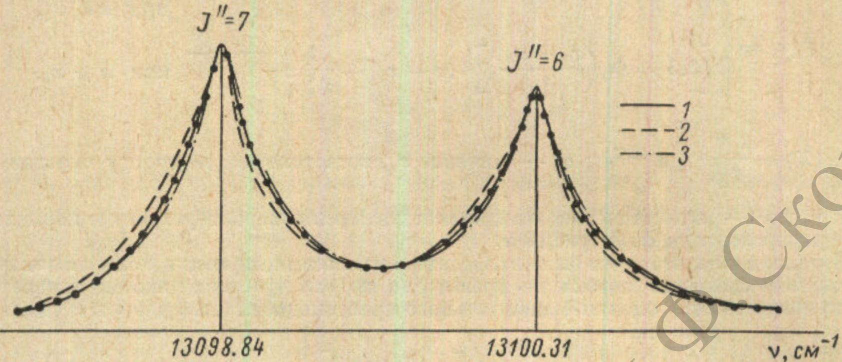
делах погрешностей измерений не зависят от вращательного квантового числа. Относительный сдвиг в единицах полуширины γ составляет [1]

$$\beta_{O_2-O_2} = \frac{|\overline{\Delta\nu}_{O_2-O_2}|}{\gamma_{O_2-O_2}} \approx \frac{1}{20},$$

что вдвое меньше аналогичного значения для смеси 20% O_2 + 80% N_2

$$\beta_{O_2-N_2} \simeq \frac{1}{10}$$



Профили линий дублета 13100.81 см$^{-1}$, 13098.84 см$^{-1}$ ($J''=6$ и 7 соответственно) при $p_2=10$ атм., $T=293°$ K.

Кружки — эксперимент, *1* — $\beta=1/20$, *2* — $\beta=1/10$, *3* — $\beta=0$.

($\overline{\Delta\nu}_{O_2-N_2} \simeq -0.0078 \pm 0.002$ см$^{-1}$/атм.) и примерно в 7 раз меньше предсказанного классической теорией Линдхольма $\beta_1 \approx 1/2.8$ для вандерваальсова взаимодействия (см. рисунок).

Авторы признательны В. В. Фомину, обратившему внимание на то, что соотношение $\overline{\Delta\nu}_{O_2-O_2} < \overline{\Delta\nu}_{O_2-N_2}$ может быть связано с практически равными вероятностями смещения энергетических уровней поглощающей молекулы вверх и вниз при соударении одинаковых молекул.

Авторы благодарны также студенткам Р. И. Козловой и И. С. Загика за участие в измерениях.

Литература

[1] Т. Г. Адикс, В. И. Дианов-Клоков. Опт. и спектр., *30*, 205, 1971.

[2] Т. Г. Адикс, В. И. Дианов-Клоков. Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана, *4*, № 10, 1968.

Поступило в Редакцию 11 июня 1971 г.

УДК 535.24

ОБ ОЦЕНКЕ ПАРАМЕТРОВ НОРМАЛЬНОГО ЗАКОНА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СПЕКТРАЛЬНЫХ ЯРКОСТЕЙ ПО ЦЕНЗУРИРОВАННЫМ ДАННЫМ

А. А. Яковлев

В практике спектрофотометрических измерений объектов переменной яркости часто возникает такая ситуация, когда некоторая часть совокупности измеряемых световых потоков оказывается вне пределов чувствительности аппаратуры. В этом случае на основании результатов измерений сигналов, лежащих в пределах чувствительности прибора, и с учетом числа случаев наблюдения малых (или больших) световых потоков

[1] Значения γ взяты из работы [2].

(числа цензурированных данных) все же возможно получение оценок, например, таких статистических параметров, характеризующих исследуемый объект, как средние значения, дисперсии и спектральные коэффициенты корреляции. В настоящей работе предлагаются простые приближенные формулы для получения несмещенных оценок указанных параметров при нормальном законе распределения измеряемых сигналов.

