Известия Гомельского государственного университета
имени Ф.Скорины, 5(32), 2005

УДК 531.36:62–50

Стабилизация линейных динамических систем с помощью позиционных решений линейно-негладких задач с ограничениями

А. В. Лубочкин

Введение

Работа посвящена одной из центральных проблем теории управления — проблеме стабилизации динамических систем. В ней используется подход [1, 2], реализующий новый принцип управления — управление в режиме реального времени. Этот подход позволяет не задавать заранее обратные связи, а искать их с помощью специальных задач оптимального управления (которые, кроме устойчивости, обеспечивают движению замкнутой системы дополнительные полезные свойства), автоматически учитывать ограничения на управления (характерные для современных постановок задач стабилизации), вычислять значения стабилизирующих обратных связей по мере реализации процесса управления в режиме реального времени.

В [2] в качестве ограниченной стабилизирующей обратной связи предложено использовать позиционное решение линейных задач оптимального управления с ограничениями [1]. В данной работе с этой целью используется оптимальная обратная связь специальных линейно-негладких задач. В [3] такие вспомогательные линейно-негладкие задачи рассматривались в предельном для них классе кусочно-постоянных управлений, и решение задачи стабилизации сводилось к решению (корректировке решения) методом Ньютона системы специальных (конечных) определяющих уравнений вдоль реализующихся траекторий динамических систем. Однако нетрудно привести примеры (например, линеаризованная около верхнего неустойчивого положения равновесия модель математического маятника), в которых с течением процесса управления число точек переключения управления может стать меньшим размеров системы. В этом случае матрица Якоби системы определяющих уравнений становится вырожденной, метод решения из [3] — невозможным.

В данной работе предлагается другой, более надежный, способ решения вспомогательных задач оптимального управления. Эти задачи рассматриваются в более узком классе кусочно-постоянных функций с постоянным периодом квантования. Тогда решение задачи стабилизации сводится к коррекции двойственным методом оптимальных планов близких задач кусочно-линейного программирования, возникающих вдоль реализующейся траектории динамической системы.

1. Постановка задачи

Рассмотрим объект управления, поведение которого на промежутке $t \geqslant 0$ описывается уравнением

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad x(0) = x_0 \neq 0 \quad \left(x \in R^n,\ u \in R;\ \operatorname{rank}(b, Ab, \ldots, A^{n-1}b) = n\right). \tag{1}$$

Будем считать, что при выключенном управлении ($u(t) \equiv 0$, $t \geq 0$) система неустойчива.

Следуя [3], определим основное понятие. Пусть $G \subset R^n$ — некоторая окрестность неустойчивого состояния равновесия $x = 0$ системы (1); L, $0 < L < \infty$ — заданное число. Функцию $u(x)$, $x \in G$ ($u(0) = 0$), назовем ограниченной стабилизирующей обратной связью для динамической системы (1), если: 1) функция $u(x)$, $x \in G$, удовлетворяет геометрическому ограничению $|u(x)| \leqslant L$, $x \in G$; 2) замкнутая система

$$\dot{x} = Ax + bu(x), \quad x(0) = x_0, \tag{2}$$

имеет решение $x(t)$, $t \geqslant 0$, для всех $x_0 \in G$; 3) система (2) асимптотически устойчива в G.

Для построения искомой стабилизирующей обратной связи будем использовать позиционное решение специальной задачи оптимального управления.

2. Сопровождающая задача оптимального управления и стабилизатор

Выберем параметры метода: θ, $0 < \theta < \infty$, целое число $N > 1$, подсчитаем $h = \theta/N$. В классе кусочно-постоянных функций с периодом квантования h:

$$u(t) \equiv u_i = \text{const}, \quad t \in [ih, (i+1)h[, \quad i = \overline{0, N-1}, \tag{3}$$

рассмотрим следующую линейно-негладкую задачу оптимального управления

$$V(z) = \min \int_0^\theta |u(t)|\, dt,\ \dot{x} = Ax + bu,\ x(0) = z,\ x(\theta) = 0,\ |u(t)| \leqslant L,\ t \in T = [0, \theta]. \tag{4}$$

Оптимальное программное управление $u^0(t) = u^0(t\,|\,z)$, $t \in T$, задачи (1) и соответствующая ему траектория $x^0(t) = x^0(t\,|\,z)$, $t \in T$, определяются традиционно.

Функцию

$$u^0(z) = u^0(0\,|\,z), \quad z \in G, \tag{5}$$

назовем оптимальным стартовым управлением типа обратной связи. Функцию (5), подсчитываемую вдоль реализующейся траектории $x^*(t)$, $t \geqslant 0$, динамической системы ($z = x^*(t)$, $t \geqslant 0$), и предлагается использовать в качестве стабилизирующей обратной связи, определенной выше. Стабилизирующее свойство обратной связи (5) доказывается аналогично [3].

