Известия Гомельского государственного
университета им. Ф.Скорины, 6(27), 2004

Прикладная математика

УДК 514.8

Об алгебраическом методе разделения переменных в уравнении Дирака

И.Е.Андрушкевич

Многочисленные исследования посвящены развитию классического метода Фурье разделения переменных и его применению в решении прикладных задач (см, например, [1–5]). Эффективность данного метода наиболее полно и содержательно подтверждена исследованиями уравнения Дирака в случае наличия гравитационных и векторных полей.

Из всех существующих ныне подходов к решению указанных задач следует выделить метод коммутирующих операторов (МКО), предложенный в [6], который был развит в [7, 8]. Этот метод известен также как алгебраический метод разделения переменных.

В настоящей работе, развивая и расширяя указанный метод, мы находим два новых способа разделения переменных на примере уравнения Дирака.

Вначале напомним сущность алгебраического метода разделения переменных.

В пространстве с метрикой

$$ds^2 = A_1 \cdot \left(dx^1\right)^2 + A_2 \cdot \left(dx^2\right)^2 + A_3 \cdot \left(dx^3\right)^2 - A_4 \cdot \left(dx^4\right)^2 \tag{1}$$

($A_i\,, i = \overline{1,4}$ — произвольные положительно определенные функции переменных x^1, x^2, x^3, x^4), рассматривается уравнение Дирака

$$\begin{aligned} \Big\{ & \frac{\tilde\gamma^1}{\sqrt{A_1}}\left(\frac{\partial}{\partial x^1} - \frac{\partial \ln A_1}{4\partial x^1}\right) + \frac{\tilde\gamma^2}{\sqrt{A_2}}\left(\frac{\partial}{\partial x^2} - \frac{\partial \ln A_2}{4\partial x^2}\right) + \frac{\tilde\gamma^3}{\sqrt{A_3}}\left(\frac{\partial}{\partial x^3} - \frac{\partial \ln A_3}{4\partial x^3}\right) + \\ & + \frac{\tilde\gamma^4}{\sqrt{A_4}}\left(\frac{\partial}{\partial x^4} - \frac{\partial \ln A_4}{4\partial x^4}\right) + m_0 \Big\} \Phi = 0, \end{aligned} \tag{2}$$

где Φ - биспинор Дирака

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_1\left(x^1, x^2, x^3, x^4\right) \\ \Phi_2\left(x^1, x^2, x^3, x^4\right) \\ \Phi_3\left(x^1, x^2, x^3, x^4\right) \\ \Phi_4\left(x^1, x^2, x^3, x^4\right) \end{bmatrix}, \tag{3}$$

$\tilde\gamma^{\mathrm{i}}, \quad i = \overline{1,4}$ – матрицы Дирака размерности 4×4, удовлетворяющие соотношениям

$$\begin{gathered} [\tilde\gamma^{\mathrm{i}}, \tilde\gamma^{\mathrm{j}}]_+ = \tilde\gamma^{\mathrm{i}}\tilde\gamma^{\mathrm{j}} + \tilde\gamma^{\mathrm{j}}\tilde\gamma^{\mathrm{i}} = 2\eta^{\mathrm{ij}}\mathbf{E}\,; \;\; \eta^{\mathrm{ij}} = \mathrm{diag}\,(\,1, 1, 1, \,-1\,)\,; \\ \mathrm{i}, \mathrm{j} = \overline{1,4}\,; \quad \mathbf{E} = \mathrm{diag}\,(\,1, 1, 1, 1). \end{gathered} \tag{4}$$

Напомним, что для каждого конкретного случая выбора явного вида матриц (4) существует 16 линейно независимых матриц, через которые может быть выражена любая матрица Дирака [9]. Это матрицы:

$$\begin{gathered}\mathbf{E},\ \tilde\gamma^1,\ \tilde\gamma^2,\ \tilde\gamma^3,\ \tilde\gamma^4,\ \tilde\gamma^1\tilde\gamma^2,\ \tilde\gamma^1\tilde\gamma^3,\ \tilde\gamma^1\tilde\gamma^4,\ \tilde\gamma^2\tilde\gamma^3,\ \tilde\gamma^2\tilde\gamma^4,\\ \tilde\gamma^3\tilde\gamma^4,\ \tilde\gamma^1\tilde\gamma^2\tilde\gamma^3,\ \tilde\gamma^1\tilde\gamma^2\tilde\gamma^4,\ \tilde\gamma^1\tilde\gamma^3\tilde\gamma^4,\ \tilde\gamma^2\tilde\gamma^3\tilde\gamma^4,\ \tilde\gamma^1\tilde\gamma^2\tilde\gamma^3\tilde\gamma^4.\end{gathered}\tag{5}$$

