навливаться только достаточно высокие пички со всеми отмеченными в [4] особенностями.

Исследование на устойчивость по методике [5] (гл. 3, 6) показывает, что среди решений системы (4), близких к порождающим решениям с одинаковым параметром ρ и различными χ, определяемыми из (13), всегда есть устойчивые. Мы ограничивались выше лишь отысканием порождающих решений. Следуя [5], можно построить и следующие приближения.

3. В рамках принятой модели режим регулярных пульсаций можно рассматривать как режим синхронизованных релаксационных пульсаций многих мод (лазерных осцилляторов). Как следует из (8), такая синхронизация может осуществляться как за счет установления определенных амплитуд пульсаций интенсивностей каждой из мод, так и за счет постоянных и периодических смещений частот мод [6]. Довольно очевидно, что спонтанные шумы и различного рода нестабильности [6, 7] будут препрепятствовать установлению периодических режимов, причем с тем большей эффективностью, чем больше период.

В настоящей работе использовалось предположение о слабой связи лазерных осцилляторов. В реальных лазерах перекрытие мод, а следовательно, и связь между ними могут быть значительными. Однако следует ожидать, что качественная картина и характер возможных решений окажутся такими же, как и в рассмотренном случае слабой связи.

В заключение пользуюсь случаем поблагодарить А. А. Мака, Н. Н. Розанова и Я. И. Ханина за полезные обсуждения.

Литература

[1] Н. Г. Басов, В. Н. Морозов, А. Н. Ораевский. ЖЭТФ, *49*, 895, 1965.
[2] Л. А. Островский. ЖЭТФ, *49*, 1535, 1965.
[3] Э. М. Беленов, В. Н. Морозов, А. Н. Ораевский, Тр. ФИАН, *52*, 236, 1970.
[4] Г. Н. Винокуров. Опт. и спектр., *31*, 472, 1971.
[5] И. Г. Малкин. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М., Гостехиздат, М., 1956.
[6] Г. Н. Винокуров, Н. М. Галактионова, В. Ф. Егорова, А. А. Мак, Б. М. Седов, Я. И. Ханин. ЖЭТФ, *60*, 489, 1971.
[7] Б. Л. Лившиц, ДАН СССР, *194*, 1298, 1970.

Поступило в Редакцию 12 марта 1971 г.

УДК 621.373 : 535

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ОТКРЫТЫХ РЕЗОНАТОРОВ, ЗАПОЛНЕННЫХ НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДОЙ

М. М. Попов

В заметке предлагается система интегральных уравнений для описания открытых резонаторов, заполненных неоднородной средой. Вывод ее опирается на параболическое уравнение, полученное на основе системы уравнений Максвелла. Полученные уравнения совпадают с уравнениями Фокса и Ли [1], если резонатор заполнен однородной средой.

В некоторых случаях неоднородная среда работает как фокусирующая линза, что проявляется в появлении на оси резонатора сопряженных точек. В заметке показано, что открытый резонатор, зеркала которого помещены в сопряженные точки, не имеет дифракционных потерь, если пренебречь аберрациями. Аналогичная ситуация возникает, если в резонатор, заполненный однородной средой, поместить тонкую линзу.

Рассмотрим двухзеркальный резонатор в среде с $\varepsilon(M)$, $\mu(M)$, M — точка внутри резонатора. Оптической осью резонатора является луч $\left[\text{т. е. отрезок экстремали функционала Ферми } \Phi = \int c^{-1}(M)\,d\sigma,\ c = (\varepsilon\mu)^{-1/2},\ d\sigma \text{ — элемент длины}\right]$, ортогональный к обоим зеркалам. Пусть уравнение оси есть $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$, где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор, s — длина дуги оси, $0 \leqslant s \leqslant s_1$, и уравнение поверхности зеркала S_j, $j = 1, 2$ имеет вид

$$n_j = D_{11}^{(j)}\zeta_{1j}^2 + 2D_{12}^{(j)}\zeta_{1j}\zeta_{2j} + D_{22}^{(j)}\zeta_{2j}^2 \equiv (D^{(j)}\zeta_j,\ \zeta_j), \tag{1}$$

