Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, №5(32), 2005

Математика

УДК 519.2

Сети массового обслуживания с динамическими обходами узлов заявками и многорежимными стратегиями обслуживания

А. А. Гаврилюк

1. Введение. Актуальность быстро развивающегося раздела теории массового обслуживания – теории сетей массового обслуживания – связана с интенсивным ростом роли ЭВМ в жизни нашего общества. Перспективность задач, связанных с анализом сетей передачи данных и сетей ЭВМ и математическим моделированием многозадачных вычислительных систем, очевидна. Формулировка многих моделей теории массового обслуживания достаточно проста, однако математическому анализу эти модели поддаются относительно редко. Для такого анализа очень важно определение стационарного распределения вероятностей состояний сети. Именно поэтому ведущее место в теории сетей массового обслуживания занимает класс сетей, инвариантное распределение которых представимо в форме произведения сомножителей, характеризующих отдельные узлы, так как для других видов сетей стационарное распределение вероятностей состояний удается определить только для частных случаев. В большинстве работ, посвященных сетям массового обслуживания с мультипликативной формой инвариантного распределения, используется понятие квазиобратимости, которое впервые ввел Ф.П. Келли [1]. Это вызвано тем, что квазиобратимость узлов гарантирует существование инвариантной меры в форме произведения для соответствующего сети марковского процесса.

Несмотря на интерес к аналитическим моделям сетей с ненадежными приборами, такие модели редко рассматриваются в литературе, так как найти инвариантную меру для них достаточно сложно. Исследование этих сетей проводилось, например, в [2] и [3]. В настоящей работе снимаются ограничения, обычно накладываемые на вероятность присоединения к очереди узла направляемой в него заявки, а также на интенсивность обслуживания заявки узлом и интенсивности изменения режимов работы узла (во многих работах эти параметры зависят не от состояния сети в целом, а только от состояния данного узла), для случая с группами многорежимных стратегий обслуживания и динамическими обходами узлов заявками. Следует отметить, что полученный результат справедлив и для частного случая, когда динамические обходы узлов заявками отсутствуют.

2. Постановка задачи. В сеть, состоящую из N однолинейных узлов, поступают независимые пуассоновские потоки заявок с интенсивностями $\gamma_1(x),....,\gamma_N(x)$, хотя бы одна из которых строго положительна при каждом x, $\gamma(x)=\sum_{l=1}^{N}\gamma_l(x)$ – суммарная интенсивность поступления заявок в сеть. В l-том узле находится единственный прибор, который может работать в $r_{l,w}+1$ режимах, $w=\overline{1,R}$, где R – количество групп режимов. Состояние сети в момент времени $t\geq 0$ характеризуется случайным вектором $x(t)=(x_1(t),x_2(t)...,x_N(t))$, где $x_l(t)$ – состояние l-того узла в момент времени t. Состояние l-того узла характеризуется парой чисел $(i_l(t),j_{l,w}(t))$, где $i_l(t)$ – число заявок в l-том узле в момент времени t, а $j_{l,w}(t)$ – номер режима w-той группы, в котором работает прибор в l-том узле в момент времени t. $l=\overline{1,N}$, $w=\overline{1,R}$, $j_{l,w}(t)=\overline{0,r_{l,w}}$.