Следуя [3], вводятся понятия реализации оптимального управления типа обратной связи, соответствующей начальному состоянию $x(0) = x_0^* \in G$:

$$u^*(t) = u^0(x^*(t)), \quad t \geqslant 0, \tag{6}$$

его дискретной реализации и h-реализации, понятие стабилизатора — любого устройства, способного для каждого фиксированного достаточно малого числа $h > 0$ в режиме реального времени вычислять значения h-реализации.

Согласно (5), (6), для коррекции обратной связи (6) необходимо построить оптимальное программное управление очередной задачи (1) при $z = x^*(\tau_k)$, считая, что оптимальное управление задачи (1) при $z = x^*(\tau_{k-1})$ уже построено. При этом задачи (1) вдоль реализующейся траектории динамической системы будем рассматривать в классе функций (3).

3. Конечномерные задачи и алгоритм работы стабилизатора

В классе функций (3) задача (1) вдоль реализующейся траектории динамической системы $x^*(t)$, $t \geqslant 0$, в моменты коррекции управления $\tau_k = kh$, $k = 1, 2, \ldots$, примет следующую эквивалентную форму

$$\sum_{i=0}^{N-1} |u_i| \to \min, \quad \sum_{i=0}^{N-1} u_i \int_{ih}^{(i+1)h} h(t)\, dt = \tilde{g}, \quad |u_i| \leqslant L, \quad i = \overline{0, N-1}, \tag{7}$$

где $h(t) = F(Nh - t)b$, $\bar{g} = -F(Nh)z$, $z = x^*(kh)$; $\dot{F} = AF$, $F(0) = E$.

Задачи (7) для двух соседних моментов коррекции управления τ_{k-1} и τ_k мало отличаются друг от друга (у них разные правые части ограничений-равенств), и это отличие тем меньше, чем меньше шаг квантования h. Поэтому для коррекции оптимальных планов близких кусочно-линейных задач (7) естественно использовать двойственный метод. Двойственный метод можно также использовать и для полного решения начальной задачи (7) при $z = x_0$.

Алгоритм работы стабилизатора заключается в следующем. При $t \in [0, h[$, $h > 0$, стабилизатор использует решение задачи (1) (задачи (7)) при $z = x_0$ (это решение можно построить заранее, до включения стабилизатора): $u^*(t) \equiv u^0(t \,|\, x_0) = u_0^0$, $t \in [0, h[$ (u_0^0 — первая компонента оптимального плана $u^0 \in R^N$ задачи (7) при $z = x_0$). Алгоритм работы стабилизатора при $t \geqslant h$ складывается для каждого $[kh, (k+1)h[$, $k = 1, 2, \ldots$, из следующих операций: 1) по известному текущему состоянию $x^*(kh)$ стабилизатор строит двойственным методом оптимальный план задачи (7) при $z = x^*(kh)$, используя в качестве начального приближения оптимальный план задачи (7) при $z = x^*((k-1)h)$; 2) на промежутке $[kh, (k+1)h[$ стабилизатор использует управление $u^*(t) \equiv u^0(t - kh \,|\, x^*(kh)) = u_0^0$, $t \in [kh, (k+1)h[$ (u_0^0 — первая компонента оптимального плана $u^0 \in R^N$ задачи (7) при $z = x^*(kh)$).

Поскольку количество операций, которые выполняются на каждом шаге работы стабилизатора, нетрудно оценить, и ряд из этих операций можно выполнять параллельно, то для каждой конкретной системы можно подобрать такие микропроцессорные устройства, с помощью которых можно реализовать стабилизатор в режиме реального времени. С другой стороны, для каждого микропроцессора можно указать порядок систем, для которых реализуем такой же режим.

Abstract. A linear dynamical systems stabilization by restricted feedbacks use has been considered. A feedback optimal control realization of special linear-unsmooth problems with restrictions has been suggested for solution of this problem. The suggested stabilizers can be realized on modern computers in real-time mode.

Литература

1. Р. Габасов, Ф. М. Кириллова, О. И. Костюкова, *Оптимизация линейной системы управления в режиме реального времени*, Изв. РАН. Техн. кибернетика, № 4 (1992).

2. Р. Габасов, Ф. М. Кириллова, О. И. Костюкова, *К методам стабилизации динамических систем*, Изв. РАН. Техн. кибернетика, № 3 (1994).

3. А. В. Лубочкин, *Стабилизация линейных динамических систем оптимальными управлениями линейно-негладких задач*, Известия ГГУ им. Ф. Скорины, Гомель, № 4(25) (2004).

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступило 01.09.05