Рассмотрим сначала оценивание среднего и дисперсии при условии, что флуктуации измеряемого параметра подчиняются нормальному закону распределения.[1] Если световой поток не превышает некоторого фиксированного уровня (порога чувствительности прибора), то для удобства дальнейших расчетов ему будем приписывать значение, соответствующее этому уровню.

Тогда плотность вероятности измеряемого параметра x можно определить следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < x_1, \\ \left[0.5 + \Phi_0\left(\frac{x_1 - x_0}{\sigma}\right)\right]\delta(x - x_1) + \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}} & \text{при } x \geqslant x_1, \end{cases} \tag{1}$$

где $\Phi_0(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t^2/2} dt$; x_1 — значение x, соответствующее порогу чувствительности; x_0 и σ^2 — математическое ожидание и дисперсия, характеризующие нормальный закон распределения флуктуаций x.

Предположим, что всего было проведено n измерений, причем в k случаях значение измеряемого светового потока не превышало порога чувствительности аппаратуры. Можно показать, что оценки максимального правдоподобия $\hat{\sigma}$ и $\hat{x}$ для σ и x удовлетворяют системе уравнений

$$\left.\begin{aligned} &\hat{\sigma}^2\left(1 - \frac{k}{n}\right) + \hat{\sigma}(x_1 - \hat{x})\frac{k}{n}\frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(x_1 - \hat{x})^2}{2\hat{\sigma}^2}\right]}{0.5 + \Phi_0\left(\frac{x_1 - \hat{x}}{\hat{\sigma}}\right)} - \frac{1}{n}\sum_{i=k+1}^{n}(x_i - \hat{x})^2 = 0, \\ &\frac{k}{n}\hat{\sigma}\frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(x_1 - \hat{x})^2}{2\hat{\sigma}^2}\right]}{0.5 + \Phi_0\left(\frac{x_1 - \hat{x}}{\hat{\sigma}}\right)} - \frac{1}{n}\sum_{i=k+1}^{n}(x_i - \hat{x}) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

В частном случае при $(x_0 - x_1) \to \infty$ (т. е. в отсутствие цензурирования) эти уравнения приводят к известным формулам (1) для оценок максимального правдоподобия параметров нормального распределения σ и x_0.

Очевидно, что расчет оценок $\hat{\sigma}$ и $\hat{x}$ по формулам (2) при частом использовании затруднителен.[2] Кроме того, формулы (2) приводят к смещенным оценкам среднего и дисперсии. Мы проследили связь степени цензурирования выборки k/n, являющейся несмещенной оценкой степени цензурирования, со средним значением и дисперсией величины x. Нетрудно показать, что, используя выборочные характеристики $\bar{x}$ и $\bar{\sigma}^2$, определения которых приводятся ниже, и оценку степени цензурирования k/n, можно получить следующие простые приближенные оценки σ^* и x^* дисперсии и среднего значения величины x

$$(\sigma^*)^2 = \overline{\sigma^2} \Big/ \left[\left(1 - \frac{k}{n}\right)^2 \left(1 + 2\frac{k^2}{n^2}\right)\right], \tag{3}$$

$$x^* = \bar{x} - \sigma^* \frac{k}{n}\left(\frac{1}{3} + \frac{k}{n}\right), \tag{4}$$

где

$$\overline{\sigma^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2, \tag{5}$$

---

[1] Если флуктуации принимаемого светового потока не подчиняются нормальному распределению, то часто можно получить нормальное распределение подходящим преобразованием принимаемого сигнала, например логарифмированием. Соответствие распределения выборки нормальному закону можно затем проверить, скажем, по критерию согласия хи-квадрат [1], используя для расчета полученные приближенные оценки параметров нормального распределения.

[2] Гальпериным [2] были получены выражения оценок максимального правдоподобия $\hat{\sigma}$ и $\hat{x}$ через первые и вторые моменты выборочного распределения и некоторый параметр h, являющийся решением нелинейного уравнения, коэффициенты которого зависят от моментов выборки, что, по-видимому, не облегчает задачу расчета оценок.

