

РАССЕЯНИЕ СВЕТА НА ЭЛЕКТРОНАХ  
ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНОЙ ПЛАЗМЫ

В. А. Журавлев и Г. Д. Петров

Рассмотрено рассеяние света на электронах релятивистской плазмы в отсутствие коллективных взаимодействий. В рамках сделанных предположений получены приближенные выражения, описывающие в ряде случаев спектральный состав и индикатрису рассеянного излучения.

В последние годы в диагностике плазмы все шире используется метод томсоновского рассеяния. Разработанная ранее [1] теория метода для низкотемпературной плазмы вполне удовлетворительно описывает результаты многочисленных экспериментов. В то же время рассеяние излучения высокотемпературной релятивистской плазмой изучено недостаточно, выводы существующей теории [2] в ряде случаев практически не могут быть использованы. В настоящей работе делается попытка на основе простых соображений дать описание рассеяния плоской монохроматической световой волны высокотемпературной разреженной плазмой.

Обычно [1] спектр рассеянного излучения находится усреднением Фурье-трансформанты плотности функции распределения электронов. В случае высокотемпературной плазмы при нахождении статистического среднего необходимо учесть влияние магнитного поля падающей волны и ввести зависимость величины электрического поля, ускоряющего электрон, от его скорости, а движение электрона следует описывать релятивистскими уравнениями [2].

В дальнейшем плазма полагается неограниченной и изотропной, влияние столкновений и внешнего магнитного поля считаем пренебрежимо малым. Используется прямоугольная система координат, волновой вектор падающего излучения  $k_0$  направлен вдоль оси  $Z$ , рассеивающий объем находится в начале координат. Решение ищется в дальней зоне.

Задача о рассеянии фотонов свободным релятивистским электроном рассмотрена в [3]. Пренебрегая членами порядка  $\omega_0/m$ , где  $\omega_0$  — частота падающего фотона, а  $m$  — масса покоя электрона, в лабораторной системе координат для дифференциального сечения рассеяния фотонов  $d\sigma^*$  на неполяризованных электронах можно записать

$$\frac{d\sigma^*}{d\omega} = r_0^2 \frac{1-v^2}{(1-v \cos \theta_2)^2} \left\{ \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \left[ \frac{(1-v^2)(1-\cos \theta)}{(1-v \cos \theta_1)(1-v \cos \theta_2)} \right]^2 \right\}, \quad (1)$$

где  $r_0$  — классический радиус электрона;  $v$  — скорость электрона, составляющая углы  $\theta_1, \theta_2$  с волновыми векторами падающего  $k_0$  и рассеянного излучения  $k_1$ ;  $\theta$  — угол между  $k_0$  и  $k_1$ ;  $\alpha, \beta$  — углы между нормалью к плоскости рассеяния  $YOZ$  и векторами поляризации соответственно падающего и рассеянного излучения,  $\omega$  — телесный угол.

Здесь и далее используется система единиц, в которой скорость света  $c$  и постоянная Планка  $\hbar$  равны единице.

Без учета отдачи электрона частота излучения  $\omega_1$ , рассеянного под углом  $\theta$ , может быть записана [3, 4]

$$\omega_1 = \omega_0 \frac{1-v \cos \theta_1}{1-v \cos \theta_2}. \quad (2)$$



Определяя обычным образом<sup>[3, 4]</sup> потоки падающих и рассеянных фотонов и используя  $|E|^2 = nf$ , где  $E$  — напряженность электрического поля,  $n$  — число фотонов частоты  $f$ , для поляризованного излучения из (1), (2) находим

$$\frac{d\sigma}{d\omega} = \frac{\omega_1^2}{\omega_0^2} \frac{d\sigma^*}{d\omega} = \frac{r_0^2 \omega_1^2 (1 - v^2)}{\omega_0^2 (1 - v \cos \theta_2)^2} \times \\ \times \left\{ \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \left[ 1 - \frac{(1 - v^2) (1 - \cos \theta)^2}{(1 - v \cos \theta_1) (1 - v \cos \theta_2)} \right]^2 \right\}. \quad (3)$$

