Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, №5(32), 2005

УДК 519.2

Мультипликативность стационарного распределения в открытых сетях с многорежимными стратегиями обслуживания и с обходом узлов заявками

Е. В. Коробейникова

1. Введение. Сети массового обслуживания с обходами узлов заявками рассматривались в [1]. Модели сетей с многорежимными стратегиямси обслуживания рассматривались в [2]. Настоящая работа посвящена исследованию сети с многорежимными стратегиями обслуживания, которая включает случаи ограничения количества заявок в узле, т.е. обходы узлов заявками. Наша постановка позволяет исследовать сеть, в которой заявки, поступающие на прибор, вышедший из строя или частично вышедший из строя, могут обходить этот узел с заданной вероятностью и далее следовать в соответствии с матрицей маршрутизации. Вероятность обхода узла заявкой зависит от работоспособности прибора. Очевидно, что если прибор в узле вышел из строя полностью, то вероятность его обхода равна единице. В практической ситуации клиент, попавший в узел, оценивает количество заявок в очереди и скорость обслуживания одной заявки и, в зависимости от проведенной оценки, либо остается ожидать, либо переходит в следующий узел.

2. Постановка задачи. В сеть, состоящую из N однолинейных узлов, поступает стационарный пуассоновский поток заявок интенсивности λ. В *l*-м узле находится один прибор, который может работать в r_l+1 режимах. Состояние *l*-го узла характеризуется парой чисел $x_l = (n_l, \tau_l)$, где n_l – число заявок в *l*-м узле, τ_l -номер режима, в котором работает прибор в *l*-м узле ($\overline{l=1;N;\quad \tau_l=0,r_l}$).

Каждая заявка входного потока независимо от других заявок с вероятностью π_{0i} направляется в *i*-й узел ($i=\overline{1,N}$; $\sum_{i=1}^{N}\pi_{0,i}=1$).

Заявка обслуженная в *l-м* узле, мгновенно с вероятностью $\pi_{l,j}$ направляется в *j*-й узел, а с вероятностью $\pi_{l,0}$ покидает сеть ($i,j=\overline{1,N}$; $\sum_{i=1}^{N}\pi_{l,i}=1$). Заявка направленная в *i*-й узел (извне или с другого узла), с вероятностью $f^{(i)}(x_i)$ присоединяется к очереди, а с вероятностью $1-f^{(i)}(x_i)$ считается мгновенно обслуженной узлом ($0\le f^{(i)}(x_i)\le 1$; $i=\overline{1,N}$). Длительность обслуживания прибором *l*-го узла, находящегося в состоянии x_l, имеет показательное распределение с параметром $\mu_l(x_l)$, зависящим от состояния (т.е. от числа заявок n_l в узле и режима его работы τ_l). Для состояния x_l время пребывания в режиме τ_l имеет показательное распределение , при этом с интенсивностью $\psi_l(x_l)$ прибор *l*-го узла переходит в режим τ_l-1, а с интенсивностью $\nu_l(x_l)$ в режим τ_l+1. Время пребывания в последнем τ_l режиме имеет показательное распределение с параметром $\psi_l(x_l)$, после чего прибор переходит в τ_l-1 режим. Во время переключения прибора с одного режима на другой число заявок в очереди не меняется.

Состояние сети в момент времени t будет характеризоваться вектором x(t)=($x_1(t),\dots x_N(t)$), где $x_l(t)=(n_l(t),\tau_l(t))$ – состояние *l*-го узла в момент времени t. В соответствии с указанным выше $n_l(t)$ – число заявок в l-м узле в момент времени t, $\tau_l(t)$ – номер режима работы l-го узла в момент времени t.

Предположим, что все величины $\mu_l(x_l), \nu_l(x_l), \psi_l(x_l)$ строго положительны, а уравнение трафика

$$\varepsilon_j = \pi_{oj} + \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i \pi_{ij} \qquad (j = \overline{1, N}) \tag{1}$$

имеет единственное решение ($\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_N$), для которого $\varepsilon_1 > 0, ...\varepsilon_N > 0$ (для этого достаточно, чтобы матрица (π_{kl}, $k, l = \overline{0, N}, где$ $\pi_{00} = 0$) была неприводимой. Тогда x(t)-неприводимый Марковский процесс на фазовом пространстве X= $X_1 \times X_2 \times ... \times X_N$.

