. Тогда $V \subseteq F_q(F)$ и

$$(F/V)/F_q(F/V) = (F/V)/(F_q(F)/V) \simeq F/F_q(F).$$

Так как $F/V \in \mathfrak{M}$, то $F/F_q(F) \in m(q)$ и следовательно, $m(q) = f(q)$ при любом простом $q \neq p$. Значит, группа F удовлетворяет условию 2) леммы. Лемма доказана.

Теорема. *Пусть $\mathfrak{F}$ — неприводимая насыщенная формация, $\mathfrak{M}$ — её максимальная насыщенная подформация, причем $l_{\mathfrak{N}}(\mathfrak{M}) = 1$ и $\mathfrak{H} \not\subseteq \mathfrak{S}$ для любой ненильпотентной насыщенной подформации $\mathfrak{H}$ из $\mathfrak{M}$. Тогда нильпотентный дефект формации $\mathfrak{F}$ в том и только в том случае равен 3, когда $\mathfrak{F} = l\,\mathrm{form}\,G$, где G — такая монолитическая группа с монолитом $P = G^{\mathfrak{M}}$, что выполняется одно из следующих условий:*

1) $G = [P]M$, где $P = C_G(P)$ — p-группа, $M = [S]D$, $S = C_M(S)$ — минимальная нормальная s-подгруппа ($s \neq p$), $D = K_1 \times K_2$, где K_i — прямое произведение изоморфных простых неабелевых групп B_i $(i = 1, 2)$, $B_1 \not\simeq B_2$, причем $p, s \in \pi(B_1) \cap \pi(B_2)$;

2) P — неабелева группа, $G/P = K_1 \times K_2$, где K_i — прямое произведение изоморфных простых неабелевых групп B_i $(i = 1, 2)$, $B_1 \not\simeq B_2$, причем $\pi(P) \subseteq \pi(B_1) \cap \pi(B_2)$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $\mathfrak{F}$ — неприводимая насыщенная формация нильпотентного дефекта 3, $\mathfrak{M}$ — ее максимальная насыщенная подформация, причем $\mathfrak{M} \not\subseteq \mathfrak{S}$. Тогда по лемме 3 $\mathfrak{F} = l\,\mathrm{form}\,G$, где G — такая монолитическая группа с монолитом $P = G^{\mathfrak{M}}$, что выполняется одно из следующих условий:

а) $P = G^{\mathfrak{N}_p m(p)}$ — неабелева группа, $f(p)$ — минимальная не $(\mathfrak{N}_p m(p))$-формация для любого $p \in \pi(P)$ и $m(q) = f(q)$ при любом простом $q \notin \pi(P)$;

б) $G = [P]M$, где $P = C_G(P) = F_p(G)$ — p-группа, M — $(\mathfrak{N}_p m(p))$-базисная группа с монолитом $S = M^{\mathfrak{N}_p m(p)}$ и $m(q) = f(q)$ при любом простом $q \neq p$.

Поскольку $\mathfrak{M}$ — насыщенная формация с нильпотентным дефектом 2, то в силу теоремы 20.6 [2] формация $\mathfrak{M}$ удовлетворяет одному из следующих условий:

1) $\mathfrak{M} = \mathfrak{H}_1 \vee_l \mathfrak{H}_2 \vee_l \mathfrak{X}$, где $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{N}$, а $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$ — различные минимальные ненильпотентные формации;

2) $\mathfrak{M} = \mathfrak{H} \vee_l \mathfrak{X}$, где $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{N}$, а $\mathfrak{H}$ — неприводимая насыщенная формация нильпотентного дефекта 2.

Рассмотрим случай когда $\mathfrak{M}$ удовлетворяет условию 1). Тогда в силу следствия 19.10 [2] и условия $\mathfrak{H}_i \not\subseteq \mathfrak{S}$ имеем $\mathfrak{H}_i = l\,\mathrm{form}\,B_i$ $(i = 1, 2)$, где B_1 и B_2 — неизоморфные простые неабелевы группы.

