

УДК 512.542

Конечные группы с X -полуперестановочными подгруппами

М. С. СКРИПАЧЕВА

Все группы предполагаются конечными. Напомним, что подгруппы A и B называются перестановочными, если $AB = BA$. Часто встречается ситуация, когда подгруппы A и B группы G не являются перестановочными, но в G имеется такой элемент x , для которого имеет место $AB^x = B^x A$ [1,2].

Это приводит к следующим определениям, введенным в работах [1,2].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть A, B — подгруппы группы G и $\emptyset \neq X \subseteq G$. Тогда:

1) Подгруппа A X -перестановочна с подгруппой B , если существует такой элемент $x \in X$ что $AB^x = B^x A$;

2) Подгруппа A X -полуперестановочна в группе G , если A X -перестановочна со всеми подгруппами некоторого добавления T к A в G .

Используя понятие X -полуперестановочности, можно ахарактеризовать многие важные классы групп по наличию в них тех или иных X -полуперестановочных подгрупп для подходящих X . Новые характеристики в терминах X -полуперестановочных подгрупп для классов нильпотентных и сверхразрешимых групп были даны нами в [3]. Следующая теорема дополняет эти результаты.

Теорема. Пусть G — группа и $X = F(G)$ — ее подгруппа Фиттинга. Тогда G сверхразрешима, если все максимальные подгруппы всех ее нециклических силовских подгрупп X -полуперестановочны в G .

Доказательство. Предположим, что данная теорема не верна, и пусть G — контрпример минимального порядка. Тогда справедливы следующие утверждения:

(1) Факторгруппа G/H сверхразрешима для любой неединичной нормальной подгруппы H из G .

Пусть H — неединичная нормальная подгруппа группы G . Тогда, поскольку $|G/H| < |G|$, необходимо лишь проверить, что условие теоремы верно для G/H . Пусть P/H — нециклическая силовская q -подгруппа в G/H и P_1/H — произвольная максимальная в P/H подгруппа. Покажем, что подгруппа P_1/H $F(G/H)$ -полуперестановочна в G/H . Так как P/H — силовская q -подгруппа в G/H , то в G найдется такая силовская q -подгруппа P_q , что $P/H = P_q H/H$. Покажем, что $P_1 \cap P_q$ — максимальная в P_q подгруппа. Заметим, что $P_1 \cap P_q \neq P_q$. Действительно, в противном случае $P_q \subseteq P_1$, а значит, $P_1/H = P_q H/H = P/H$, что противоречит выбору подгруппы P_1/H . Допустим, что в группе G имеется такая подгруппа T , что $P_1 \cap P_q \subset T \subset P_q$. Тогда $P_1 = H(P_1 \cap P_q) \subseteq TH \subseteq HP_q = P$. Но P_1 — максимальная в P подгруппа и поэтому либо $P_1 = TH$, либо $TH = HP_q$. Если $P_1 = TH$, то $T \subseteq P_1 \cap P_q \subset T$, что невозможно. Итак, $TH = HP_q$, и поэтому $P_q = P_q \cap TH = T(P_q \cap H) \subseteq T(P_1 \cap P_q) = T$. Вновь полученное противоречие показывает, что $P_1 \cap P_q$ — максимальная в P_q подгруппа. Понятно, что группа P_q не является циклической, и поэтому, согласно условию, подгруппа $P_1 \cap P_q$ X -полуперестановочна в G . Значит, по [2; лемма 2.4(2)] подгруппа $(P_1 \cap P_q)H/H$ XH/H -полуперестановочна в G/H . Но $XH/H \subseteq F(G/H)$, поэтому мы можем заключить, что все максимальные подгруппы любой силовской подгруппы из G/H $F(G/H)$ -полуперестановочны в G/H . Таким образом, условие теоремы наследуется факторгруппой G/H . В силу выбора группы G , имеем (1).

(2) В группе G имеется лишь одна минимальная нормальная подгруппа, скажем L (это прямо вытекает из того хорошо известного факта, что класс всех сверхразрешимых групп замкнут относительно образования подпрямых произведений).

(3) Минимальная нормальная подгруппа L является абелевой p -группой, для некоторого простого p .

Предположим, что это не так. Тогда, в силу (2), $X = 1$. Пусть p — наименьший простой делитель порядка группы G . Тогда силовская p -подгруппа P в группе G не является циклической.

Пусть P_1 и P_2 — две различные максимальные подгруппы группы P , тогда $P = P_1 P_2$.