где n_j — внутренняя (по отношению к резонатору) нормаль к зеркалу в точке пересечения его с осью, $\zeta_j = (\zeta_{1j}, \zeta_{2j})$ — ортогональные координаты в касательной плоскости. В окрестности оси введем ортогональные координаты s, $x_1 x_2$ формулой $\mathbf{r}_M = \mathbf{r}(s_M) + x_1 \mathbf{e}_1(s_M) + x_2 \mathbf{e}_2(s_M)$, где $\mathbf{r}_M$ — радиус-вектор точки M, s_M — координата точки пересечения с осью плоскости, перпендикулярной к оси и содержащей M, единичные векторы $\mathbf{e}_1(s_M)$ и $\mathbf{e}_2(s_M)$ ортогональны между собой и лежат в этой же плоскости (подробнее см. [2]). Поле в резонаторе должно удовлетворять стационарным уравнениям Максвелла [после выделения временного множителя $\exp(-i\omega t)$], условиям идеального отражения на зеркалах и ищется в виде волны $\mathbf{E}^{(+)}$, бегущей от первого зеркала ко второму, и $\mathbf{E}^{(-)}$, бегущей в обратном направлении.

В работе [3] показано, что при $\omega \to \infty$ с точностью до слагаемых порядка $\omega^{-1/2}$ поле $\mathbf{E}^{(\pm)} = \mathbf{\nu}\,(\varepsilon^{-1}(s, 0)\, c(s, 0))^{1/2} \exp(\pm i\omega\tau)\, V^{(\pm)}(s, x_1, x_2)$, где вектор поляризации $\mathbf{\nu} = \nu_1 \mathbf{e}_1(s) + \nu_2 \mathbf{e}_2(s)$,

ν_1, ν_2 — постоянные, $\varepsilon(s, 0)$, $c(s, 0)$ — функции, вычисленные на оси, $\tau = \int\limits_0^s c^{-1}(s, 0)\, ds$,

функции $V^{(\pm)}$ должны удовлетворять уравнениям

$$\frac{\pm i}{\omega} \frac{\partial}{\partial s} V^{(\pm)} = H V^{(\pm)}; \quad H = -\frac{c(s, 0)}{2\omega^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) + \frac{1}{2c(s, 0)} (K\mathbf{x}, \mathbf{x}), \tag{2}$$

где $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ и $K(s) = c^{-1}(s, 0) \left\| \frac{\partial^2 c}{\partial x_i \partial x_j} \Big|_{\mathbf{x}=0} \right\|$ — матрица второго порядка. Равенство нулю на зеркалах тангенциальной составляющей $\mathbf{E}$ приводит к условиям

$$\left.\begin{aligned} V^{(+)}(0, \zeta_1) + V^{(-)}(0, \zeta_1) \exp[-2i\omega c^{-1}(0, 0)(D^{(1)}\zeta_1, \zeta_1)] = 0, \\ V^{(-)}(s_1, \zeta_2) + V^{(+)}(s_1, \zeta_2) \exp\{2i\omega[\tau_1 - c^{-1}(s_1, 0)(D^{(2)}\zeta_2, \zeta_2)]\} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

где $\tau_1 = \int\limits_0^{s_1} c^{-1}(s, 0)\, ds$, причем $V^{(+)}(0, \zeta_1)$ и $V^{(-)}(s_1, \zeta_2)$ должны быть равны нулю на геометрическом продолжении соответственно первого и второго зеркала. Функции Грина $G^{(+)}$ и $G^{(-)}$ уравнений (2), полученные в работе [4], позволяют задачу (2), (3) заменить эквивалентной системой интегральных уравнений

$$\left.\begin{aligned} & V^{(+)}(0, \zeta_1) + \exp[-2i\omega c^{-1}(0, 0)(D^{(1)}\zeta_1, \zeta_1)] \iint\limits_{S_2} G^{(-)}(0, \zeta_1 \mid s_1, \zeta_2)\, V^{(-)}(s_1, \zeta_2)\, d\zeta_2 = 0, \\ & V^{(-)}(s_1, \zeta_2) + \exp\{2i\omega[\tau_1 - c^{-1}(s_1, 0)(D^{(2)}\zeta_2, \zeta_2)]\} \times \\ & \times \iint\limits_{S_1} G^{(+)}(s_1, \zeta_2 \mid 0, \zeta_1)\, V^{(+)}(0, \zeta_1)\, d\zeta_1 = 0, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