Используя теорему 8.3 и лемму 9.15 [2] получим

$$m(a) = \begin{cases} \mathrm{form}(B_1 \times B_2), & \text{если } a \in \pi(B_1) \cap \pi(B_2), \\ \mathrm{form}\,B_1, & \text{если } a \in \pi(B_1) \setminus \pi(B_2), \\ \mathrm{form}\,B_2, & \text{если } a \in \pi(B_2) \setminus \pi(B_1), \\ (1), & \text{если } a \in \pi(\mathfrak{M}) \setminus (\pi(B_1) \cup \pi(B_2)), \\ \varnothing, & \text{если } a \notin \pi(\mathfrak{M}). \end{cases}$$

Пусть P — абелева p-группа, т.е. имеет место случай б).

Допустим, что S — неабелева группа и пусть $s \in \pi(S)$. Тогда $F_s(M) = 1$ и поскольку $M \in \mathfrak{M}$, то $M \simeq M/F_s(M) \in m(s)$. Значит, $m(s) \neq (1)$. Поэтому $\pi(S) \subseteq \subseteq \pi(B_1) \cup \pi(B_2)$. Предположим теперь, что найдется такое $s \in \pi(S)$, что либо $s \in \pi(B_1) \setminus \setminus \pi(B_2)$, либо $s \in \pi(B_2) \setminus \pi(B_1)$. Тогда $M \simeq M/F_s(M) \in m(s) = \mathrm{form}\,B_i$, $i = 1$ или 2. Значит, M — прямое произведение изоморфных простых неабелевых групп. Так как при этом M монолитическая группа, то $M \simeq B_i$. Если теперь $p \notin \pi(B_i)$, то в силу теоремы 20.7 [2] нильпотентный дефект формации $\mathfrak{F} = l\,\mathrm{form}[P]M$ равен 2. Если же $p \in \pi(B_i)$, то $\mathfrak{F} = l\,\mathrm{form}[P]M = l\,\mathrm{form}\,M$ и $d_{\mathfrak{N}}(\mathfrak{F}) = 1$, что невозможно. Значит, $\pi(S) \subseteq \pi(B_1) \cap \cap \pi(B_2)$ и $M \simeq M/F_s(M) \in m(s) = \mathrm{form}(B_1 \times B_2)$. Применяя теперь теорему 3.37 [2] заключаем, что группа M изоморфна группе B_1 или B_2. Снова получаем противоречие. Таким образом, данный случай невозможен.

Пусть S — абелева s-группа. Предположим, что $p \notin \pi(B_1) \cap \pi(B_2)$. Тогда если $p \in \pi(B_i) \setminus \pi(B_j)$, то $m(p) = \mathrm{form}\,B_i$. Значит, $f(p) = \mathrm{form}\,M$ — минимальная не $(\mathfrak{N}_p\,\mathrm{form}\,B_i)$-формация. Поскольку $\mathrm{form}\,B_j \subset f(p)$, то $\mathrm{form}\,B_j \subseteq \mathfrak{N}_p\,\mathrm{form}\,B_i$ $(i \neq j)$. Значит, $B_j \in \mathrm{form}\,B_i$, что невозможно. Если же $p \in \pi(\mathfrak{M}) \setminus (\pi(B_1) \cup \pi(B_2))$, то $m(p) = (1)$. Но тогда $\mathrm{form}\,M$ — минимальная не $\mathfrak{N}_p$-формация. Следовательно, $M/S \in \mathfrak{N}_p$ и группа G разрешима. Противоречие. Поэтому $p \in \pi(B_1) \cap \pi(B_2)$. Предположим теперь, что $s \notin \pi(B_1) \cap \pi(B_2)$. Тогда если $s \in \pi(\mathfrak{M}) \setminus (\pi(B_1) \cap \pi(B_2))$, то $M/O_s(M) = M/F_s(M) \in \in m(s) = (1)$. Значит, G — разрешимая группа. Противоречие. Если же $s \in \pi(B_i) \setminus \setminus \pi(B_j)$ $(i \neq j)$, то $M/O_s(M) = M/F_s(M) \in m(s) = \mathrm{form}\,B_i$. Следовательно, $M/O_s(M)$ — прямое произведение изоморфных простых неабелевых групп B_i. Пусть $q \in \pi(B_j) \setminus \setminus \{p, s\}$. Тогда поскольку $B_j \in \mathfrak{F}$, то $B_j \simeq B_j/F_q(B_j) \in f(q) = \mathrm{form}(G/F_q(G))$. Так как $q \notin \{p, s\}$, то $G/F_q(G) \simeq M/F_q(M)$ и $O_s(M) \subseteq F_q(M)$. Значит, $B_j \in \mathrm{form}(G/F_q(G)) = = \mathrm{form}(M/F_q(M)) \subseteq \mathrm{form}(M/O_s(M)) \subseteq \mathrm{form}\,B_i$. Противоречие. Поэтому $s \in \pi(B_1) \cap \cap \pi(B_2)$. Таким образом, $p, s \in \pi(B_1) \cap \pi(B_2)$.