Длительность обслуживания прибором l-того узла, находящегося в состоянии x_l, имеет показательное распределение с параметром $\mu_x(l)$, зависящим от состояния сети x. Назовем 0 основным режимом работы. Время пребывания прибора l-того узла в основном режиме работы имеет показательное распределение с параметром $\nu_x(l)$, зависящим от состояния сети x, после чего прибор переходит в режим 1. Для состояний l-того узла x_l, у которых $1 \le j_{l,w} \le r_{l,w} - 1$, время пребывания в режиме $j_{l,w}$ также имеет показательное распределение, при этом с интенсивностью $\varphi_x(l)$, зависящей от состояния сети x, прибор l-того узла переходит в режим $j_{l,w} - 1$, а с интенсивностью $\nu_x(l)$, зависящей от состояния сети x, прибор l-того узла переходит в режим $j_{l,w} + 1$. Время пребывания в последнем, $r_{l,w}$-том режиме w-той группы имеет показательное распределение, при этом с интенсивностью $\varphi_x(l)$, зависящей от состояния сети x, прибор переходит в режим $r_{l,w} - 1$ а с интенсивностью $\nu_x(l)$, зависящей от состояния сети x, прибор l-того узла переходит в нулевой режим группы w+1. Переход прибора с режима 0 в режим 1 можно интерпретировать как частичную потерю работоспособности прибора. Аналогично, переход с режима $j_{l,w}$ в режим $j_{l,w} + 1$ означает переход прибора в более щадящий режим обслуживания. Переход прибора с режима $j_{l,w}$ в режим $j_{l,w} - 1$ означает восстановление тех функциональных возможностей, которые были утеряны при переходе прибора с режима $j_{l,w} - 1$ в режим $j_{l,w}$.

Заявка, направленная в l-тый узел (извне или из другого узла), с вероятностью $f_x^{(l)}$ присоединяется к очереди, а с вероятностью $f_x^{(l)}$-1 мгновенно обходит этот узел. $0 \le f_x^{(l)} \le 1$,. Заявка, обслуженная в l-том узле, мгновенно с вероятностью π_{li} направляется в i-тый узел, а с вероятностью π_{l0} покидает сеть ($l, i = \overline{1,N} : \sum_{i=0}^{N} \pi_{li} = 1$).

Для удобства введем следующие обозначения. Пусть $e_i^{(1)}$ – двухмерный вектор, у которого первый компонент по i-той координате равен единице, а остальные координаты равны нулю. Аналогично, $e_i^{(2)}$ – двухмерный вектор, у которого второй компонент по i-той координате равен единице, а остальные координаты равны нулю. Кроме того, будем считать, что $\mu_x(l) = 0$ при $i_l = 0$; $\nu_x(l) = 0$ при $j_{l,w} = r_{l,R}$; $\varphi_x(l) = 0$ при $j_{l,w} = 0$; $j_{l,w}+1 = 0_{l,w+1}$, при $j_{l,w} = r_{l,R}$.

Предположим, что справедливы следующие два условия:

$$\nu_{x-e_j^{(2)}}(l)\mu_x(l)\varphi_{x-e_i^{(1)}}(l) = \nu_{x-e_i^{(1)}-e_j^{(2)}}(l)\mu_{x-e_j^{(2)}}(l)\varphi_x(l), \tag{1}$$

гарантирующее обратимость за счет внутренних изменений узла, т.е.

$$p(x+e_l^{(2)})\varphi_{x+e_l^{(2)}} = p(x)\nu_x(l)$$

и

$$\frac{\varepsilon_j(x+e_i^{(1)})\varepsilon_i(x)}{\mu_{x+e_i^{(1)}+e_j^{(1)}}(j)\mu_{x+e_i^{(1)}}(i)} = \frac{\varepsilon_i(x+e_j^{(1)})\varepsilon_j(x)}{\mu_{x+e_i^{(1)}+e_j^{(1)}}(i)\mu_{x+e_j^{(1)}}(j)}, \ i,j = \overline{1,N}, \tag{2}$$

гарантирующее выполнение

$$\frac{p(x+e_l^{(1)})}{p(x)} = \frac{\varepsilon_l(x)}{\mu_{x+e_l^{(1)}}(l)},$$

где $(\varepsilon_1(x), \varepsilon_2(x), ..., \varepsilon_N(x))$ – решение уравнения трафика

$$\varepsilon_i(x) = \gamma_i(x) + \sum_{j=1}^{N} \varepsilon_j(x)\alpha_{ji}, \ \alpha_{j,i}(x) = f_x^{(j)}\pi_{j,i} + (1-f_x^{(j)})q_{j,i},. \tag{3}$$

Будем считать также, что уравнение трафика (3) имеет единственное решение $(\varepsilon_1(x), \varepsilon_2(x), ..., \varepsilon_N(x))$, для которого $\varepsilon_1 > 0, \ldots, \varepsilon_N > 0$, а величины $\mu_x(l)$, $\varphi_x(l)$, $\nu_x(l)$ строго положительны. Тогда $x(t)$ – неприводимый марковский процесс на фазовом пространстве $X = X_1 \times X_2 \times ... \times X_N$, где $X_l = \{(i_l, j_{l,w}) \mid i_l = 0,1,2,...; j_{l,w} = \overline{0, r_{l,R}}\}$.

