Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, №5(32), 2005

УДК 539.374

О некоторых интегралах, содержащих произведение степенных и бесселевых функций

Д. В. Леоненко

В прикладных задачах механики, в частности при изгибе круглых пластин под действием локальных нагрузок, исследователи часто сталкиваются с необходимостью взятия интегралов от произведения полиномов на функции Бесселя и Хевисайда [1]. В связи с этим далее рассмотрено несколько интегралов. Решения подобных интегралов представлено в справочниках [2, 3] в виде гипергеометрических функций. Здесь приведены решения в квадратурах, которые в частных случаях позволяют избежать применения достаточно сложных выражений.

1. Неопределенные интегралы.

Теорема 1. *Пусть подынтегральная функция имеет вид*

$$f(x)=\frac{x^2-b^2}{x}H_0(b-x),$$

где H_0 – единичная функция Хевисайда, b – константа.

Тогда

$$\int I_1(\beta x)f(x)x\,dx=\frac{1}{\beta}H_0(b-x)\left[\left(x^2-b^2\right)I_0(\beta x)+\frac{2}{\beta}\left(bI_1(\beta b)-xI_1(\beta x)\right)\right],$$

где I_0, I_1.– модифицированные функции Бесселя нулевого и первого порядков.

Доказательство. Используя ранее известные интегралы [2]

$$\int I_1(\beta x)dx=\frac{I_0(\beta x)}{\beta},\qquad \int I_1(\beta x)x^2dx=\frac{x^2}{\beta}I_2(\beta x),$$

получаем

$$\int I_1(\beta x)f(x)x\,dx=\frac{1}{\beta}\left(x^2I_2(\beta x)H_0(b-x)+\int x^2I_2(\beta x)\delta(b-x)dx\right)-$$

$$-\frac{b^2}{\beta}\left(I_0(\beta x)H_0(b-x)+\int I_0(\beta x)\delta(b-x)dx\right)=$$

$$=\frac{1}{\beta}\left(x^2I_2(\beta x)-b^2I_2(\beta b)\right)H_0(b-x)-\frac{b^2}{\beta}\left(I_0(\beta x)-I_0(\beta b)\right)H_0(b-x)=$$

$$=\frac{1}{\beta}H_0(b-x)\left[\left(x^2-b^2\right)I_0(\beta x)+\frac{2}{\beta}\left(bI_1(\beta b)-xI_1(\beta x)\right)\right],\text{ ч. т. д.}$$

Здесь $\delta(x)$ –дельта-функция Дирака.

В доказательстве был использован тот факт, что производная от функции Хевисайда $H(x)$ есть, в обобщенном смысле, дельта-функция Дирака $\delta(x)$.

Следствие. *Если вместо функции Бесселя имеется функция Макдональда K_1 первого порядка, то по аналогии получаем:*

$$\int K_1(\beta x)dx=-\frac{K_0(\beta x)}{\beta},\qquad \int K_1(\beta x)x^2dx=\frac{x^2}{\beta}K_2(\beta x),$$

$$\int K_1(\beta x)f(x)x\,dx=\frac{1}{\beta}\left(x^2K_2(\beta x)H_0(b-x)+\int x^2K_2(\beta x)\delta(b-x)dx\right)-$$

$$-\frac{b^2}{\beta}\left(-\int K_0(\beta x)\delta(b-x)dx-K_0(\beta x)H_0(b-x)\right)=\frac{1}{\beta}\left(x^2K_2(\beta x)-b^2K_2(\beta b)\right)H_0(b-x)-$$

$$-\frac{b^2}{\beta}\left(K_0(\beta b)-K_0(\beta x)\right)H_0(b-x)=\frac{1}{\beta}H_0(b-x)\left[\left(b^2-x^2\right)K_0(\beta x)+\frac{2}{\beta}\left(bK_1(\beta b)-xK_1(\beta x)\right)\right].$$

Теорема 2. *Пусть подынтегральная функция*

$$f(x)=\frac{\left(b^2-x^2\right)^2}{x}H_0(b-x).$$

Тогда

$$\int I_1(\beta x)f(x)xdx=\frac{1}{\beta^2}H_0(b-x)\Big[I_0(\beta x)\left(-2b^2x^2\beta+x^4\beta+\frac{8x^2}{\beta}\right)-$$

$$-\frac{8b^2I_0(\beta b)}{\beta}+\frac{16bI_1(\beta b)}{\beta^2}+4I_1(\beta x)\left(b^2x-x^3-\frac{4}{\beta^2}\right)\Big].$$

Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 1.