Пусть $D = M/C_M(S)$. По лемме 3.32 [2] группа $T = [S]D$ принадлежит формации $\mathrm{form}\,M = f(p)$. Если $\mathrm{form}\,T \subset \mathrm{form}\,M$, то поскольку $\mathrm{form}\,M$ — минимальная не $\mathfrak{N}_p m(p)$-формация имеем $\mathrm{form}\,T \subseteq \mathfrak{N}_p m(p) = \mathfrak{N}_p\,\mathrm{form}(B_1 \times B_2)$. Поскольку $O_p(T) = 1$, то $T \in \in \mathrm{form}(B_1 \times B_2)$, что невозможно, так как $O_s(T) \neq 1$. Поэтому $\mathrm{form}\,T = \mathrm{form}\,M$. По лемме 18.2 [2] $\mathrm{form}\,D$ — единственная максимальная подформация $\mathrm{form}\,T$. Так как $D = = M/C_M(S) \in m(s) = \mathrm{form}(B_1 \times B_2)$, то $\mathrm{form}\,D \subseteq \mathrm{form}(B_1 \times B_2)$. Кроме того, поскольку $\mathrm{form}(B_1 \times B_2) = m(p) \subset f(p)$ и $\mathrm{form}\,D$ — единственная максимальная подформация $f(p)$, то $\mathrm{form}(B_1 \times B_2) \subseteq \mathrm{form}\,D$. Поэтому $\mathrm{form}\,D = \mathrm{form}(B_1 \times B_2)$. Но тогда $D = B^1 \times B^2$, где $1 \neq B^i$ — прямое произведение изоморфные простых неабелевых групп B_i $(i = 1, 2)$, $B_1 \not\simeq B_2$.

Далее поскольку T — монолитическая группа и $O_p(T) = 1$, то по лемме 18.8 [2] существует точный неприводимый $F_p[T]$-модуль V. Пусть $F = [V]T$. Так как $F/O_p(F) \simeq \simeq T \in f(p)$, то по лемме 8.2 [2] $F \in \mathfrak{F}$. Но поскольку $F/F_p(F) \simeq T \notin \mathfrak{N}_p m(p)$, то $F \notin \mathfrak{M}$. Поэтому $\mathfrak{F} = l\,\mathrm{form}\,F$. Таким образом, группа F удовлетворяет условию теоремы.

Пусть теперь P неабелев монолит G, т.е. имеет место случай а).

Если $\pi(P) \not\subseteq \pi(B_1) \cup \pi(B_2)$ и $p \in \pi(P) \setminus (\pi(B_1) \cup \pi(B_2))$, то $m(p) = (1)$. Значит, $f(p) = \mathrm{form}\,G$ — минимальная не $\mathfrak{N}_p$-формация. Но тогда $G/P \in \mathfrak{N}_p$ и $\mathfrak{F}$ — минимальная насыщенная неразрешимая формация. Последнее противоречит условию. Поэтому $\pi(P) \subseteq \pi(B_1) \cup \pi(B_2)$.

Допустим теперь, что найдется такое $p \in \pi(P)$, что $p \in \pi(B_i) \setminus \pi(B_j)$, где $i, j \in \in \{1, 2\}$ $(i \neq j)$. Тогда $f(p) = \mathrm{form}\,G$ — минимальная не $(\mathfrak{N}_p\,\mathrm{form}\,B_i)$-формация. Поэтому $G/P \in \mathfrak{N}_p\,\mathrm{form}\,B_i$.