Суммируя (3) по состояниям поляризации рассеянных волн и усредняя по поляризации падающих, определяем сечение рассеяния  $d\sigma_{\text{н}}/d\omega$  неполяризованного излучения

$$\frac{d\sigma_{\text{н}}}{d\omega} = \frac{r_0 \omega_1^2 (1 - v^2)}{2\omega_0^2 (1 - v \cos \theta_2)^2} \left\{ 1 + \left[ 1 - \frac{(1 - v^2) (1 - \cos \theta)}{(1 - v \cos \theta_1) (1 - v \cos \theta_2)} \right]^2 \right\}. \quad (4)$$

Отметим, что, полагая в последнем равенстве  $v = 0$  и привлекая (2), получаем формулу Томсона<sup>[4]</sup>

$$\frac{d\sigma_{\text{Т}}}{d\omega} = \frac{r_0^2}{2} (1 + \cos^2 \theta). \quad (5)$$

Умножая правую часть (3) на  $\delta$ -функцию от  $(\omega - \omega_1/\omega_0)$ , где  $\omega$  — текущая безразмерная частота рассеянного излучения, отнесенная к частоте падающего света, при  $\alpha = \beta = 0$  получим

$$\frac{d\sigma}{d\omega} = \frac{r_0^2 \omega_1^2 (1 - v^2)}{\omega_0^2 (1 - v \cos \theta_2)^2} \delta\left(\omega - \frac{\omega_1}{\omega_0}\right). \quad (6)$$

Практически для любой высокотемпературной плазмы при не слишком малых  $\theta$  выполняется условие, означающее отсутствие коллективных взаимодействий,

$$\frac{\lambda_0}{\sin \theta/2} \sqrt{\frac{4\pi n_e^2}{T}} \ll 1, \quad (7)$$

где  $n_e$  — концентрация электронов,  $T$  — электронная температура в энергетических единицах,  $\lambda_0$  — длина волны падающего излучения.

В первом приближении такую плазму можно считать релятивистским газом с максвелловским распределением электронов по скоростям<sup>[5]</sup>

$$f(v) = A \frac{v^2 \exp\left\{-\frac{m}{T} (1 - v^2)^{-1/2}\right\}}{(1 - v^2)^{5/2}}, \quad (8)$$

где  $f(v)$  — плотность функции распределения электронов по модулям скоростей,  $A$  — нормировочная постоянная, равная

$$A = \left\{ 2 \left(\frac{T}{m}\right)^2 K_1\left(\frac{m}{T}\right) + \left(\frac{T}{m}\right) K_0\left(\frac{m}{T}\right) \right\}^{-1}, \quad (9)$$

здесь  $K_1$ ,  $K_2$  — функции Макдональда (функции Ганкеля мнимого аргумента).

В телесном угле  $d\Omega$  движется  $f(v) d\Omega/4\pi$  электронов, отсюда сечение для потока излучения, рассеянного под углом  $\theta$ ,

$$\sigma(\omega, \theta) = \int_0^1 I f(v) dv; \quad (10)$$

здесь

$$I = \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} \sigma d\Omega. \quad (11)$$



Перейдем в систему координат  $(r, \theta_1, \theta_2)$ , где  $r$  — текущий радиус-вектор,  $\theta_1$  и  $\theta_2$  сохраняют прежний смысл. Тогда

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{r}{\sin \theta} \sqrt{\sin^2 \theta - \cos^2 \theta_1 - \cos^2 \theta_2 + 2 \cos \theta \cos \theta_1 \cos \theta_2} = \frac{r}{\sin \theta} \sqrt{R}, \\ y &= \frac{r}{\sin \theta} (\cos \theta_2 - \cos \theta_1 \cos \theta), \\ z &= r \cos \theta_1. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Координатными поверхностями системы (12) являются два круговых конуса с углами раствора  $\theta_1$  и  $\theta_2$  и осями, совпадающими соответственно с  $k_0$  и  $k_1$ , третья координатная поверхность — сфера радиуса  $r$ .