в которой

$$G^{(\pm)}(s, \mathbf{x} \mid \xi, \mathbf{y}) = \frac{-i\omega}{2\pi \sqrt{\det Q^{(\pm)}}} \exp\left\{ \frac{\pm i\omega}{2} [(\Gamma^{(\pm)}\mathbf{x}, \mathbf{x}) + 2(B^{(\pm)}\mathbf{x}, \mathbf{y}) + (A^{(\pm)}\mathbf{y}, \mathbf{y})] \right\}. \tag{5}$$

Матрицы второго порядка A, B, Γ зависят только от s и определяются формулами $\Gamma = PQ^{-1}$, $B = -Q^{-1}$, $A = Q^{-1}\tilde{Q}$, где каждая пара матриц P, Q и $\tilde{P}$, $\tilde{Q}$ удовлетворяет следующим уравнениям и начальным условиям:

$$\left.\begin{aligned} & \frac{d}{ds} Q = c(s, 0) P, \quad \frac{d}{ds} P = -c^{-1}(s, 0) KQ, \\ & Q(\xi) = \tilde{P}(\xi) = 0, \; P(\xi) = \tilde{Q}(\xi) = I, \; I = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Для однородной среды система (4) простой заменой искомых функций приводится к уравнениям Фокса и Ли. Отметим, что иногда (когда, например, $Q^{(+)}(s_1) = Q^{(-)}(0) = \lambda I$) уравнения (4) можно преобразовать к виду, который имеют интегральные уравнения для резонатора в однородной среде с некоторыми эффективными значениями параметров, и выразить потери резонатора в неоднородной среде через потери эквивалентного пустого резонатора.

Функция Грина (5) является обобщенной функцией не только при $s = \xi$, но и в сопряженных точках s^*, т. е. точках, где $\det Q(s^*) = 0$. Наличие сопряженных точек связано с фокусирующим действием неоднородной среды, в однородной среде их нет. Если зеркала помещены в сопряженные точки, то уравнения (4) упрощаются, а в некоторых случаях решаются точно.

Пример 1. Пусть ось резонатора прямая и скорость имеет вид[1] $c(s, \mathbf{x}) = 1 + \frac{1}{2}\varkappa^2(\mathbf{x}, \mathbf{x}) + O(\|\mathbf{x}\|^3)$, где $\varkappa$ — вещественная постоянная.[2] При этом $K = \varkappa^2 I$, из уравнений (6) получаем $Q^{(+)} = \varkappa^{-1} \sin \varkappa s I$ и, следовательно, имеются сопряженные точки $s_k^* = \varkappa^{-1}\pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Формула (5) дает известное [5] выражение для функции Грина. Подсчет показывает, что

$$\lim_{s \to s_1^* - 0} G^{(+)}(s, \mathbf{x} \mid 0, \mathbf{y}) = \lim_{s \to +0} G^{(-)}(s, \mathbf{x} \mid s_1^*, \mathbf{y}) = -\delta(\mathbf{x} + \mathbf{y}), \tag{7}$$

где $\delta(\mathbf{x})$ — δ — функция Дирака. Пусть зеркала резонатора помещены в сопряженные точки $s = 0$ и $s = s_1^*$, тогда уравнения (4) превращаются в однородную систему линейных алгебраических уравнений. Приравнивая нулю определитель этой системы, получаем два равенства $\omega_m = \varkappa m$, целое $m \geqslant 1$, и $D^{(1)} = -D^{(2)}$, из которых первое определяет собственные частоты резонатора, а второе выражает требование устойчивости резонатора по первому приближению и означает, что зеркала должны иметь попарно одинаковые главные радиусы кривизны, главные направления кривизны попарно лежат в одной плоскости, причем зеркала должны быть выпуклыми в одну и ту же сторону. Собственные функции имеют вид

$$V_m^{(+)}(0, \zeta) = U(\zeta); \quad V_m^{(-)}(s_1^*, \zeta) = -U(-\zeta) \exp[-2i\omega_m (D^{(2)}\zeta, \zeta)], \tag{8}$$