Следствие. *Если вместо функции Бесселя имеется функция Макдональда, то по аналогии получаем:*

$$\int K_1(\beta x)f(x)rdx=\frac{1}{\beta^2}H_0(b-x)\left[K_0(\beta x)\left(2x^2\beta b^2-x^4\beta-\frac{8x^2}{\beta}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{8b^2K_0(\beta b)}{\beta}+\frac{16bK_1(\beta b)}{\beta^2}+4K_1(\beta x)\left(xb^2-x^3-\frac{4}{\beta^2}\right)\right].$$

2. Определенные интегралы

Теорема 3. *Для любых* $a\in[0;1]$ *справедливо следующее равенство:*

$$\int_0^1 J_0(\beta x)(a^2-x^2)H_0(a-x)xdx=\frac{2a^2}{\beta^2}J_2(\beta a).$$

Доказательство. Используя свойства функции Хевисайда, имеем

$$\int_0^1 J_0(\beta x)(a^2-x^2)H_0(a-x)xdx=\int_0^a J_0(\beta x)(a^2-x^2)xdx.$$

Полученный интеграл разобьем на два. Первый из них

$$a^2\int_0^a J_0(\beta x)xdx=\frac{a^3}{\beta}J_1(\beta a);$$

Второй интеграл возьмем по частям

$$\int_0^a J_0(\beta x)x^3dx=\frac{1}{\beta}\left[J_1(\beta x)x^3-2\int J_1(\beta x)x^2dx\right]_0^a=$$

$$=\frac{1}{\beta}\left[J_1(\beta x)x^3-\frac{2}{\beta}J_2(\beta x)x^2\right]_0^a=\frac{1}{\beta}\left[a^3J_1(\beta a)-\frac{2a^2}{\beta}J_2(\beta a)\right].$$

Таким образом,

$$\int_0^1 J_0(\beta x)(a^2-x^2)H_0(a-x)xdx=\frac{2a^2}{\beta^2}J_2(\beta a),\text{ ч. т. д.}$$

Следствие. *Аналогичное выражение получаем для модифицированной функции Бесселя* I_0

$$\int_0^1 I_0(\beta x)(a^2-x^2)H_0(a-x)xdx=\frac{2a^2}{\beta^2}I_2(\beta a).$$

Теорема 4. *Для любых* $a \in [0;1]$ *справедливо следующее равенство:*

$$\int_0^1 J_0(\beta x)(a-x)^2 H_0(a-x)x dx = \frac{4a}{\beta^3}\sum_{m=1}^{\infty} J_{2m+1}(\beta a).$$

Доказательство. Используем известные выражения [3]:

$$\int J_0(x)dx = 2\sum_{n=0}^{\infty} J_{2n+1}(x).$$

Тогда

$$\int J_1(x)x dx = -J_0(x)x + 2\sum_{n=0}^{\infty} J_{2n+1}(x);$$

$$\int J_0(x)x^2 dx = J_1(x)x - \int J_1(x)x dx = J_1(x)x + J_0(x)x - 2\sum_{n=0}^{\infty} J_{2n+1}(x).$$