Так как область интегрирования (10) при  $x \geq 0$  есть

$$\left. \begin{aligned} 0 &\leq r \leq 1, \\ 0 &\leq \theta_1 \leq \pi, \\ |\theta - \theta_1| &\leq \theta_2 \leq \pi - |\pi - \theta - \theta_1|, \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

то в силу изотропности функции распределения при вычислении (11) результат интегрирования по полупространству необходимо удвоить. Элемент объема  $dV$  в системе (12) выражается [6]

$$dV = dx dy dz = \sqrt{g} dr d\theta_1 d\theta_2, \quad (14)$$

где

$$\sqrt{g} = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta_1, \theta_2)} = \frac{r^2 \sin \theta_1 \sin \theta_2}{\sqrt{R}}. \quad (15)$$

С учетом условия (13) выражение (11) в новой системе координат принимает вид

$$I = \frac{r_0^2 (1 - v^2)}{2\pi} \int_0^\pi \sin \theta_1 d\theta_1 \int_{|\theta - \theta_1|}^{\pi - |\pi - \theta - \theta_1|} \frac{\omega_1^2 \sin \theta_2 \delta(\omega - \omega_1/\omega_0)}{\omega_0^2 (1 - v \cos \theta_2)^2 \sqrt{R}} d\theta_2. \quad (16)$$

В интервал интегрирования (16) по  $\theta_2$  попадает лишь один корень  $\theta_2^*$  уравнения

$$\omega - \omega_1/\omega_0 = 0, \quad (17)$$

что позволяет записать

$$\delta\left(\omega - \frac{\omega_1}{\omega_0}\right) = \delta(\theta_2 - \theta_2^*) \left| \frac{\partial}{\partial \theta_2} \left(\omega - \frac{\omega_1}{\omega_0}\right) \right|_{\theta_2 = \theta_2^*}^{-1}. \quad (18)$$

Тогда интеграл (16) равен

$$I = \frac{r_0^2 \omega^2 (1 - v^2)}{2\pi v} \int_{\theta_1^a}^{\theta_1^b} \frac{\sin \theta_1 d\theta_1}{\omega (1 - v \cos \theta_2^*) \sqrt{R}(\theta_2^*)}. \quad (19)$$

Пределы интегрирования в (19) находятся из решения уравнения (17) совместно с двумя последними равенствами (13), откуда

$$\cos \theta_1^{a,b} = \sin \varphi \sin \chi \mp \cos \varphi \cos \chi, \quad (20)$$

где  $\sin \varphi = (1 - \omega \cos \theta)/q$ ,  $\sin \chi = (1 - \omega)/(vq)$ ,  $q^2 = 1 - 2\omega \cos \theta + \omega^2$ .

Так как  $|\sin \chi| \leq 1$ , то

$$v_{\min} \leq v \leq 1, \quad v_{\min} = \frac{|1 - \omega|}{\sqrt{1 - 2\omega \cos \theta + \omega^2}}. \quad (21)$$

Делая в (19) замену  $t = \omega^{-1}(1 - v \cos \theta_1)$ , получим

$$I = \frac{r_0^2 \omega^2 (1 - v^2)}{2\pi v} \int_{\theta_1^a}^{\theta_1^b} \frac{dt}{t \sqrt{-a + bt - q^2 t}} = \frac{r_0^2 \omega^2 (1 - v^2)}{4v \sin(\theta/2) \sqrt{1 - v^2 \cos^2(\theta/2)}}, \quad (22)$$



$$\left. \begin{aligned} a &= 4 \sin^2(\theta/2) (1 - v^2 \cos^2(\theta/2)), \\ b &= 2(1 + \omega)(1 - \cos \theta). \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

И, наконец, из (10), (22) и (21) для сечения рассеяния получаем

$$\sigma(\omega, \theta) = A \frac{r_0^2 \omega^2}{4 \sin^2 \theta/2} \int_{v_{\min}}^1 \frac{v \exp\{- (m/T)(1 - v^2)^{-1/2}\}}{(1 - v^2)^{3/2} \sqrt{1 - v^2 \cos^2 \theta/2}} dv.$$

Фиксируя в (24)  $\omega$ , получаем выражение для дифференциальной по спектру индикатрисы рассеяния  $\sigma_\omega(\theta)$ . На рис. 1 представлены типичные индикатрисы для ряда значений  $T$ . Обращает на себя внимание суще-

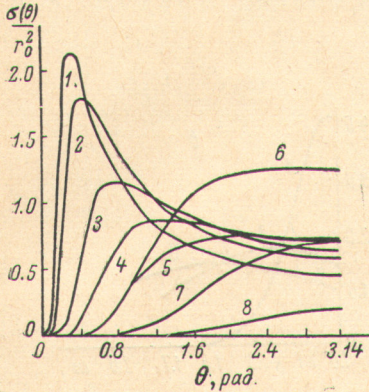


Рис. 1. Дифференциальные по спектру индикатрисы рассеяния в зависимости от температуры плазмы.