где $U(\zeta)$ — произвольная функция, равная нулю вне общей части зеркал, получаемой проектированием одного зеркала на другое параллельно оси резонатора. Отсутствие дифракционных потерь в рассматриваемом открытом резонаторе можно пояснить следующим образом. Параксиальные лучи в резонаторе описываются как решения гамильтоновой системы уравнений (6) с функцией Гамильтона $H(s, q, p) = 2^{-1}[c(s, 0)\mathbf{p}^2 + c^{-1}(s, 0)(K\mathbf{q}, \mathbf{q})]$. Неоднородная среда работает, как фокусирующая линза, у которой плоскости $s = 0$ и $s = s_1^*$ сопряженные. Поэтому объект в плоскости $s = 0$ изображается на плоскости $s = s_1^*$ без потерь, если пренебречь аберрациями, но они и не учитываются в методе параболического уравнения. Математической основой этой интерпретации является то, что уравнение (2) есть «нестационарное» уравнение Шредингера, порождаемое функцией Гамильтона $H(s, q, p)$, соответствующей параксиальной геометрической оптике.

Пример 2. Аналогичный результат получается для резонатора в однородной среде, если в нем поместить линзу. Пусть в точке $s = s_1$ на оси резонатора (для простоты рассматривается двухмерный случай) помещена линза с фокусным расстоянием F, апертура которой много больше размеров зеркал. Линзу будем описывать как фазовый корректор, т. е. если $\psi_1(s_1 - 0, x)$ и $\psi_2(s_1 + 0, x)$ поле соответственно на левой и правой поверхности линзы, то $\psi_2(s_1 + 0, x) = \psi_1(s_1 - 0, x)\exp\left(-\frac{i\omega x^2}{2F}\right)$. Функция $\tilde{G}^{(+)}(s, x \mid 0, y)$, описывающая воздействие при $s > s_1$ точечного источника, помещенного в точке $s = 0$, $x = y$, имеет вид

$$\tilde{G}^{(+)} = \int_{-\infty}^{+\infty} G^{(+)}(s, x \mid s_1, \xi) \exp\left(-\frac{i\omega\xi^2}{2F}\right) G^{(+)}(s_1, \xi \mid 0, y)\, d\xi, \tag{9}$$

где $G^{(+)}(s, x \mid s_1, \xi)$ — функция Грина двухмерного уравнения (2) в однородной среде ($c \equiv 1$, $K \equiv 0$). Вычисляя интеграл (9), получаем, что при $s > s_1$ возникает точка s^*, сопряженная $s = 0$, определяемая из уравнения тонкой линзы $s_1^{-1} + (s^* - s_1)^{-1} = F^{-1}$. Подсчет показывает, что

$$\lim_{s \to s^* - 0} \tilde{G}^{(+)}(s, x \mid 0, y) = \sqrt{\frac{s_1}{s^* - s_1}} \exp\left(\frac{i\omega}{2}\frac{s^* x^2}{(s^* - s_1)^2} - i\frac{\pi}{2}\right)\delta\left(\frac{s_1}{s^* - s_1}x + y\right). \tag{10}$$

Аналогично строится $\tilde{G}^{(-)}$ для сопряженного параболического уравнения, причем

$$\lim_{s \to +0} \tilde{G}^{(-)}(s, x \mid s^*, y) = \sqrt{\frac{s^* - s_1}{s_1}} \exp\left(\frac{i\omega}{2}\frac{s^* x^2}{s_1^2} - i\frac{\pi}{2}\right)\delta\left(\frac{s^* - s_1}{s_1}x + y\right). \tag{11}$$

Если зеркала поместить в точки $s = 0$ и $s = s^*$, то интегральные уравнения (4) ввиду формул (10), (11) превращаются в систему линейных алгебраических уравнений. Собственные частоты такого резонатора вещественны (нет дифракционных потерь), собственные функции содержат произвольную функцию, как и в предыдущем примере. Условие устойчивости резонатора по первому приближению имеет вид $s_1{}^2/R_1 + (s^* - s_1)^2/R_2 = s^*$, где R_1 и R_2 — радиусы кривизны соответственно первого и второго зеркал.

