Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, №6(39), **1**, 2006

*УДК 553:548*

# Модовые и энергетические характеристики векторных бесселевых световых полей

С. С. Гиргель

## Введение

В последние годы большой интерес вызывают электромагнитные поля с бесселевым [1-10] поперечным профилем, которые являются бездифракционными и обладают целым рядом интересных свойств. Однако в большинстве работ авторы ограничиваются скалярным приближением. Такой подход является заведомо приближенным, так как световые поля являются трехмерными. Цель данной работы – на основе единого подхода получить и исследовать модовые, поляризационные и энергетические характеристики векторных бесселевых монохроматических световых полей.

Из уравнений Максвелла следует уравнение Гельмгольца, которое для бездифракционных электромагнитных полей вида $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}_\perp)e^{ik_{II}z}$ сводится к

$$(\nabla_\perp^2 + k_\perp^2)\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}_\perp) = 0. \qquad (1)$$

Здесь и далее $k^2 = \omega^2 \varepsilon\mu / c^2$; $k_0 = \omega / c$, $\boldsymbol{k}_\perp$, $\boldsymbol{r}_\perp$ и $\nabla_\perp$ – поперечные компоненты векторов:

Переход от скалярных к векторным полям – нетривиальная задача. Чтобы найти общие выражения для векторных пучков Бесселя, мы применим модифицированный формализм векторных потенциалов Герца [11]. Пусть некоторый магнитный вектор Герца ***f(r)*** удовлетворяет векторному уравнению Гельмгольца (1), тогда вектор

$$\boldsymbol{E} = [\nabla, \boldsymbol{f}] \qquad (2)$$

будет вектором электрического поля соответствующего светового бесселева пучка ***E***-типа. Полное же выражение для векторного бесселева волнового поля - $\boldsymbol{E}(r,t) = \boldsymbol{E}\, exp(i(k_{II}z - \omega t))$. Теперь вектор поля $\boldsymbol{H}$ непосредственно выражается из уравнений Максвелла. Чтобы находить и исследовать разные моды, будем выбирать различные компоненты магнитного вектора ***f***, удовлетворяющие векторному уравнению (1).

### I. Бесселевы $PPE_x$-моды

Положим в (1) $f_1 = f_3 = 0$, $f_2 = (-i/k_{II})J_m(u)e^{i(k_{II}z + m\varphi)}$, тогда из (2) и уравнений Максвелла находим векторы поля пучка $PPE_{\underline{x}}$–мод (см. также [5, 6]):

$$\boldsymbol{E} = \left[ J_m \boldsymbol{e}_x + i\boldsymbol{e}_z \frac{k_\perp}{2k_{II}}\left(e^{-i\varphi}J_{m-1} - e^{+i\varphi}J_{m+1}\right)\right]; \qquad (3)$$

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{4k_{II}k_0\mu}\left[\begin{matrix} ik_\perp^2(J_{m-2}e^{-i\varphi}(\boldsymbol{e}_\rho + i\boldsymbol{e}_\varphi) - J_{m+2}e^{+i\varphi}(\boldsymbol{e}_\rho + i\boldsymbol{e}_\varphi)) + \\ + 2(k^2 + k_{II}^2)J_m\boldsymbol{e}_y - 2k_{II}k_\perp(J_{m-1}e^{-i\varphi} + J_{m-+1}e^{+i\varphi})\boldsymbol{e}_z \end{matrix}\right]. \qquad (4)$$

Здесь и далее, для краткости, у векторов полей опускается множитель $e^{i(k_{II}z + m\varphi)}$. $J_m(u)$ - функция Бесселя первого рода порядка *m*, $u = k_\perp\rho$. Так как $E_y$=0, то эти моды, следуя [3], назовем $PPE_x$-модами (плоско-поляризованными $E_x$-модами). Отметим, что, в отличие от вектора $\boldsymbol{E}$, поперечная составляющая вектора $\boldsymbol{H}$ *PPE*-моды уже не линейная, а эллиптическая. В книге Бельского [4] получены решения для бесселева пучка, поляризованного по оси OX, и вектор Пойнтинга. К сожалению, она содержит опечатки и в ней отсутствует выражение для *w* *PPE*-моды.

