Известия Гомельского государственного университета
имени Ф.Скорины, 5(32), 2005

УДК 517.977.58

Реализация позиционного решения задачи оптимизации линейной системы с ограничениями по интегральному квадратичному критерию качества

А. В. Лубочкин

Введение

Проблема синтеза оптимальных систем [1] остается одной из актуальных в теории управления [2–4]. До сих пор успех был достигнут (в классическом понимании проблемы) лишь в задаче оптимизации квадратичного критерия качества на траекториях линейных систем [5, 6] без учета ограничений на состояния и управления, что и обусловило во многом изящность полученных результатов.

В [7] предложен новый подход к проблеме синтеза оптимальных систем. В указанной работе обоснован метод реализации (с помощью непрерывных регуляторов) позиционного решения для линейной задачи оптимального управления с ограничениями в условиях действия на динамическую систему неизвестных возмущений. В [8] этот подход развит на специальные линейно-квадратичные задачи с ограничениями.

Данная работа продолжает исследования в этом направлении. Основываясь на конечном методе построения оптимального программного управления [9], здесь обосновывается метод реализации позиционного решения для задачи минимизации интегрального выпуклого квадратичного критерия качества общего вида на траекториях линейных систем с учетом ограничений и действующих на систему возмущений, что развивает результаты [7, 8] на новый класс экстремальных задач.

1. Постановка задачи

На фиксированном промежутке времени $T = [0, t^*]$ рассмотрим задачу

$$J(u) = J(u\,|\,0, x_0) = \int_0^{t^*} \left[x'(t)Dx(t) + u^2(t)\right] / \, 2\, dt \to \min,\ \dot{x} = Ax + bu,\ x(0) = x_0, \quad (1)$$

$$Hx(t^*) = g,\ |u(t)| \leqslant 1,\ t \in T \quad (x \in R^n,\ u \in R,\ g \in R^m;\ D = D' \geqslant 0;\ \mathrm{rank} H = m < n).$$

Понятие оптимального программного управления $u^0(t\,|\,0, x_0)$, $t \in T$, задачи (1) вводится традиционно. Погрузим задачу (1) в семейство подобных задач

$$J_\tau(u) = J(u\,|\,\tau, z) = \int_\tau^{t^*} \left[x'(t)Dx(t) + u^2(t)\right] / \, 2\, dt \to \min, \quad \dot{x} = Ax + bu,$$
$$x(\tau) = z, \quad Hx(t^*) = g, \quad |u(t)| \leqslant 1, \quad t \in T_\tau = [\tau, t^*], \quad (2)$$

зависящее от пары (τ, z), $\tau \in T$, $z \in R^n$, которую называют позицией в задаче (1). Пусть (при фиксированном τ) X_τ — множество всех векторов z, для которых задача (2) имеет оптимальное программное управление $u^0(t\,|\,\tau, z)$, $t \in T_\tau$.

Функцию

$$u^0(\tau, z) = u^0(\tau\,|\,\tau, z), \quad z \in X_\tau, \quad \tau \in T \quad (3)$$

назовем оптимальным управлением типа обратной связи в задаче (1).

Замкнем динамическую систему обратной связью (3) и рассмотрим ее поведение в условиях действия неизвестных кусочно-непрерывных возмущений

$$\dot{x} = Ax + bu^0(t,x) + w(t), \quad x(0) = x_0 \quad (\, w(t) \in R^n, \; t \in T^0 = [0, t^0], \; t^0 < t^* \,). \tag{4}$$

Следуя [8], вводятся: понятие реализации $u^*(t) = u^0(t, x^*(t))$, $t \in T$, оптимальной обратной связи, соответстующей конкретному (реализующемуся) возмущению $w^*(t)$, $t \in T^0$ ($x^*(t)$, $t \in T$ — решение системы (4) при $w(\cdot) = w^*(\cdot)$), понятия дискретной реализации и h-реализации оптимальной обратной связи в замкнутой системе с возмущением $w^*(t)$, $t \in T^0$, а также понятие оптимального регулятора — любого устройства, способного вычислять в режиме реального времени значения h-реализации $u^*(t)$, $t \in T$.

Таким образом, задача реализации оптимальной обратной связи сводится к описанию алгоритма работы регулятора.