Пусть q — произвольное простое число из $\pi(P) \setminus \{p\}$. Тогда $f(q) = \mathrm{form}\,G$ — минимальная не $(\mathfrak{N}_q m(q))$-формация. Возможны следующие случаи:

(а) $q \in \pi(B_j) \setminus \pi(B_i)$ $(j \neq i)$. Тогда $m(q) = \mathrm{form}\,B_j$;

(б) $q \in \pi(B_i) \setminus \pi(B_j)$ $(j \neq i)$. Тогда $m(q) = \mathrm{form}\,B_i$;

(в) $q \in \pi(B_1) \cap \pi(B_2)$. Тогда $m(q) = \mathrm{form}(B_1 \times B_2)$.

Пусть имеет место случай (а). Тогда $G/P \in \mathfrak{N}_p\,\mathrm{form}\,B_i \cap \mathfrak{N}_q\,\mathrm{form}\,B_j = (1)$. Поэтому $G = P$ — простая неабелева группа и $d_{\mathfrak{N}}(\mathfrak{F}) = 1$. Противоречие.

Пусть теперь имеет место случай (б). Тогда $G/P \in \mathfrak{N}_p\,\mathrm{form}\,B_i \cap \mathfrak{N}_q\,\mathrm{form}\,B_i = (\mathfrak{N}_p \cap \cap\, \mathfrak{N}_q)\,\mathrm{form}\,B_i = \mathrm{form}\,B_i$. Значит, G/P — прямое произведение изоморфных простых неабелевых групп B_i. Если теперь $\pi(P) \subseteq \pi(B_i)$, то по теореме 20.7 [2] имеем $d_{\mathfrak{N}}(\mathfrak{F}) = 2$. Если же найдется $r \in \pi(P) \setminus \pi(B_i)$, то $r \in \pi(B_j)$ и $f(r) = \mathrm{form}\,G$ — минимальная не $(\mathfrak{N}_r\,\mathrm{form}\,B_j)$-формация. Значит, $G/P \in \mathfrak{N}_r\,\mathrm{form}\,B_j \cap \mathrm{form}\,B_i = (1)$, что невозможно.

Пусть наконец имеет место случай (в). Тогда

$$G/P \in \mathfrak{N}_p\,\mathrm{form}\,B_i \cap \mathfrak{N}_q\,\mathrm{form}(B_1 \times B_2) \subseteq$$

$$\subseteq \mathfrak{N}_p\,\mathrm{form}(B_1 \times B_2) \cap \mathfrak{N}_q\,\mathrm{form}(B_1 \times B_2) =$$

$$= (\mathfrak{N}_p \cap \mathfrak{N}_q)\,\mathrm{form}(B_1 \times B_2) = \mathrm{form}(B_1 \times B_2).$$

Следовательно, $O_p(G/P) = 1$. Так как при этом $G/P \in \mathfrak{N}_p\,\mathrm{form}\,B_i$, то $G/P \in \mathrm{form}\,B_i$. Мы пришли к ситуации рассмотренной в предыдущем случае и приводящей к противоречию. Таким образом, наше предположение не верно и $\pi(P) \subseteq \pi(B_1) \cap \pi(B_2)$.

Пусть p и q — различные простые числа из $\pi(P)$. Тогда $m(p) = m(q) = \mathrm{form}\,G$ — минимальная не $(\mathfrak{N}_p\,\mathrm{form}(B_1 \times B_2))$ и $(\mathfrak{N}_q\,\mathrm{form}(B_1 \times B_2))$-формация. Поэтому

$$G/P \in \mathfrak{N}_p\,\mathrm{form}(B_1 \times B_2) \cap \mathfrak{N}_q\,\mathrm{form}(B_1 \times B_2) =$$

$$= (\mathfrak{N}_p \cap \mathfrak{N}_q)\,\mathrm{form}(B_1 \times B_2) = \mathrm{form}(B_1 \times B_2).$$

Если G/P монолитическая группа, то в силу теоремы 3.37 [2] группа G/P изоморфна одной из групп B_i, где $i \in \{1, 2\}$. Но тогда в силу теоремы 20.7 [2] нильпотентный дефект формации $\mathfrak{F}$ равен 2, что невозможно. Поэтому $G/P = B^1 \times B^2$, где $1 \neq B^i$ — прямое произведение изоморфных простых неабелевых групп B_i $(i = 1, 2)$, $B_1 \not\simeq B_2$. Таким образом, группа G удовлетворяет условию теоремы.