Перейдем теперь к расчету энергетических характеристик бесселевых мод. Усредненные по времени плотность энергии электромагнитного поля $w$ и вектор плотности потока энергии (вектор Пойнтинга) $\boldsymbol{S}$ без учета влияния частотной дисперсии определяются общими выражениями [4]:

$$w=(\varepsilon|\boldsymbol{E}|^2+\mu|\boldsymbol{H}|^2)/(16\pi); \qquad \boldsymbol{S}=c\,Re\left[\boldsymbol{E}^*,\boldsymbol{H}\right]/(8\pi). \tag{5}$$

Вычисляя, находим для бесселевых $PPE_x$-мод плотность энергии $w$ и вектор Пойнтинга $\boldsymbol{S}$:

$$w=\frac{1}{64\pi k_{II}^2 k_0\mu}\begin{bmatrix} +k_\perp^4(J_{m+2}^2+J_{m-2}^2)k^2+(4k_{||}^2k^2+(k^2+k_{||}^2)^2)J_m^2+ \\ +k_\perp^2(k^2+k_{||}^2)(J_{m+1}^2+J_{m-1}^2)+ \\ -k_\perp^2\left[2k_\perp^2 J_{m+1}J_{m-1}+(k^2+k_{||}^2)J_m(J_{m+2}+J_{m-2})\right]\cos 2\varphi \end{bmatrix}; \tag{6}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{S}=\frac{c}{6\pi\pi_{||}^2k_0\mu}\Big[&k_\perp^3(J_{m+1}J_{m-2}+J_{m-1}J_{m+2}-J_m(J_{m+1}+J_{m-1}))\sin 2\varphi\,\boldsymbol{e}_\rho+\\ &+k_\perp\begin{bmatrix}(3k_{||}^2+k^2)J_m(J_{m+1}+J_{m-1})+k_\perp^2[J_{m+1}J_{m+2}+J_{m-1}J_{m-2})- \\ -k_\perp^2(J_{m+1}J_{m-2}+J_{m-1}J_{m+2}+(J_{m+1}+J_{m-1})J_m)\cos 2\varphi\end{bmatrix}\boldsymbol{e}_\varphi+\\ &+(4(k_{||}^2+k_\perp^2)J_m^2-2k_\perp^2J_m(J_{m+2}+J_{m-2})\cos 2\varphi)\,\boldsymbol{e}_z\Big].\end{aligned} \tag{7}$$

Видим, что траектории потока энергии бездифракционного поля $PPE_x$-мод представляют собой сложные спиралевидные кривые с образующими вдоль оси $z$. При $m=0$ $S_\rho=S_\varphi=0$ и вектор Пойнтинга направлен строго вдоль оси пучка.

## II. Бесселевы ТЕ-моды

Положим в (1) $f_1=f_2=0,$ , $f_3=(-i/k_\perp)J_m(u)e^{i(k_{II}z+m\varphi)}$, тогда из (2) и уравнений Максвелла находим полные векторы поля пучка бесселевых $TE$-мод. Бесселевы поля, не имеющие продольной составляющей $E_z$ ($TE$-моды), описываются выражениями [7]:

$$\boldsymbol{E}=\frac{1}{2}\left[J_{m-1}(\boldsymbol{e}_\rho+i\boldsymbol{e}_\varphi)+J_{m+1}(\boldsymbol{e}_\rho+i\boldsymbol{e}_\varphi)\right]; \tag{8}$$

$$\boldsymbol{H}=\frac{1}{k_0\mu}\left[\frac{-ik}{2}\left[J_{m-1}(\boldsymbol{e}_\rho+i\boldsymbol{e}_\varphi)-J_{m+1}(\boldsymbol{e}_\rho+i\boldsymbol{e}_\varphi)\right]-J_mk_\perp\boldsymbol{e}_z\right]. \tag{9}$$

Вычисляя, находим, что плотность энергии поля $TE$-моды определяется выражением

$$w=\frac{c}{32\pi k_0^2\mu}\left[\left(k^2+k_{II}^2\right)(J_{m+1}^2+J_{m-1}^2)+2k_\perp^2J_m^2\right]. \tag{10}$$

Плотность потока энергии (вектор Пойнтинга) при этом равна

$$\boldsymbol{S}=\frac{c}{16\pi k_0\mu}\left[k_\perp J_m\left(k^2+k_{II}^2\right)(J_{m+1}+J_{m-1})\boldsymbol{e}_\varphi+k_{II}(J_{m+1}^2+J_{m-1}^2)\boldsymbol{e}_z\right] \tag{11}$$

Выражения (8)-(11) эквивалентны формулам в [5, 6], но представлены в более симметричных формах, не содержащих неопределенностей. Таким образом, видим, что для эллиптически поляризованных $TE$-мод $\boldsymbol{E}_\rho \parallel \boldsymbol{H}_\varphi$, $\boldsymbol{E}_\varphi \parallel \boldsymbol{H}_\rho$. поперечные составляющие векторов $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ перпендикулярны; в) нет радиальной составляющей вектора потока энергии, а его линии представляют собой сложные спирали с осью вдоль оси $z$.