2. Оптимальное программное управление

Согласно (3), для построения h-реализации $u^*(t)$, $t \in T$, оптимальной обратной связи достаточно знать в каждый момент $\tau = kh$ ($k = 0, 1, \ldots$) оптимальное программное управление задачи (2) для реализовавшейся позиции $(\tau, z) = (kh, x^*(kh))$. Известно [9], что оптимальное программное управление $u^0(t) = u^0(t \,|\, \tau, z)$, $t \in T_\tau$, простой (см. [9]) задачи (2) непрерывно по t, имеет вид $u^0(t) = \mathrm{sat}\psi^{0\prime}(t)b$, $t \in T_\tau$ ($\mathrm{sat}\alpha = \mathrm{sign}\alpha$, если $|\alpha| > 1$; $\mathrm{sat}\alpha = \alpha$, если $|\alpha| \leqslant 1$) и состоит из участков двух типов: на участках первого типа оно принимает критические значения ($u^0(t) \equiv k_i$, $|k_i| = 1$), на участках второго типа (квазиособых) управление некритическое ($|u^0(t)| = |\psi^{0\prime}(t)b| < 1$), и вдоль него и соответствующей ему траектории $x^0(t)$, $t \in T_\tau$, выполняется тождество $\Delta^0(t) \equiv 0$ (здесь $\psi^0(t)$, $t \in T_\tau$ — решение сопряженной системы $\dot{\psi} = -A'\psi + Dx$, $\psi(t^*) = -H'y$; $\Delta^0(t)$, $t \in T_\tau$ — коуправление $\Delta^0(t) = \psi^{0\prime}(t)b - u^0(t)$, $t \in T_\tau$, соответствующие оптимальному m-вектору потенциалов). Если известна структура управления $u^0(t)$, $t \in T_\tau$, а также совокупность определяющих элементов $\omega = \omega(\tau) = \omega(\tau, x^*(\tau)) = (t_i$, $i \in P_{0*} = \{s^0 + 1, \ldots, p\}$; t^i, $i \in P^{0*} = \{1, \ldots, s^*\}$; $y \in R^m$; $\psi^* \in R^n)$, состоящая из концов квазиособых участков $T_i^0 = [t_i, t^i]$, $i \in P_0 = \{1, \ldots, p\}$, вектора потенциалов и начального условия для сопряженной системы $\psi^0(\tau) = \psi^*$ (значения s^0, s^* определяются структурой управления), то это управление можно построить следующим образом: 1) на критических участках: $u^0(t) \equiv k_i$, $t \in T_i^* = [t^i, \, t_{i+1}]$, $i \in P_* = \{s^0, \ldots, s^*\}$; 2) на квазиособых участках: $u^0(t) = z'(t)\,(0, b)$, $t \in T_i^0$, $i \in P_0$, где $z(\cdot) = (x(\cdot), \psi(\cdot))$ — решение системы $\dot{z}(t) = \overline{A}(t)z(t) + \overline{b}v(t)$, $z(\tau) = z^* = (x^*(\tau), \psi^*)$; $\overline{b} = (b, 0)$;

$$\overline{A}(t) = \begin{bmatrix} A & 0 \\ D & -A' \end{bmatrix}, \; v(t) = k_i, \; t \in T_i^*, \; i \in P_*; \;\; \overline{A}(t) = \begin{bmatrix} A & bb' \\ D & -A' \end{bmatrix}, \; v(t) = 0, \; t \in T_i^0, \; i \in P_0.$$

3. Определяющие уравнения и алгоритм работы регулятора

Начальные значения $\omega(0)$ определяющих элементов можно найти до включения регулятора, решив методом [9] задачу (1). Определяющие элементы $\omega(\tau)$ для произвольного момента $\tau \in T^0$ удовлетворяют следующей системе определяющих уравнений

$$\begin{gathered} q(\omega) = \psi'(t_i)b - k_{i-1} = 0, \; i \in P_{0*}; \quad r(\omega) = \psi'(t^i)b - k_i = 0, \; i \in P^{0*}; \\ f_0(\omega) = Hx(t^*) - g = 0; \quad f_*(\omega) = H'y + \psi(t^*) = 0. \end{gathered} \tag{5}$$

При достаточно общих предположениях матрица Якоби системы (5) невырождена, и поэтому ее можно решать, например, методом Ньютона.

Алгоритм работы регулятора заключается в следующем. Он начинает работу с построенного заранее программного решения задачи (1): $u^*(t) \equiv u^0(t \,|\, 0, x_0)$, $t \in [0, h[$.

При $t \geqslant h$ регулятор выполняет следующие операции: 1) по известному текущему состоянию $x^*(kh)$ регулятор строит решение $\omega(kh)$ системы (5), используя в качестве начального приближения $\omega((k-1)h)$; 2) на промежутке $[kh,(k+1)h[$ регулятор использует управление $u^*(t) \equiv u^0(t \mid kh, x^*(kh))$, $t \in [kh,(k+1)h[$.

Используя известные свойства метода Ньютона, нетрудно оценить объем работы, которая выполняется на каждом шаге регулятора. Поэтому для каждой системы можно подобрать такие микропроцессорные устройства, с одной стороны, и для каждого микропроцессорного устройства можно указать порядок систем, с другой, что регулятор реализуем в режиме реального времени.

Abstract. A lineary-quadratic problem of optimal control with restrictions is described. The method of feedback optimal control realization under action conditions on a dynamic system of unknown perturbations is considered. The suggested regulator can be realized on modern computers in real-time mode.

Литература

1. А. А. Фельдбаум, *О синтезе оптимальных систем с помощью фазового пространства*, Автоматика и телемеханика, № 2 (1955).
2. Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе и др., *Математическая теория оптимальных процессов*, Москва, Наука, 1969.
3. Р. Беллман, *Динамическое программирование*, Москва, ИЛ, 1960.
4. Н. Н. Красовский, *Теория управления движением*, Москва, Наука, 1968.
5. А. М. Летов, *Аналитическое конструирование регуляторов*, I–III, Автоматика и телемеханика, **21**, № 4–6 (1960).
6. Р. Калман, *Об общей теории систем управления*, Тр. I Конгр. ИФАК, **2**, Москва, Изд-во АН СССР, 1961.
7. Р. Габасов, Ф. М. Кириллова, О. И. Костюкова, *Построение оптимальных управлений типа обратной связи в линейной задаче*, Докл. АН СССР, **320**, № 6 (1991).
8. Р. Габасов, А. В. Лубочкин, *Синтез регулятора для одной линейно-квадратичной задачи оптимального управления*, Автоматика и телемеханика, № 9 (1997).
9. О. И. Костюкова, *Конечный алгоритм решения линейно-квадратичных задач оптимального управления*, Минск, 1990 (Препринт / АН БССР. Ин-т математики; № 25(425)).

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступило 20.06.05