Посредством МКО строится невырожденное линейное преобразование, приводящее представление оператора уравнения (2) к виду суммы двух коммутирующих операторов, каждый из которых действует по выделенной переменной

$$\hat{\mathbf{L}}\psi = 0 \ \leftrightarrow\ \left\{\hat{\mathbf{K}}_1 + \hat{\mathbf{K}}_2\right\}\Psi = 0,\ \hat{\mathbf{K}}_1\hat{\mathbf{K}}_2 - \hat{\mathbf{K}}_2\hat{\mathbf{K}}_1 = 0.\tag{6}$$

В [7] показано, что для осуществления в (2) полного разделения переменных МКО необходимо и достаточно выполнение хотя бы одного из четырех условий (7) – (10):

$$\begin{aligned}A_1(x^1,x^2,x^3,x^4) &= a_{11}(x^1)\cdot a_{21}(x^2)\ ,\\ A_2(x^1,x^2,x^3,x^4) &= a_{22}(x^2)\ ,\\ A_3(x^1,x^2,x^3,x^4) &= a_{23}(x^2)\cdot a_{33}(x^3)\cdot a_{43}(x^4)\ ,\\ A_4(x^1,x^2,x^3,x^4) &= a_{23}(x^2)\cdot a_{44}(x^4)\ ;\end{aligned}\tag{7}$$

$$\begin{aligned}A_1(x^1,x^2,x^3,x^4) &= a_{11}(x^1)\cdot a_{21}(x^2)\cdot a_{41}(x^4)\ ,\\ A_2(x^1,x^2,x^3,x^4) &= a_{22}(x^2)\ ,\\ A_3(x^1,x^2,x^3,x^4) &= a_{21}(x^2)\cdot a_{33}(x^3)\cdot a_{43}(x^4)\ ,\\ A_4(x^1,x^2,x^3,x^4) &= a_{21}(x^2)\cdot a_{44}(x^4)\ ;\end{aligned}\tag{8}$$

$$\begin{aligned}A_1(x^1,x^2,x^3,x^4) &= a_{11}(x^1)\cdot a_{21}(x^2)\cdot a_{41}(x^4)\ ,\\ A_2(x^1,x^2,x^3,x^4) &= a_{22}(x^2)\ ,\\ A_3(x^1,x^2,x^3,x^4) &= a_{21}(x^2)\cdot a_{33}(x^3)\ ,\\ A_4(x^1,x^2,x^3,x^4) &= a_{21}(x^2)\cdot a_{31}(x^3)\cdot a_{44}(x^4)\ ;\end{aligned}\tag{9}$$

$$\begin{aligned}A_1(x^1,x^2,x^3,x^4) &= a_{11}(x^1)\cdot a_{41}(x^4)\ ,\\ A_2(x^1,x^2,x^3,x^4) &= a_{22}(x^2)\cdot a_{42}(x^4)\ ,\\ A_3(x^1,x^2,x^3,x^4) &= a_{33}(x^3)\cdot a_{43}(x^4)\ ,\\ A_4(x^1,x^2,x^3,x^4) &= a_{44}(x^4)\ .\end{aligned}\tag{10}$$

Очевидно, что условия (7) – (10) не исчерпывают всех возможных случаев видов гравитационных полей, которые представляют интерес с точки зрения приложений [10], что ограничивает область применения МКО.

Действительно, пусть компоненты метрического тензора имеют вид

$$\begin{aligned}A_1(x^1,x^2,x^3,x^4) &= a_{11}(x^1)\cdot a_{21}(x^2)\ ,\\ A_2(x^1,x^2,x^3,x^4) &= a_{22}(x^2)\ ,\\ A_3(x^1,x^2,x^3,x^4) &= a_{23}(x^2)\cdot a_{3\,43}(x^3,x^4)\ ,\\ A_4(x^1,x^2,x^3,x^4) &= a_{23}(x^2)\cdot a_{3\,44}(x^3,x^4)\ .\end{aligned}\tag{11}$$

Ввиду (11), из (2) получаем [7]

$$\left\{\frac{\tilde\gamma^1}{\sqrt{a_{11}a_{21}}}\left(\frac{\partial}{\partial x^1}-\frac{\partial\ln a_{11}}{4\partial x^1}\right)+\frac{\tilde\gamma^2}{\sqrt{a_{22}}}\left(\frac{\partial}{\partial x^2}-\frac{\partial\ln a_{22}}{4\partial x^2}\right)+\frac{\tilde\gamma^3}{\sqrt{a_{23}a_{343}}}\left(\frac{\partial}{\partial x^3}-\frac{\partial\ln a_{343}}{4\partial x^3}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{\tilde\gamma^3}{\sqrt{a_{23}a_{344}}}\left(\frac{\partial}{\partial x^4}-\frac{\partial\ln a_{344}}{4\partial x^4}\right)+m_0\right\}\Phi=0 \qquad (12)$$

