Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, №5(32), 2005

УДК 681.3: 519.68

Математические основы логико-вероятностного моделирования

Е. И. Сукач

Довольно часто сложная система (СС) состоит из множества компонентов, взаимодействие между которыми формализовано недостаточно и носит вероятностный характер. Для исследования таких систем используют различные математические методы, в том числе и аналитические методы логико-вероятностного моделированиях [1]. В таких случаях для записи правил функционирования системы используются логические функции, а для определения характеристик системы разрабатываются строгие правила перехода от логических к вероятностным функциям. Логико-вероятностные методы позволяют проводить анализ влияния любого компонента на поведение всей системы. Общими недостатками этих методов являются следующие:

- рассмотрение лишь двух состояний у компонентов системы;
- отсутствие учета временной последовательности изменения состояний компонентов;
- требование независимости изменения состояний компонентов системы.

Развитием этих методов, снимающих их ограничения, является разработка метода логико-вероятностного моделирования, средств его реализации, ориентированных на разработку моделей СС, и специальной методики моделирования СС, основанной на использовании этих средств и сочетающей в себе достоинства аналитических и имитационных методов [2]. В настоящей работе излагаются принципы и математические основы метода логико-вероятностного моделирования, указываются возможности компьютерной системы логико-вероятностного моделирования СС, позволяющей наблюдать за развитием модели СС во времени и получать точные вероятностные характеристики компонентов системы.

Каждому элементарному компоненту системы при переходе к её логико-вероятностному описанию ставится в соответствие устройство *Y*. Состояния каждого устройства, определяются множеством $S = \{S_j\}$, $j=1,...,n$. Каждое из состояний S_j задаётся множеством значений параметров компонента системы.

Будем говорить, что устройство Y_3 является композицией устройств Y_1 и Y_2 . $Y_3 = Y_1 * Y_2$, если задано отображение *F*, ставящее в соответствие элементу из множества $S \times S$ элемент из S . Таким образом, по состоянию S_i устройства Y_1 и состоянию S_j устройства Y_2 однозначно определяется состояние S_k устройства Y_3 , $k=F(i,j)$.

Вероятности нахождения устройства *Y* в каждом из состояний S_j определяются вектором $P = (P_1, P_2, ..., P_n)$, причём:

$$\sum_{j=1}^{n} P_j = 1 \tag{1}$$

Отображение F однозначно определяет вероятность состояний результирующего устройства по вероятностям состояний исходных устройств:

$$P_k^3 = \sum_{k=F(i,j)} P_i^1 \cdot P_j^2 \tag{2}$$

Или сокращенно $P^3 = P^1 * P^2$. Вектора P образуют линейное n-мерное пространство R^n с обычными операциями сложения и умножения на вещественное число. Введённая на нём операция * умножения элементов порождает алгебру U_F, поскольку операция умножения элементов линейна и удовлетворяет свойствам дистрибутивности:

$$P^1*(\alpha\cdot P^2+\beta\cdot P^3) = \alpha\cdot P^1*P^2+\beta\cdot P^1*P^3,$$
$$(\alpha\cdot P^2+\beta\cdot P^3)*P^1 = \alpha\cdot P^2*P^1+\beta\cdot P^3*P^1,$$

где α и β – вещественные числа, P^1, P^2, P^3 – элементы алгебры U_F.

Вектора σ^1 =(1,0,0,0,…,0), σ^2 =(0,1,0,0,…,0), … образуют базис алгебры U_F, причем результатом произведения базисных векторов σ^i и σ^j является базисный вектор $\sigma^{F(i,j)}$. На основе этого замечания, а также ввиду свойств линейности и дистрибутивности операции умножения справедливы следующие леммы.

Лемма 1. *Если функция F коммутативна, то алгебра U_F является коммутативной, то есть для любых двух её элементов P^1 и P^2 выполняется $P^1 * P^2 = P^2 * P^1$.*

Лемма 2. *Если функция F ассоциативна, то алгебра U_F является ассоциативной, то есть для любых трёх её элементов P^1, P^2 и P^3 выполняется $P^1 *(P^2 *P^3)= (P^1 * P^2)*P^3$.*

Лемма 3. *Если компоненты векторов P^1 и P^2 являются положительными и нормированными (1), то вектор $P^3 = P^1 *P^2$ также обладает этими свойствами.*

В качестве примеров рассмотрим некоторые функции *F*, задающие отображения. Если *F(i,j) = max(i,j)*, то получаемая в этом случае в соответствии с (2) операция $\wedge$ имеет естественную интерпретацию при решении задач надёжности СС. Отказ устройства $Y_3=Y_1\wedge Y_2$ определяется отказом одного из устройств (последовательное соединение) и его состояние определяется состоянием наименее надёжного устройства. Так как в данном случае отображение F ассоциативно и коммутативно, то и алгебра $U\wedge$ обладает этими свойствами. Вектор σ^n (устройство находится в состоянии n – неисправно) является единицей алгебры $U\wedge$, так как $\sigma^n *P = \sigma^n$ для любого P. Для отображения *F(i,j) = min(i j)* получаемая операция $\vee$ также имеет естественную интерпретацию. Отказ устройства $Y_3=Y_1\vee Y_2$ происходит в результате отказа обоих устройств Y_1 и Y_2 (параллельное соединение, резервирование), и его состояние определяется состоянием наиболее надежного устройства. В этом случае единицей является вектор σ^1 . Алгебра $U\vee$ также является ассоциативной и коммутативной. Для *F(i,j) = min(i+j-1, n)* состояние результирующего устройства определяется суммой состояний исходных устройств. В этом случае *F(i,j)* и соответственно алгебра U_F являются коммутативными, но не ассоциативными.

Таким образом, при логико-вероятностном описании СС возможно использование различных функций *F(i,j)*, позволяющих формализовать взаимосвязи между компонентами системы и получить вероятностное описание характеристик всей системы на основе вероятностных характеристик составляющих её компонентов в заданные моменты времени.

Применение компьютерной системы логико-вероятностного моделирования значительно ускоряет получение вероятностных значений характеристик СС. Кроме этого, оно позволяет проводить эксперименты с моделью с целью оптимизации и поиска экстремальных (критических) значений. Для определённой структуры модели СС возможно задание в форме предикатов управляющих правил, включающих следующую информацию:

- изменение структуры модели в зависимости от её состояния в заданные моменты времени;
- изменение режима работы модели (в частности, изменение типа рабочей нагрузки) в зависимости от её текущего состояния;
- изменение состояний одних устройств зависимости от состояний других;
- определение однотипных и тождественных устройств в смысле их функционирования.

Компьютерная система логико-вероятностного моделирования поддерживает концепцию иерархического многоуровневого моделирования. Возможность реализации нескольких иерархических уровней представления модели даёт как упрощённое, так и детальное описание различных сторон функционирования СС.

Abstract. The author considers principles and mathematical grounds of the method of logical-probability simulation of complex system.

Литература

1. А. С. Можаев, В. Н. Громов, *Теоретические основы общего логико-вероятностного метода автоматизированного моделирования систем*, Санкт-Петербург, Изд. ВИТУ, 2000.

2. И. В. Максимей, Е. И. Сукач, *Средства технологической поддержки имитационного эксперимента*, Гомель, ГГУ им. Ф. Скорины, 2002.

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступило 21.06.05