---

[1] Напомним, что в методе параболического уравнения в разложении скорости в ряд Тейлора отбрасываются все члены, содержащие x_1, x_2 в степени $k \geqslant 3$.

[2] См. также [6].

Изложенные в примерах результаты могут быть использованы в линзовых лучеводах.

В заключение заметим, что интегральные уравнения (4) можно обобщить на случай многозеркальных резонаторов.

Автор благодарен В. С. Булдыреву за обсуждение работы.

Литература

[1] A. G. Fox, T. Li. Proc. IEEE, *51*, 1, 1963.
[2] М. М. Попов. Вестн. ЛГУ, № 22, вып. 4, 42, 1969.
[3] Т. Ф. Панкратова. Записки научных семинаров ЛОМИ АН СССР, *15*, 122. Изд. «Наука», Л., 1969.
[4] М. М. Попов. Сб. «Проблемы мат. физики», в. 6. Изд. ЛГУ, 1971.
[5] Л. А. Вайнштейн. ЖЭТФ, *45*, 684, 1963.
[6] В. С. Булдырев. Докт. дисс. ЛГУ, 1969.

Поступило в Редакцию 15 марта 1971 г.

УДК 535.371

БАТОХРОМНАЯ ЛЮМИНЕСЦЕНЦИЯ ОРГАНИЧЕСКИХ КРАСИТЕЛЕЙ В СПИРТОВЫХ РАСТВОРАХ И ПОЛИМЕРНЫХ МАТРИЦАХ

В. И. Томин и *А. Н. Рубинов*

Как известно, спектральные характеристики сложных молекул в полярных растворах существенно зависят от ориентационных взаимодействий с растворителем [1]. Ориентационные явления обусловливают, в частности, смещение спектра люминесценции в коротковолновую область, наблюдавшееся для ряда веществ при понижении температуры раствора [1–3]. В работах [4–6] было показано, что полярные растворы органических красителей следует описывать моделью элементарной ячейки раствора с учетом распределения ячеек по энергиям ориентационного взаимодействия молекул в ячейке. Такой подход позволил получить новую информацию о свойствах полярных растворов. В частности, удалось объяснить [5, 6] причины нарушения универсального соотношения Степанова для спектров поглощения и люминесценции сложных молекул при низких температурах, а также предсказать и обнаружить [4] характерную зависимость спектра люминесценции красителя от частоты возбуждающего света. Эта зависимость заключается в красном смещении спектра люминесценции при возбуждении красителя в области длинноволнового склона полосы поглощения и проявляется, когда время жизни молекулы красителя в возбужденном состоянии τ^* больше времени ориентационной релаксации среды τ_p(люминесценция, сдвинутая в красную область, названа батохромной люминесценцией [4]).

В работе [4] и несколько позднее в [7] сообщалось о наблюдении батохромной люминесценции в замороженных глицериновых растворах производных фталимида. В данном сообщении представлены новые экспериментальные данные, которые подтверждают существование люминесценции не только для растворов фталимидов, но и для красителей других химических классов (кумарины, полиметиновые красители) в различных растворителях, в том числе и в полимерных матрицах. Регистрация спектров люминесценции производилась фотоэлектрическим способом. Возбуждение осуществлялось через монохроматор; ширина линии возбуждения составляла 5 нм. Концентрация молекул красителя в растворе 10^{-7} моль/л. В условиях записи спектров люминесценции собственное свечение растворителей в области люминесценции отсутствовало. Для растворов органических красителей, в которых ориентационные взаимодействия слабы (родамин 6Ж в различных растворителях, 3-аминофталимид в неполярных растворителях типа бензола), батохромная люминесценция в пределах точности эксперимента не зарегистрирована.

Из анализа, выполненного в работах [4–6], следует, что в жидких растворах красителей батохромная люминесценция может наблюдаться лишь при низких температурах, а в твердых полимерных растворах — при комнатных. Этот вывод подтверждается экспериментальными измерениями.

В таблице приведены названия красителей и растворителей, а также частоты максимумов полос поглощения, обычной люминесценции при низкой и комнатной темпера-