Цель работы состоит в установлении условий эргодичности x(t) и выявлении необходимых и достаточных условий, при которых стационарное финальное распределение процесса представляется в мультипликативной форме.

$$p(x) = p_1(x_1) p_2(x_2) ... p_N(x_N) \tag{2}$$

3. Анализ изолированного узла. Для упрощения обозначений в данном разделе будет опускаться индекс l, указывающий номер узла. Состояние узла будем характеризовать парой чисел $x=(i, j)$, где i-число заявок в узле, а j – номер режима работы прибора в узле, где $j = \overline{0, r}$. X – пространство состояний узла, $(p(x), x \in X)$ – стационарное распределение состояния узла. Рассмотрим изолированный узел и предположим, что на него поступает простейший поток заявок интенсивностью α. Если стационарное распределение существует, то стационарные вероятности удовлетворяют следующей системе уравнений равновесия:

$$\begin{aligned} &p(i,j)[f(i,j)\alpha + \mu(i,j) + \psi(i,j) + \nu(i,j)] = \\ &= \alpha \cdot f(i,j) p(i-1,j) + \mu(i,r) p(i+1,j) + p(i,j+1)\psi(i,j+1) + p(i,j-1)\nu(i,j-1), \end{aligned} \tag{3}$$

где $\mu(0, j) = 0;$ $\psi(i, 0) = 0;$ $\nu(i, r) = 0;$ $(i = 1, 2..\infty,$ $j = \overline{1, r})$

Если на вход системы направлен простейший поток с параметром α, то система называется квазиобратимой, если

$$\sum_{y \in X} p(y) \mu(y, x) = \alpha \cdot f(x) p(x), \; x \in X, \tag{4}$$

где $\mu(y, x)$ – часть интенсивности перехода из состояния y в состояние x, обусловленная обслуживанием заявки.

Система называется обратимой, если для любых ее состояний x и y выполняется следующее условие

$$p(x) \; q(x, y) = p(y) \; q(y, x), \tag{5}$$

где $q(x, y)$ – интенсивность перехода системы из состояния x в состояние y.

Для рассматриваемой нами задачи условие квазиобратимости (4) примет вид

$$\alpha \cdot f(i,j) p(i,j) = \mu(i+1,j) p(i+1,j) \qquad i = 0,1,...\infty; j = \overline{0, r}, \tag{6}$$

а условие обратимости (5) – форму

$$\alpha \cdot f(i,j) p(i,j) = \mu(i+1,j) p(i+1,j), \quad \nu(i,j) p(i,j) = \psi(i,j+1) p(i,j+1),$$

$$i = 0,1,...\infty; j = \overline{0, r-1}. \tag{7}$$

Лемма 1. *Для квазиобратимости изолированного узла необходимо и достаточно выполнение условий*

$$f(i,j)\nu(i+1,j)\psi(i,j+1)\mu(i+1,j+1) = f(i,j+1)\nu(i,j)\psi(i+1,j+1)\mu(i+1,j), i \geq 0, \; 0 \leq j \leq \tau. \tag{8}$$

При выполнении условий (8) для эргодичности x(t) достаточно, чтобы

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{r}(f(i,j)\alpha+\mu(i,j)+\nu(i,j)+\psi(i,j))\alpha^{i}\prod_{k=1}^{j}\frac{\nu(0,k-1)}{\psi(0,k)}\prod_{l=1}^{i}\frac{f(l-1,j)}{\mu(l,j)}\prec\infty. \qquad (9)$$

Финальное стационарное распределение процесса x(t) определяется соотношениями

$$p(i,j)=\alpha^{i}\prod_{k=1}^{j}\frac{\nu(0,k-1)}{\psi(0,k)}\prod_{l=1}^{i}\frac{f(l-1,j)}{\mu(l,j)}p(0,0) \qquad (10)$$

$$p(0,0)=(\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{r}(\alpha^{i}\prod_{k=1}^{j}\frac{\nu(0,k-1)}{\psi(0,k)}\prod_{l=1}^{i}\frac{f(l-1,j)}{\mu(l,j)}))^{-1} \qquad (11)$$

Где предполагается, что произведение, в котором нижний индекс большего верхнего равно единице.

Доказательство. Из (6) следует, что

$$p(i,j)=\frac{\alpha^{i}(f(0,j)f(1,j)...f(i-1,j))}{\mu(1,j)\mu(2,j)...\mu(i,j)}p(0,j). \qquad (12)$$

а из (7) следует, что

$$p(0,j)=\frac{\nu(0,0)\nu(0,1)...\nu(0,j-1)}{\psi(0,1)\psi(0,2)...\psi(0,j)}p(0,0)\,. \qquad (13)$$

Подставив (13) в (12) получим (10).

Так как $\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{r}p(i,j)=1$, просуммировав (10) по i и по j и выразив p(0,0) ,мы получим (16). Проверим, удовлетворяет ли найденное решение условию квазиобратимости , для этого мы подставим (10) в (6) и получим

$$f(i,j)\alpha^{i+1}\prod_{k=1}^{j}\frac{\nu(0,k-1)}{\psi(0,k)}\prod_{l=1}^{i}\frac{f(l-1,j)}{\mu(l,j)}p(0,0)=\mu(i+1,j)\alpha^{i+1}\prod_{k=1}^{j}\frac{\nu(0,k-1)}{\psi(0,k)}\prod_{l=1}^{i+1}\frac{f(l-1,j)}{\mu(l,j)}p(0,0)$$

Откуда $f(i,j)=f(i,j)$. Таким образом, полученное решение удовлетворяет условию квазиобратимости.