Достаточность. Пусть формация $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию 1) теоремы. Тогда по лемме 18.7 [2] формация $\mathfrak{F}$ имеет единственную максимальную насыщенную подформацию $\mathfrak{H}$, у которой имеется такой внутренний локальный экран h, что $h(p) = \mathrm{form}\,D$ и $h(q) = f(q)$ для любого простого числа $q \neq p$. Обозначим через $\mathfrak{L}$ насыщенную формацию порожденную группами B_1 и B_2. Тогда, очевидно, $\mathfrak{L} = l\,\mathrm{form}(\{B_1, B_2\}) = l\,\mathrm{form}\,B_1 \vee {}_l l\,\mathrm{form}\,B_2$. Покажем, что $\mathfrak{L} = \mathfrak{H}$. Действительно, по лемме 2 и теореме 8.3 [2] минимальный локальный экран l формации $\mathfrak{L}$ такой, что $l(q) = \mathrm{form}(\{B_1, B_2\})$, если $q \in \pi(B_1) \bigcap \pi(B_2)$, $l(q) = \mathrm{form}(B_i)$, если $q \in \pi(B_i) \setminus \pi(B_j)$ $(i \neq j)$ и $l(q) = \varnothing$, если $q \notin \pi(B_1) \bigcup \pi(B_2)$. Так как по условию теоремы $D = K_1 \times K_2$, где K_i — прямое произведение изоморфных простых неабелевых групп B_i $(i = 1, 2)$, причем $p, s \in \pi(B_1) \cap \pi(B_2)$, то $l(p) = h(p)$ и $l(q) = h(q)$ для любого $q \neq p$. Но тогда $l = h$. Последнее влечет $\mathfrak{L} = \mathfrak{H}$.

Пусть $\mathfrak{H}_i = l\,\mathrm{form}\,B_i$. Поскольку B_i — простая неабелева группа, то $d_{\mathfrak{N}}(\mathfrak{H}_i) = 1$. Так как при этом группы B_1 и B_2 неизоморфны, то $\mathfrak{H}_1 \bigcap \mathfrak{H}_2 \subseteq \mathfrak{N}$. Согласно лемме 1

$$d_{\mathfrak{N}}(\mathfrak{L}) = d_{\mathfrak{N}}(\mathfrak{H}_1) + d_{\mathfrak{N}}(\mathfrak{H}_2) - d_{\mathfrak{N}}(\mathfrak{H}_1 \bigcap \mathfrak{H}_2) = 1 + 1 - 0 = 2.$$

Но тогда $d_{\mathfrak{N}}(\mathfrak{F}) = 3$.

Пусть теперь $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию 2) теоремы. Тогда по лемме 19.4 [2] формация $\mathfrak{F}$ имеет единственную максимальную насыщенную подформацию $\mathfrak{M} = \mathrm{form}(\mathfrak{X})$, где $\mathfrak{X}$ такое множество групп, что $A \in \mathfrak{X}$ тогда и только тогда, когда A регулярное сплетение вида $R \wr (K_1 \times K_2)$, $|R| = r \in \pi(P)$. Пусть m — минимальный локальный экран формации $\mathfrak{M}$. Используя лемму 2 и теорему 8.3 [2] получим: $m(q) = \mathrm{form}(\{K_1 \times K_2\}) = \mathrm{form}(\{B_1, B_2\})$, если $q \in \pi(B_1) \bigcap \pi(B_2)$, $m(q) = \mathrm{form}(K_i) = \mathrm{form}(B_i)$, если $q \in \pi(B_i) \setminus \pi(B_j)$ $(i \neq j)$ и $m(q) = \varnothing$, если $q \notin \pi(B_1) \bigcup \pi(B_2)$. Но тогда по доказанному выше $d_{\mathfrak{N}}(\mathfrak{M}) = 2$. Следовательно, $d_{\mathfrak{N}}(\mathfrak{F}) = 3$. Теорема доказана.