## III. Циркулярные *E*-моды

Теперь рассмотрим циркулярно-поляризованные $\boldsymbol{E}$-моды. Суперпозиция $PPE_x$ и $PPE_y$ мод приводит к циркулярным $\boldsymbol{E}$-модам [7]:

$$\boldsymbol{E} = \left[ J_m \left( \boldsymbol{e}_\rho \pm i \boldsymbol{e}_\varphi \right) \mp i \frac{k_\perp}{k_{II}} J_{m\pm1} \boldsymbol{e}_z \right] e^{\pm i\varphi} . \qquad (12)$$

Заметим, что поперечные компоненты вектора магнитного поля не являются строго циркулярными, а имеют некоторую эллиптичность, зависящую от $\rho$:

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{k_0 \mu} \left[ \frac{\mp i}{2k_{II}} \left[ k_\perp^2 ( \boldsymbol{e}_\rho \mp i \boldsymbol{e}_\varphi ) J_{m\pm2} + (k^2 + k_\perp^2)( \boldsymbol{e}_\rho \pm i \boldsymbol{e}_\varphi ) J_m \right] - k_\perp J_{m\pm1} \boldsymbol{e}_z \right] e^{\pm i\varphi} . \qquad (13)$$

Плотность энергии $w$ и плотность потока энергии для циркулярных $\boldsymbol{E}$-мод равны:

$$w = \frac{\varepsilon}{32\pi k_{II}^2 k^2} \left[ ((k^2 + k_{II}^2)^2 + 4k^2 k_{II}^2) J_m^2 + 2k_\perp^2 (k^2 + k_{II}^2) J_{m\pm1}^2 + k_\perp^4 J_{m\pm2}^2 \right]; \qquad (14)$$

$$\boldsymbol{S} = \frac{c}{8\pi k_0 \mu k_{II}} \left[ \frac{k_\perp}{2k_{II}} J_{m\pm1} ((k^2 + 3k_{II}^2) J_m + k_{II}^2 J_{m\pm2}) \boldsymbol{e}_\varphi + (k_{II}^2 + k^2) J_m^2 \boldsymbol{e}_z \right]. \qquad (15)$$

Выражения (12)-(15) эквивалентны формулам в [8], но представлены в более симметричных формах, не содержащих неопределенностей Таким образом, для право- и левоциркулярных бесселевых мод нет радиальной составляющей потока энергии $S_\rho$. В то же время для линейных мод $S_\rho \neq 0$. С другой стороны, линейные моды можно представить как суперпозицию двух циркулярных. Возникает парадокс. Этот парадокс можно объяснить интерференцией, возникающей между право- и левоциркулярными модами. Интерференция происходит из-за разных скоростей мод, зависящих от угла $\varphi$(различные фазовые множители $e^{i(m+1)\varphi}$ и $e^{i(m-1)\varphi}$).

### IV. Радиально и азимутально поляризованные *E*-моды Бесселя

Из (12) можно найти выражения для векторов поля азимутально поляризованных

$$\boldsymbol{E} = J_1 \boldsymbol{e}_\varphi; \qquad k_0 \mu \boldsymbol{H} = -k_{II} J_1 \boldsymbol{e}_\rho + -i k_\perp J_0 \boldsymbol{e}_z ; \qquad (16)$$

и радиально поляризованных

$$\boldsymbol{E} = (-k_{II} J_1 \boldsymbol{e}_\rho + -i k_\perp J_0 \boldsymbol{e}_z)/k; \qquad k_0 \mu \boldsymbol{H} = k J_1 \boldsymbol{e}_\varphi \qquad (17)$$

(по вектору $\boldsymbol{E}$) бесселевых $\boldsymbol{E}$-мод. Эти моды даже по поляризации являются азимутально симметричными. При этом плотность энергии электромагнитного поля и плотность потока энергии в обоих случаях для таких мод соответственно равны:

$$w = \frac{\varepsilon}{16\pi k^2} \left[ (k^2 + k_{II}^2) J_1^2 + k_\perp^2 J_0^2 \right]; \qquad \boldsymbol{S} = \frac{c k_{II}}{8\pi k_0 \mu} J_1^2 \boldsymbol{e}_z . \qquad (18)$$

(16) – это так называемый азимутально поляризованный пучок Бесселя, в котором поток энергии направлен строго вдоль оси $Z$ и пропорционален $J_1^2$. Так как непосредственно на оси пучка $\boldsymbol{S} = 0$, то такой пучок является полым. Недавно было обнаружено [2], что некоторые типы полупроводниковых лазеров испускают инфракрасный циркулярно-симметричный азимутально поляризованный световой $J_1$-пучок.

Путем суперпозиции *PPE*-мод, рассмотренных выше можно получить эллиптически поляризованные $\boldsymbol{E}$-моды [6], у которых $\boldsymbol{E}_\perp = J_m \left( \boldsymbol{e}_x + i\gamma \boldsymbol{e}_y \right) e^{im\varphi}$.