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i.\text{[3]} \qquad (6)$$

Численные расчеты показали, что смещение оценки (3) не превосходит 10% при цензурировании до 80% данных, смещение же оценки (4) составляет не более 0.06 σ при степени цензурирования до 0.8.[4]

Можно показать, что с погрешностью не более 10% аналогичная оценка для ковариации K_{xy} двух нормально распределенных величин x и y равна

$$K_{xy}^{*} = \bar{K}_{xy} \Big/ \left[\left(1 - \frac{k_x}{n}\right)\left(1 - \frac{k_y}{n}\right)\left(1 + 2\frac{k_x^2}{n^2}\right)^{1/2}\left(1 + 2\frac{k_y^2}{n^2}\right)^{1/2}\right], \qquad (7)$$

где

$$\bar{K}_{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}). \qquad (8)$$

Если, например, $k_y = 0$, то оценка (7) является несмещенной. Отметим, что определение оценки K_{xy} по методу максимального правдоподобия требует уже решения системы пяти нелинейных уравнений с пятью неизвестными $\hat{x}$, $\hat{\sigma}_x$, $\hat{y}$, $\hat{\sigma}_y$ и $\hat{K}_{xy}$, причем оценка получается смещенной.

Отметим, что все указанные выше оценки можно использовать и в случае, если диапазон чувствительности прибора ограничен не снизу, а сверху. Для этого достаточно изменить знак после $\bar{x}$ в формуле (4).

Таким образом, формулы (3), (4) и (7) позволяют легко оценить с практически достаточной точностью неизвестные истинные среднее и дисперсию нормально распределенной величины x лишь по измерениям выбросов x за порог чувствительности, что позволяет, например, использовать спектрофотометрический прибор для определения средней энергии излучения объекта переменной яркости и в том случае, когда это среднее значение лежит за пределами диапазона чувствительности прибора.

Литература

[1] Д. Худсон. Статистика для физиков. М., 1970.
[2] M. Halperin. Ann. Math. Statist., *23*, 226, 1952.

Поступило в Редакцию 9 июня 1971 г.

УДК 535.824.3

СОЗДАНИЕ СВЕТОДИОДОВ НА ОСНОВЕ АНТИСТОКСОВЫХ ЛЮМИНОФОРОВ И ПОЛУПРОВОДНИКОВЫХ ИСТОЧНИКОВ ИК ИЗЛУЧЕНИЯ

Э. Я. Арапова, Н. В. Барышников, Э. П. Бочкарев, И. К. Броштейн, Л. Д. Либов, Н. В. Митрофанова, Ю. П. Тимофеев, М. В. Фок, С. А. Фридман, А. А. Шленский и *В. В. Щаенко*

В 1966 г. Овсянкин и Феофилов [1] обнаружили явление кооперативной сенсибилизированной люминесценции, позволяющее, вопреки закону Стокса, непосредственно преобразовать инфракрасное (ИК) излучение в видимое. При этом два возбужденных атома сенсибилизатора в едином акте передают энергию одному атому другого активатора, испускающему квант видимого света. В некоторых работах [2] аналогичный эффект объясняют переносом энергии от одного атома сенсибилизатора, сопровождающимся ступенчатым возбуждением излучающего атома.

В 1968 г. фирмами General Electric и Bell Telephone [3-5] синтезированы антистоксовы люминофоры, позволяющие создать на основе ИК диодов из Ga—As с люминес-

---

[3] Напомним, что k значений x_i соответствуют пределу чувствительности.

[4] Заметим, что использование, например, $\bar{\sigma}^2$ в качестве оценки σ^2 приводит к десятикратной ошибке при $k/n = 0.8$, использование же медианы выборки в качестве несмещенной оценки для среднего значения невозможно при $k/n \geqslant 0.5$.