Пусть $T \in X(P_1)$, тогда $G = P_1 T$ и $|G : T| = \frac{|G|}{|T|} = \frac{|P_1 T|}{|T|} = \frac{|P_1| |T|}{|T|} = |P_1| = p^\alpha$, для некоторого натурального α . Это означает, что любая силовская q -подгруппа из T является силовской и в G . Пусть T_q — силовская q -подгруппа из T , Q — силовская q -подгруппа в G . Тогда $Q = T_q^x$, для некоторого $x \in G$. По условию подгруппа P_1 перестановочна со всеми подгруппами из T , а по [2; лемма 2.4(6)], для всех $x \in G$ имеем $T^x \in X(P_1)$, поэтому $P_1 Q = Q P_1$. Рассуждая аналогично, получим $P_2 Q = Q P_2$. Тогда подгруппа Q перестановочна с подгруппой $\langle P_1, P_2 \rangle$. Это означает, что $PQ = QP$. Теперь нетрудно показать, что группа G разрешима. Значит, подгруппа L является абелевой p -группой.

(4) $L = C_G(L) = X = F(G) = O_p(G)$, для некоторого простого p .

Так как по (1), факторгруппа G/L сверхразрешима, то все ее максимальные подгруппы имеют простые индексы. Из сверхразрешимости факторгруппы $G/\Phi(G)$ следует сверхразрешимость самой группы. Но, по предположению, группа G не является сверхразрешимой, поэтому $L \not\subseteq \Phi(G)$. Пусть $C = C_G(L)$ и M — максимальная в G подгруппа, такая, что $G = LM$. Тогда $C = C \cap G = C \cap LM = L(C \cap M)$. Так как $L \trianglelefteq G$, то $C \trianglelefteq G$. Тогда, очевидно, подгруппа $C \cap M$ нормальна в G . Это, согласно (2), означает, что $C = L$.

(5) *Заключительное противоречие.*

Пусть P — силовская p -подгруппа в G . Если $L \subseteq \Phi(P)$, то $L \subseteq \Phi(G)$. Но, как уже было показано выше, это невозможно, поэтому $L \not\subseteq \Phi(P)$. Значит, в P найдется такая максимальная подгруппа P_1 , что $L \not\subseteq P_1$ и $P = LP_1$. Пусть $T \in X(P_1)$. Пусть $T_{p'}$ — p' -холлова подгруппа в T . По условию теоремы, подгруппа P_1 X -полуперестановочна в G . В виду (4), $L = X$. Поэтому $P_1 T_{p'}^x = T_{p'}^x P_1$, для некоторого $x \in L$. Пусть $D = P_1 T_{p'}^x$. $|G : D| = \frac{|G|}{|D|} = \frac{|P_1 T|}{|P_1 T_{p'}^x|} = \frac{|P_1| |T|}{|P_1| |T_{p'}^x|} = |T : T_{p'}^x| = p$, поэтому D — максимальная в G подгруппа. Предположим, что $L \subseteq D$. Тогда $P = P_1 L \leq D$. Противоречие, поэтому $L \not\subseteq D$. Значит, $G = LD$. Так как $L \trianglelefteq G$ и $D \leq G$, то $L \cap D \trianglelefteq D$. Так как L абелева, то $L \cap D \trianglelefteq L$. Следовательно, $L \cap D \trianglelefteq G$, а в силу (2), $L \cap D = L$ или $L \cap D = 1$. Это означает, что L — абелева простая группа. Итак, подгруппа L — циклическая группа простого порядка. Согласно (1), факторгруппа G/L сверхразрешима. Значит, и группа G сверхразрешима. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

Abstract. It is proved that a finite group G is supersoluble if all maximal subgroups of all non-cyclic Sylow subgroups of G are $F(X)$ -semipermutable in G .

Литература

1. W. Guo, K. P. Shum and A. N. Skiba, *Conditionally Permutable Subgroups and Supersolubility of Finite Groups*, Seams Bull Math., 29, № 2 (2005).

2. W. Guo, K. P. Shum and A. N. Skiba, *X-Semipermutable Subgroups*, Gornel, 2004, 16 p. (Preprint/GSU F. Skoriny; No. 10).

3. M. S. Skripacheva, *Finite groups with given X-semipermutable subgroups*, 5th International Algebraic Conference in Ukraine, Odessa: Materials of Conference, July 20–27, 2005, 180.

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступило 31.08.05

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