Abstract

All considered groups are finite.

Let $\mathfrak{F}$ and $\mathfrak{H}$ be some saturated formations. A length of the lattice $\mathfrak{F}/_l\mathfrak{F}\cap\mathfrak{H}$ of saturated formations $\mathfrak{X}$ with $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}$ is called $\mathfrak{H}$-defect of a saturated formation $\mathfrak{F}$. We say that a saturated formation $\mathfrak{F}$ has $\mathfrak{H}$-level $l_{\mathfrak{H}}(\mathfrak{F})$ which is equal k if the following conditions are satisfied:

1) $\mathfrak{F}$ has an irreducible saturated subformation of the $\mathfrak{H}$-defect k;

2) $\mathfrak{F}$ has not an irreducible saturated subformation with $\mathfrak{H}$-defect $> k$.

If $\mathfrak{H}$ is a formation of all nilpotent groups $\mathfrak{N}$, then $\mathfrak{H}$-defect and $\mathfrak{H}$-level of the saturated formation $\mathfrak{F}$ are called respectively a nilpotent defect and a nilpotent level of $\mathfrak{F}$.

The classification problem of saturated formations with nilpotent defect 3 was discussed in the book by L.A.Shemetkov and A.N.Skiba "Formations of algebraic systems" Moscow. Nauka, 1989 (problem 20.9). In 1996 and in 1999 the author gave the solution of this problem in the class of all soluble groups and a classification of minimal saturated non-soluble formations with nilpotent defect 3 (Let $\mathfrak{S}$ be the formation of all soluble groups. A saturated formation $\mathfrak{F}$ is called a minimal saturated non-soluble formation, if $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{S}$ and each proper saturated subformation of $\mathfrak{F}$ belongs to $\mathfrak{S}$).

In this paper we prove the following theorem.

Theorem. *Let $\mathfrak{F}$ be a irreducible saturated formation, $\mathfrak{M}$ be a maximal saturated subformation of $\mathfrak{F}$, $l_{\mathfrak{N}}(\mathfrak{M}) = 1$, $\mathfrak{H} \not\subseteq \mathfrak{S}$ for each non-nilpotent saturated subformation $\mathfrak{H}$ from $\mathfrak{M}$. A nilpotent defect of $\mathfrak{F}$ equals 3 if and only if $\mathfrak{F} = l\,\mathrm{form}\,G$, where G is one of the following groups:*

1) *$G = [P]M$ where P is a self-centralizing minimal normal p-subgroup in G, $M = [S]D$, S is a self-centralizing minimal normal s-subgroup in M $(s \neq p)$, $D = K_1 \times K_2$ where K_i is a direct product of isomorphic non-abelian simple groups B_i $(i = 1, 2)$, $B_1 \not\simeq B_2$ and $p, s \in \pi(B_1) \bigcap \pi(B_2)$;*

2) *G is a monolitic group, $P = Soc(G)$ is non-abelian and $G/P = K_1 \times K_2$ where K_i is a direct product of isomorphic non-abelian simple groups B_i $(i = 1, 2)$, $B_1 \not\simeq B_2$ and $\pi(P) \subseteq \pi(B_1) \bigcap \pi(B_2)$.*

Литература

1. Шеметков Л.А. Формации конечных групп. — М.: Наука, 1978. — 267с.

2. Шеметков Л.А., Скиба А.Н. Формации алгебраических систем.— М.: Наука, 1989. — 253с.

3. Скиба А.Н. Алгебра формаций. — Мн.: Беларуская навука, 1997. — 240с.

4. Скиба А.Н., Таргонский Е.А. Классификация локальных формаций конечных групп с нильпотентным дефектом 2 // Математ. заметки. 1987. Т.41. № 4. С.490-499.

5. Сафонов В.Г. О разрешимых локальных формациях нильпотентного дефекта 3 // Весцi НАН Беларусi. Сер. фiз.-мат. навук. 1996. № 3. С. 8-12.

6. Сафонов В.Г. О локальных формациях нильпотентного дефекта 3 // Известия Гомельского госуниверситета. – 1999. № 1 (15). Вопросы алгебры. С. 78–84.

Гомельский государственный
университет им. Ф.Скорины

Поступило 12.03.04