В (1) и (2) мы применяли магнитный вектор Герца и получали бесселевы моды $\boldsymbol{E}$-типа. Аналогично можно вводить электрический вектор Герца условием $\boldsymbol{H} = [\nabla, \boldsymbol{f}]$ и далее вычислять моды $\boldsymbol{H}$-типа. Но уравнения Максвелла инвариантны относительно замен $\boldsymbol{E} \leftrightarrow \boldsymbol{H}$, $\varepsilon \leftrightarrow (-\mu)$. Поэтому проще, используя отмеченную выше инвариантность, из соотношений для мод $\boldsymbol{E}$-типа сразу получать аналогичные соотношения для мод $\boldsymbol{H}$-типа. Действительно, тогда сразу получаем бесселевы *PPH*-моды, *TH*-моды, циркулярные $\boldsymbol{H}$-моды, радиально и азимутально поляризованные $\boldsymbol{H}$-моды и т.д. При этом $\boldsymbol{S} \to -\boldsymbol{S}$, $w \to -w$.

Вопрос о бесселевых пучках в кристаллах сложен и требует дальнейших исследований. Заметим только, что в одноосных кристаллах бесселевы моды *o*-типа вдоль оптической оси - фактически *TE*-моды, а перпендикулярно оси – бесселевы *PPE*-моды [10].

## Заключение

Для нахождения и исследования модовых и поляризационных характеристик векторных бесселевых световых полей различных типов в однородных средах применен модифицированный формализм векторных потенциалов Герца.

Получены полные решения для бесселевых *PPE*-мод, *TE*-мод, циркулярных ***E***-мод, радиально и азимутально поляризованных ***E***-мод. Поляризация векторов поля световых бесселевых пучков является эллиптической и неоднородной по поперечному сечению пучка. Она сложным образом зависит от $\rho$ и $\varphi$.

Установлено, что поляризационные и энергетические характеристики бесселевых мод обладают, вообще говоря, сложными радиальными- (произведениями функций Бесселя $J_m, J_{m\pm1}, J_{m\pm2}$) и азимутальными зависимостями.

Впервые получены строгие выражения для плотности и потока энергии бесселевых пучков для различных мод. Установлено, что поток энергии $\boldsymbol{S}$ в общем случае имеет три составляющие ($S_\rho$, $S_\varphi$ и $S_z$).

Показано, что заменами $\boldsymbol{E} \leftrightarrow \boldsymbol{H}$, $\varepsilon \leftrightarrow (-\mu)$ из соотношений для бесселевых мод ***E***-типа можно сразу получать аналогичные соотношения для бесселевых мод ***H***-типа.

Найденные результаты могут быть использованы при расчетах преобразования бессель-гауссовых пучков различными оптическими системами и могут служить теоретической базой при соответствующих экспериментальных исследованиях.

**Abstract.** On the basis of the modified formalism of the vector potentials of the Hertz modal, polarization and energy properties of the vector Bessel light fields ***E***- and ***H***-modes of various types are found and explored.

## Литература

1. J. Durnin, Exact solutions for nondiffracting beams. I. The scalar theory, J.Opt. Soc. Am. A, **4**, № 4 (1987), 651–654.
2. Z. Bouchal, Nondiffracting optical beams, Czechoslovak Journal of Physics, 53, № 7 (2003), 537-548.
3. K. Shimoda, Exact solutions of field vectors of diffraction-free electromagnetic waves, Journ. Phys. Soc. Japan, .**60**, №.2 (1991), 450 – 454.
4. А. М. Бельский, Оптика когерентных световых пучков, Минск, БГУ,2000.
5. S. S. Girgel, S. N. Kurilkina, Vectorial of Bessel light beams, Proc. SPIE, **4358** (2001), 258-264.
6. С. С. Гиргель Поляризационные и энергетические свойства бесселевых волновых полей, Известия Гомельского госуниверситета им. Ф. Скорины, № 6(9) (2001), 146-149.
7. С. С. Гиргель бесселевы световые пучки, там же, № 3(30) (2005), 93-149.
8. S. S. Girgel, S. N. Kurilkina, Vectorial of Bessel light beams, Proc. SPIE, **4358** (2001), 258-264.
9. Н. Казак, В. Белый, Н. Хило, Бесселевы световые пучки: свойства и перспективы применения, Наука и инновации, №.7-8 (2003), 9-18.
10. С. С. Гиргель, Световые пучки Бесселя в одноосных кристаллах. I. Моды *o*-типа, Материалы Международной конференции «Лазерная физика и применения лазеров», Беларусь, г. Минск,14-16 мая 2003 г., 78-79.
11. Л. А. Вайнштейн, Электромагнитные волны, Москва, Радио и связь, 1988.

Гомельский государственный
университет имени Ф. Скорины

Поступило 11.09.06