$\omega = 1.1$  для 1 —  $T = 50$  кэВ, 2 —  $T = 25$  кэВ;  $\omega = 1.5$  для 3 —  $T = 100$  кэВ, 4 —  $T = 50$  кэВ, 5 —  $T = 25$  кэВ;  $\omega = 3.0$  для 6 —  $T = 100$  кэВ, 7 —  $T = 50$  кэВ, 8 —  $T = 25$  кэВ.

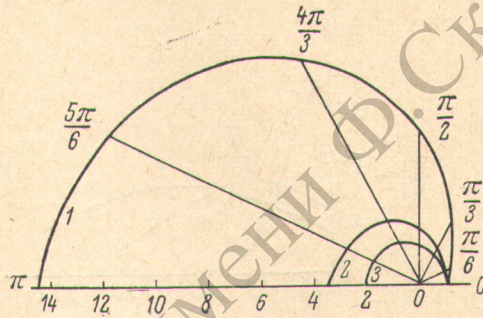


Рис. 2. Интегральные по спектру индикатрисы рассеяния для  $T$ , равной 100 (1), 50 (2), 25 кэВ (3).

ственная зависимость диаграммы направленности от  $T$ . Это обстоятельство позволяет проводить измерение электронной температуры плазмы по отношению интенсивностей потоков, рассеянных под разными углами в одном и том же спектральном интервале [8, 9].

Перейдем теперь к вычислению интегральных по спектру индикатрис рассеяния  $S(\theta)$

$$S(\theta) = \int_0^\infty \sigma(\omega, \theta) d\omega. \quad (25)$$

Используя (24) и меняя порядок интегрирования, находим

$$\begin{aligned} S(\theta) &= \frac{r_0^2}{3} \int_0^1 \left\{ 4 \left( \frac{1 - v^2 \cos^2 \theta}{1 - v^2} \right)^2 - 1 \right\} f(v) dv = \\ &= r_0^2 \left\{ 1 + \frac{16}{3} P_1 \sin^2 \frac{\theta}{2} + \frac{16}{3} P_2 \sin^4 \frac{\theta}{2} \right\}, \end{aligned} \quad (26)$$

где  $P_1$  и  $P_2$  выражаются через функции Макдональда  $K_3$  и  $K_4$  [7]

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= \int_0^1 \frac{v^2}{1 - v^2} f(v) dv = \frac{3}{(m/T)^2} K_3 \left( \frac{m}{T} \right), \\ P_2 &= \int_0^1 \left( \frac{v^2}{1 - v^2} \right)^2 f(v) dv = \frac{15}{(m/T)^3} K_4 \left( \frac{m}{T} \right). \end{aligned} \right\} \quad (27)$$



Для реальной плазмы отношение  $m/T$  велико, поэтому для вычисления  $K_1, K_2, K_3, K_4$  можно воспользоваться асимптотическими выражениями  $K_n$  [7]. Подставляя численное значение коэффициентов, получаем

$$\left. \begin{aligned} \frac{K_3(x)}{K_2(x)} &= 1 + \frac{2.5}{x} + \frac{1.85}{x^2} - \frac{1.81}{x^3} + \frac{1.28}{x^4}, \\ \frac{K_4(x)}{K_2(x)} &= 1 + \frac{6.0}{x} + \frac{14.88}{x^2} + \frac{11.2}{x^3} - \frac{10.75}{x^4} + \frac{6.7}{x^5}. \end{aligned} \right\} (28)$$