Уравнение (12) эквивалентно соотношению

$$\left\{\hat{\mathbf{K}}_{\mathbf{1}}+\hat{\mathbf{K}}_{\mathbf{234}}\right\}\Phi=0,\quad \hat{\mathbf{K}}_{\mathbf{1}}\hat{\mathbf{K}}_{\mathbf{234}}-\hat{\mathbf{K}}_{\mathbf{234}}\hat{\mathbf{K}}_{\mathbf{1}}=0,$$

где

$$\hat{\mathbf{K}}_{\mathbf{1}}=\frac{1}{\sqrt{a_{11}}}\left(\frac{\partial}{\partial x^1}-\frac{\partial\ln a_{11}}{4\partial x^1}\right),$$

$$\hat{\mathbf{K}}_{\mathbf{234}}=\tilde\gamma^1\tilde\gamma^2\sqrt{\frac{a_{21}}{a_{22}}}\left(\frac{\partial}{\partial x^2}-\frac{\partial\ln a_{22}}{4\partial x^2}\right)+\tilde\gamma^1\tilde\gamma^3\sqrt{\frac{a_{21}}{a_{23}a_{343}}}\left(\frac{\partial}{\partial x^3}-\frac{\partial\ln a_{343}}{4\partial x^3}\right)+$$
$$+\tilde\gamma^1\tilde\gamma^4\sqrt{\frac{a_{21}}{a_{23}a_{344}}}\left(\frac{\partial}{\partial x^4}-\frac{\partial\ln a_{344}}{4\partial x^4}\right)+m_0\tilde\gamma^1\sqrt{a_{21}}.$$

Таким образом, зависимость волновой функции от переменных $x^2, x^3,\ x^4$ в уравнении Дирака после отделения переменной x^1 будет определяться уравнением [7]

$$\left\{\tilde\gamma^1\tilde\gamma^2\sqrt{\frac{a_{21}}{a_{22}}}\left(\frac{\partial}{\partial x^2}-\frac{\partial\ln a_{22}}{4\partial x^2}\right)+\tilde\gamma^1\tilde\gamma^3\sqrt{\frac{a_{21}}{a_{23}a_{343}}}\left(\frac{\partial}{\partial x^3}-\frac{\partial\ln a_{343}}{4\partial x^3}\right)+\right.$$
$$\left.+\tilde\gamma^1\tilde\gamma^4\sqrt{\frac{a_{21}}{a_{23}a_{344}}}\left(\frac{\partial}{\partial x^4}-\frac{\partial\ln a_{344}}{4\partial x^4}\right)+m_0\tilde\gamma^1\sqrt{a_{21}}-K_{234}\right\}\Phi=0 \qquad (13)$$

Соотношение (13) может быть представлено в виде

$$\left\{\hat{\mathbf{K}}_{\mathbf{2}}+\hat{\mathbf{K}}_{\mathbf{34}}\right\}\Phi=0,\quad \hat{\mathbf{K}}_{\mathbf{2}}\hat{\mathbf{K}}_{\mathbf{34}}-\hat{\mathbf{K}}_{\mathbf{34}}\hat{\mathbf{K}}_{\mathbf{2}}=0,$$

где

$$\hat{\mathbf{K}}_{\mathbf{2}}=\tilde\gamma^1\sqrt{\frac{a_{23}}{a_{22}}}\left(\frac{\partial}{\partial x^2}-\frac{\partial\ln a_{22}}{4\partial x^2}\right)+\tilde\gamma^2K_{234}\sqrt{\frac{a_{23}}{a_{2,1}}}+\tilde\gamma^1\tilde\gamma^2m_0\sqrt{a_{23}},$$

$$\hat{\mathbf{K}}_{\mathbf{34}}=\frac{\tilde\gamma^1\tilde\gamma^2\tilde\gamma^3}{\sqrt{a_{343}(x^3,x^4)}}\left(\frac{\partial}{\partial x^3}-\frac{\partial\ln a_{343}(x^3,x^4)}{4\partial x^3}\right)+$$
$$+\frac{\tilde\gamma^1\tilde\gamma^2\tilde\gamma^4}{\sqrt{a_{344}(x^3,x^4)}}\left(\frac{\partial}{\partial x^4}-\frac{\partial\ln a_{344}(x^3,x^4)}{4\partial x^4}\right).$$