Отсюда

$$\int_0^1 J_0(\beta x)(a-x)^2 H_0(a-x)x dx = \int_0^a J_0(\beta x)(a-x)^2 x dx = \int_0^a J_0(\beta x)\left(a^2 + x^2 - 2x\right)x dx =$$

$$= \frac{a^3}{\beta} J_1(\beta a) + \left(\frac{a^3}{\beta} J_1(\beta a) - \frac{2a^2}{\beta^2} J_2(\beta a)\right) - 2\left[\frac{a^3}{\beta} J_1(\beta a) - \frac{1}{\beta^2}\left(-a^3 J_0(\beta a) + \frac{2a}{\beta}\sum_{m=0}^{\infty} J_{2m+1}(\beta a)\right)\right] =$$

$$= -\frac{2a^2}{\beta^2} J_2(\beta a) - \frac{2a^2}{\beta^2} J_0(\beta a) + \frac{4a}{\beta^3}\sum_{m=0}^{\infty} J_{2m+1}(\beta a) = -\frac{2}{\beta^2}\frac{2a}{\beta} J_1(\beta a) + \frac{4a}{\beta^3}\sum_{m=0}^{\infty} J_{2m+1}(\beta a) =$$

$$= \frac{4a}{\beta^3}\left\{-J_1(\beta a) + \sum_{n=0}^{\infty} J_{2n+1}(\beta a)\right\} = \frac{4a}{\beta^3}\sum_{m=1}^{\infty} J_{2m+1}(\beta a), \text{ ч. т. д.}$$

Следствие. *Для модифицированной функции* I_0

$$\int_0^1 I_0(\beta x)(a-x)^2 H_0(a-x)x dx = \int_0^a I_0(\beta x)(a-x)^2 x dx;$$

$$\int I_0(x)dx = 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n I_{2n+1}(x); \quad \int I_1(x)x dx = I_0(x)x - 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n I_{2n+1}(x);$$

$$\int I_0(x)x^2 dx = I_1(x)x - \int I_1(x)x dx = -I_0(x)x + 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n I_{2n+1}(x);$$

$$\int_0^1 I_0(\beta x)(a-x)^2 H_0(a-x)x dx = \int_0^a I_0(\beta x)(a-x)^2 x dx = \int_0^a I_0(\beta x)\left(x^2 - 2x + a^2\right)x dx = \frac{a^3}{\beta} I_1(\beta a) +$$

$$+ \left(\frac{a^3}{\beta} I_1(\beta a) - \frac{2a^2}{\beta^2} I_2(\beta a)\right) - 2\left[\frac{a^3}{\beta} I_1(\beta a) - \frac{1}{\beta^2}\left(a^3 I_0(\beta a) - \frac{2a}{\beta}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m I_{2m+1}(\beta a)\right)\right] =$$

$$= -\frac{2a^2}{\beta^2} I_2(\beta a) + \frac{2a^2}{\beta^2} I_0(\beta a) - \frac{4a}{\beta^3}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m I_{2m+1}(\beta a) = \frac{2}{\beta^2}\frac{2a}{\beta} I_1(\beta a) - \frac{4a}{\beta^3}\sum_{m=0}^{\infty} J_{2m+1}(\beta a) =$$

$$= \frac{4a}{\beta^3}\left\{I_1(\beta a) - \sum_{n=0}^{\infty} I_{2n+1}(\beta a)\right\} = -\frac{4a}{\beta^3}\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m I_{2m+1}(\beta a).$$

В результате

$$\int_0^1 I_0(\beta x)(a-x)^2 H_0(a-x)x dx = -\frac{4a}{\beta^3}\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m I_{2m+1}(\beta a).$$

Выводы. В работе взят ряд новых неопределенных и определенных интегралов, содержащих произведение степенных, бесселевых и обобщенных функций.

Abstract. The author considers some integrals containing the product of power and Bessel functions.

Литература

1. Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая, Д. В. Леоненко, *Локальные и импульсные нагружения трехслойных элементов конструкций*, Гомель, БелГУТ, 2003.

2. Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Таблицы интегральных преобразований*, **1**, **2**, Москва, Наука, 1970.

3. А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев, *Интегралы и ряды*, В 3 т., **2**, Специальные функции, Москва, Физматлит, 2003.

Белорусский государственный
университет транспорта

Поступило 31.08.05