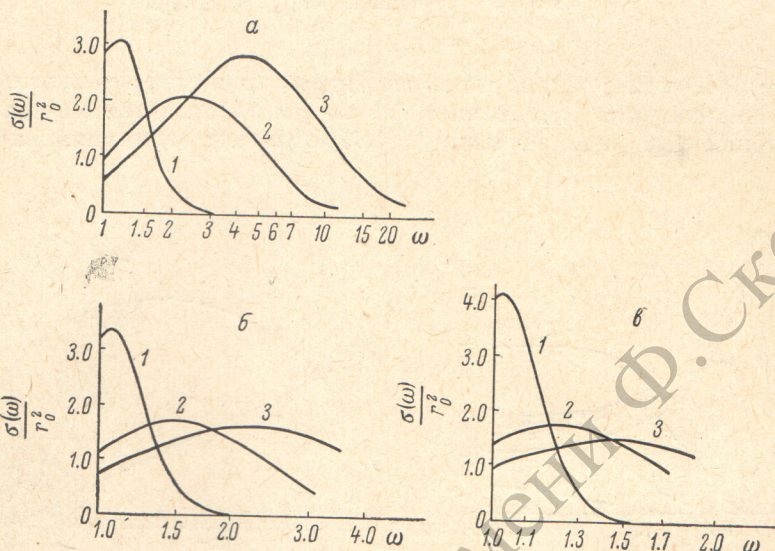


Рис. 3. Спектральные плотности рассеянного излучения для углов наблюдения  $\theta = \frac{\pi}{6}$  (1),  $\theta = \frac{\pi}{2}$  (2),  $\theta = \pi$  (3) для  $T = 100$  кэв (а);  $T = 50$  кэв (б) и 25 кэв (в).

Типичные энергетические интегральные индикатрисы рассеяния в лабораторной системе приведены на рис. 2. Увеличение сечения с ростом  $T$  соответствует росту энергии рассеиваемого фотона. Полное число рассеянных фотонов не зависит от  $T$ . В отличие

от дифференциальных индикатрис форма интегральных мало зависит от параметров плазмы. Поэтому при диагностике высокотемпературной плазмы методом индикатрис рассеяния следует использовать оптические фильтры.

Вычисленные из (24) спектральные плотности рассеянного излучения представлены на рис. 3, а, б, в. Видно, что при увеличении температуры при  $\theta = \pi/2, \pi$  максимумы излучения растут, тогда как спектр излучения под малыми углами  $\theta \approx \pi/6$  практически остается без изменений.

Введение релятивистских поправок может заметно уточнить получаемые спектры и при сравнительно небольших  $T$ . Так, при обработке результатов измерений (кривая 5 на рис. 4), полученных в одном из экспериментов

на Токомаке [10], при использовании обычной методики [1] было найдено значение  $T = 1$  кэв [11]. Расчет по формуле (24) дает для той же экспериментальной кривой значение  $T = 0.8$  кэв (рис. 4, кривая 3). Такая величина температуры гораздо ближе к измеренной другими методами [12].

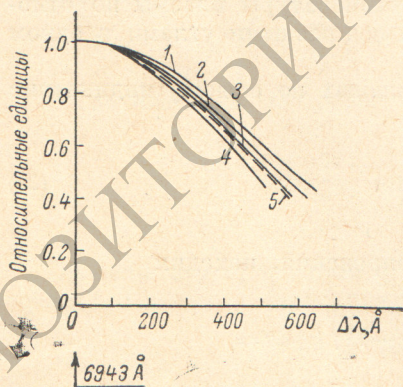


Рис. 4. Спектры рассеянного излучения, вычисленные по формуле (24) для  $T$ , равного 1 (1), 0.9 (2), 0.8 (3), 0.7 кэв (4); 5 — экспериментальная кривая [11].



### Литература

- [1] E. E. Salpeter. Phys. Rev., 120, 1235, 1960.
- [2] R. E. Pecharsek. Phys. Fluids., 10, 845, 1967.
- [3] А. И. Ахиезер, В. Б. Берестецкий. Квантовая электродинамика. Изд. «Наука», М., 1969.
- [4] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Теория поля. Изд. «Наука», М., 1967.
- [5] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Статистическая физика. Изд. «Наука», М., 1964.
- [6] А. Дж. Мак-Коннел. Введение в тензорный анализ. Физматгиз, М., 1963.
- [7] И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз, М., 1962.
- [8] Г. Д. Петров, Э. Ф. Юрчук. Ж. прикл. спектр., 12, 623, 1970.
- [9] Г. Д. Петров, Э. Ф. Юрчук, В. А. Журавлев. Опт. и спектр., 29, 832, 1970.
- [10] В. В. Санников. Атомная энергия, 29, 320, 1970.
- [11] N. J. Reasock. Nature, 224, 22, 1969.
- [12] Д. А. Щеглов. Письма в ЖЭТФ, 6, вып. 11, 1967.

Поступило в Редакцию 23 марта 1971 г.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ имени Ф. Скорины