Разделив p(i+1,j) на p(i,j) получим

$$\frac{p(i+1,j)}{p(i,j)}=\alpha\frac{f(i,j)}{\mu(i+1,j)}\,. \qquad (14)$$

Разделив p(i+1,j+1) на p(i,j+1) получим

$$\frac{p(i+1,j+1)}{p(i,j+1)}=\alpha\frac{f(i,j+1)}{\mu(i+1,j+1)}\,. \qquad (15)$$

Запишем условие (7) для двух состояний x(i,j) и x(i+1,j)

$$\nu(i,j)p(i,j)=\psi(i,j+1)p(i,j+1)$$

$$\nu(i+1,j)p(i+1,j)=\psi(i+1,j+1)p(i+1,j+1)\,.$$

Разделим второе на первое

$$\frac{\nu(i+1,j)}{\nu(i,j)}\frac{p(i+1,j)}{p(i,j)}=\frac{\psi(i+1,j+1)}{\psi(i,j+1)}\frac{p(i+1,j+1)}{p(i,j+1)} \qquad (16)$$

Подставив (14) и (15) в (16) получим $\frac{\nu(i+1,j)}{\nu(i,j)}\frac{f(i,j)}{\mu(i+1,j)}=\frac{\psi(i+1,j+1)}{\psi(i,j+1)}\frac{f(i,j+1)}{\mu(i+1,j+1)}$, откуда путем элементарного преобразования получим (8). Достаточность сходимости рядя (9) для эргодичности x(t) вытекает из теоремы Фостера. Лемма доказана.

4. Стационарное распределение сети. Пусть $\varphi_i(n,\tau)$ – условная вероятность того, что заявка поступающая в *i*-й узел, когда сеть находится в состоянии (n,τ) не будет обслужена ни одним из узлов $(n=(n_1,n_2,...n_N)$ $\tau=(\tau_1,\tau_2,...\tau_N)$ $\tau_1=(\overline{0,r_1}),\tau_2=(\overline{0,r_2}),...,\tau_N=(\overline{0,r_N}))$

По формуле полной вероятности

$$\varphi_i(n,\tau)=(\pi_{i0}+\sum_{j=1}^{N}\pi_{ij}\ \varphi_j(n,\tau))(1-f^{(i)}(n_i,\tau_i)), \tag{17}$$

где $\zeta_{ij}(n,\tau)$ – условная вероятность того, что заявка, поступившая в *i*-й узел, когда сеть находится в состоянии (n,τ), впервые получит обслуживание в *j*-ом узле.

$$\zeta_{ij}(n,\tau)=f^{(i)}(n_i,\tau_i)\delta_{ij}+\sum_{k=1}^{N}\pi_{ik}\zeta_{kj}(n,\tau)(1-f^{(i)}(n_i,\tau_i)), \tag{18}$$

где $\alpha_i(n,\tau)$– условная вероятность того, что заявка, обработанная *i*-м узлом системы, находящейся в состоянии (n,τ) не будет обслуживаться больше ни одним узлом.

$$\alpha_i(n,r)=\pi_{i0}+\sum_{j=1}^{N}\pi_{ij}\varphi_j(n-e_i,\tau), \tag{19}$$

где $\beta_{ij}(n,\tau)$ – условная вероятность того, что заявка, обработанная *i*-м узлом, когда сеть находится в состоянии (n,τ), впервые будет обслуживаться *j*-м узлом.

$$\beta_{ij}(n,\tau)=\sum_{k=1}^{N}\pi_{ik}\zeta_{kj}(n,\tau), \tag{20}$$

где e_i – N-мерный вектор , *i*-я координата которого равна 1, а остальные 0; δ_{ij}-символ Кронекера. При этом:

$$\sum_{j=1}^{N}\zeta_{ij}(n,\tau)+\varphi_i(n,\tau)=1 \tag{21}$$

$$\sum_{j=1}^{N}\beta_{ij}(n,\tau)+\alpha_i(n,\tau)=1 \tag{22}$$

Если стационарное распределение процесса x(t) существует, то стационарные вероятности состояний удовлетворяют глобальным уравнениям равновесия