3. Основной результат. Введем функции

$$G_{l,i_l}(x) = \prod_{k=1}^{i_l} \frac{f^{(l)}_{x-ke_l^{(1)}} \varepsilon_l (x - ke_l^{(1)})}{\mu_{x-(k-1)e_l^{(1)}}(l)}, \quad l = \overline{1,N}, \quad x \in X;$$

$$H_{l,j_l}(x) = \prod_{k=1}^{j_l} \frac{\nu_{x-ke_l^{(2)}}(l)}{\varphi_{x-(k-1)e_l^{(2)}}(l)}, \quad l = \overline{1,N}, \quad x \in X.$$

Лемма. *Пусть выполняются условия (1) и (2) и ряды*

$$\sum_{x\in X} [\sum_{l=1}^{N} [\gamma_l(x)(1-\psi_l(x)) + (\mu_x(l)(1-\beta_{ll}(x)) + \nu_x(l) + \varphi_x(l))] \times$$
$$\times \prod_{l=1}^{N} G_{l,i_l}(x - i_1 e_1^{(1)} - ... - i_{l-1} e_{l-1}^{(1)}) H_{l,j_l}(x - j_1 e_1^{(2)} - ... - j_{l-1} e_{l-1}^{(2)}), \quad (4)$$

сходятся. Тогда марковский процесс $x(t)$ эргодичен. Здесь $\psi_l(x)$ - условная вероятность того, что заявка, направленная в l-тый узел, не будет обслужена ни одним из узлов, $1 - \beta_{ll}(x)$ - условная вероятность того, что заявка, обслуженная в l-том узле, в следующий раз будет обслужена в некотором другом узле.

Теорема. *Пусть выполнены условия (1) и (2) и ряды (4) сходятся. Тогда финальное стационарное распределение процесса $x(t)$ имеет следующую форму:*

$$p(x) = \prod_{l=1}^{N} [G_{l,i_l}(x - i_1 e_1^{(1)} - ... - i_{l-1} e_{l-1}^{(1)}) H_{l,j_l}(x - j_1 e_1^{(2)} - ... - j_{l-1} e_{l-1}^{(2)})] p(0), \quad (5)$$

где

$$p(0) = (\sum_{x\in X} \prod_{l=1}^{N} G_{l,i_l}(x - i_1 e_1^{(1)} - ... - i_{l-1} e_{l-1}^{(1)}) H_{l,j_l}(x - j_1 e_1^{(2)} - ... - j_{l-1} e_{l-1}^{(2)}))^{-1}.$$

Здесь предполагается, что $G_{l,i_l}(x) = 1$ при $i_l = 0$ и что $H_{l,j_l}(x) = 1$ при $j_{l,1} = 0$.

Доказательство леммы и теоремы проводится аналогично доказательствам, приведенным в [3].

Abstract. The networks of mass service with dynamic raunds of nods by demands and multiservices strategies are considered.

Литература

1. F. P. Kelly, *Networks of Queues*, Adv. Appl. Probab, **8**, No 2 (1976), 416–432.

2. Ю. В. Малинковский, А. Ю. Нуеман, *Мультипликативность стационарного распределения в открытых сетях с многорежимными стратегиями обслуживания*, Весці нацыянальнай акадэміі навук Беларусі, № 3 (2001), 129–134.

3. А. А. Гаврилюк, Ю. В. Малинковский, *Модель открытой экспоненциальной сети массового обслуживания с зависящими от состояния сети многорежимными стратегиями обслуживания и динамическими вероятностными обходами узлов заявками*, Веснік Гродзенскага дзяржаўнага універсітэта імя Янкі Купалы, № 2 (2004), 42–48.

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступило 31.08.05