$$\begin{gathered}p(n,\tau)(\sum_{i=1}^{N}(\lambda\pi_{oi}(1-\varphi_i(n,\tau))+\mu_i(n_i,\tau_i)(1-\beta_{ii}(n,\tau))+\psi_i(n_i,\tau_i)+\nu_i(n_i,\tau_i)))=\\ \sum_{i=1}^{N}p(n-e_i,\tau)\sum_{k=1}^{N}\lambda\pi_{ok}\zeta_{ki}(n-e_i,\tau)+\sum_{i=1}^{N}p(n+e_i,\tau)\mu_i(n_i+1,\tau_i)\alpha_i(n+e_i,\tau)+\\ +\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{N}p(n+e_i-e_j,\tau)\mu_j(n_j+1,\tau_j)\beta_{ji}(n+e_j-e_i,\tau)+\sum_{i=1}^{N}\psi_i(n_i,\tau_i+1)p(n,\tau+e_i)+\\ +\sum_{i=1}^{N}\nu_i(n_i,\tau_i-1)p(n,\tau-e_i)\end{gathered} \tag{23}$$

Теорема 1. *Если во всех узлах сети выполняются условия*

$$\begin{aligned} &f_i(n_i,\tau_i)\nu_i(n_i+1,\tau_i)\psi_i(n_i,\tau_i+1)\mu_i(n_i+1,\tau_i+1)= \\ &=f_i(n_i,\tau_i+1)\nu_i(n_i,\tau_i)\psi_i(n_i+1,\tau_i+1)\mu_i(n_i+1,\tau_i), \end{aligned} \tag{24}$$

где $i=\overline{1,N}$, *то*

$$p(n,\tau)=p_1(n_1,\tau_1)p_2(n_2,\tau_2)...p_N(n_N,\tau_N), \tag{25}$$

где $p_i(n_i,\tau_i)=(\varepsilon_i\lambda)^{n_i}\prod_{k=1}^{\tau_i}\frac{\nu_i(0,k-1)}{\psi_i(0,k)}\prod_{m=1}^{n_i}\frac{f^{(i)}(m-1,j)}{\mu_i(m,j)}p(0,0)$ (26)

$$p_i(0,0)=(\sum_{n_i=1}^{\infty}\sum_{\tau_i=0}^{r_i}((\varepsilon_i\lambda)^{n_i}\prod_{k=1}^{\tau_i}\frac{\nu_i(0,k-1)}{\psi_i(0,k)}\prod_{m=1}^{n_i}\frac{f^{(i)}(m-1,j)}{\mu_i(m,j)}p(0,0)))^{-1}. \tag{27}$$

Причем для эргодичности достаточно, чтобы

$$\sum_{n_i=1}^{\infty}\sum_{\tau_i=0}^{r_i}(\varepsilon_i\lambda)^{n_i}\prod_{k=1}^{\tau_i}\frac{\nu_i(0,k-1)}{\psi_i(0,k)}\prod_{m=1}^{n_i}\frac{f_i(m-1,j)}{\mu_i(m,j)}\prec\infty; \qquad i=\overline{1,N} \tag{28}$$

Доказательство. Докажем, что (25) удовлетворяет уравнениям равновесия (23). Разобъем (23) на уравнения локального равновесия.

$$p(n,\tau)\sum_{i=1}^{N}(\lambda\pi_{oi}(1-\varphi_i(n,\tau))=\sum_{i=1}^{N}p(n+e_i,\tau)\mu_i(n_i+1,\tau_i)\alpha_i(n+e_i,\tau) \tag{29}$$

$$\begin{aligned} &p(n,\tau)\mu_i(n_i,\tau_i)(1-\beta_{ii}(n,\tau))=p(n-e_i,\tau)\sum_{k=1}^{N}\lambda\pi_{ok}\zeta_{ki}(n-e_i,\tau)+ \\ &+\sum_{j=1}^{N}p(n+e_i-e_j,\tau)\mu_j(n_j+1,\tau_j)\beta_{ji}(n+e_j-e_i,\tau) \end{aligned} \tag{30}$$

$$p(n,\tau)\psi_i(n_i,\tau_i)=\nu_i(n_i,\tau_i-1)p(n,\tau-e_i) \tag{31}$$

$$p(n,\tau)\nu_i(n_i,\tau_i)=\psi_i(n_i,\tau_i+1)p(n,\tau+e_i) \tag{32}$$

Равенства (29)–(30) доказаны в [1] Теорема 1, а (31)–(32) автоматически следуют из (7)при условии выполнения (24). Теорема доказана.

Abstract. The paper is devoted to studying a network with multimode strategies of service and round of nodes by units.

Литература

1. Ю. В. Малинковский, *Сети массового обслуживания с обходами узлов заявками*, Автоматика и телемеханика, № 2 (1991), 102–110

2. Ю. В. Малинковский, А. Ю. Нуеман, *Мультипликативность стационарного распределения в открытых сетях с многорежимными стратегиями обслуживания*, Весцi нацыянальнай акадэмii навук Беларусi, № 3 (2001), 129–134.

Гомельский государственный
технический университет

Поступило 01.07.05