Окончательно получаем, что после отделения переменных x^1, x^2 в уравнении Дирака зависимость волновой функции от переменных x^3, x^4 определяется уравнением [7]

$$\left\{\frac{\tilde\gamma^1\tilde\gamma^2\tilde\gamma^3}{\sqrt{a_{343}(x^3,x^4)}}\left(\frac{\partial}{\partial x^3}-\frac{\partial\ln a_{343}(x^3,x^4)}{4\partial x^3}\right)+\right.$$
$$\left.\frac{\tilde\gamma^1\tilde\gamma^2\tilde\gamma^4}{\sqrt{a_{344}(x^3,x^4)}}\left(\frac{\partial}{\partial x^4}-\frac{\partial\ln a_{344}(x^3,x^4)}{4\partial x^4}\right)-K_{34}\right\}\Phi=0. \qquad (14)$$

Пусть, далее, в (11) функции $a_{3\,43}\left(x^3,x^4\right)$, $a_{3\,44}\left(x^3,x^4\right)$ имеют вид

$$\begin{aligned} a_{3\,43}\left(x^3,x^4\right) &= a_{3,3}\left(x^3\right)\cdot\left(b\left(x^3\right)+c\left(x^4\right)\right)^2; \\ a_{3\,44}\left(x^3,x^4\right) &= a_{4,4}\left(x^4\right)\cdot\left(\left(x^3\right)+c\left(x^4\right)\right)^2, \end{aligned} \tag{15}$$

где $b\left(x^3\right)$, $c\left(x^4\right)$ — произвольные функции соответствующих переменных.

Тогда методом МКО разделить переменные в уравнении (14) не удается, т.к. компоненты метрического тензора (11), (15) не удовлетворяют ни одному из условий (7) – (10).

В связи с этим исследуем возможность разделения переменных в (14) при выполнении (11), (15), расширяя рамки МКО.

Пусть

$$\Phi\left(x^3,x^4\right)=\xi\cdot\psi\left(x^3,x^4\right), \tag{16}$$

где

$$\xi=\left(a_{44}\left(x^4\right)\right)^{\frac{1}{4}}\cdot\left(b\left(x^3\right)+c\left(x^4\right)\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{17}$$

Ввиду (15) – (17), из (14) имеем

$$\left\{\frac{\tilde{\gamma}^1\tilde{\gamma}^2\tilde{\gamma}^3}{\sqrt{a_{33}\left(x^3\right)}}\left(\frac{\partial}{\partial x^3}-\frac{\partial\ln a_{33}\left(x^3\right)}{4\partial x^3}\right)-K_{34}\cdot b\left(x^3\right)+\frac{\tilde{\gamma}^1\tilde{\gamma}^2\tilde{\gamma}^4}{\sqrt{a_{44}\left(x^4\right)}}\frac{\partial}{\partial x^4}-K_{34}\cdot c\left(x^4\right)\right\}\psi=0. \tag{18}$$

$\psi\left(x^3,x^4\right)$ представим в виде

$$\psi\left(x^3,x^4\right)=\mathbf{F}\left(x^3\right)\cdot\mathbf{G}\left(x^4\right)\cdot\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}, \tag{19}$$

где $\mathbf{F},\mathbf{G}$ — матрицы 4×4, имеющие представление

$$\mathbf{F}=f_1\left(x^3\right)\tilde{\gamma}^1+f_{16}\left(x^3\right)\mathbf{E}, \tag{20}$$

$$\mathbf{G}=g_1\left(x^4\right)\tilde{\gamma}^1+g_8\left(x^4\right)\tilde{\gamma}^2\tilde{\gamma}^3+g_{11}\left(x^4\right)\tilde{\gamma}^1\tilde{\gamma}^2\tilde{\gamma}^3+g_{16}\left(x^4\right)\mathbf{E}. \tag{21}$$

В (20), (21) $f_1\left(x^3\right)$, $f_{16}\left(x^3\right)$, $g_1\left(x^4\right)$, $g_8\left(x^4\right)$, $g_{11}\left(x^4\right)$, $g_{16}\left(x^4\right)$ — неизвестные функции соответствующих переменных. Для матриц (20), (21) выполняются соотношения

$$\begin{aligned} &[\mathbf{F},\mathbf{G}]=\mathbf{FG}-\mathbf{GF}=0, \\ &\left[\mathbf{F},\tilde{\gamma}^1\tilde{\gamma}^2\tilde{\gamma}^4\right]=\mathbf{F}\tilde{\gamma}^1\tilde{\gamma}^2\tilde{\gamma}^4-\tilde{\gamma}^1\tilde{\gamma}^2\tilde{\gamma}^4\mathbf{F}=0, \\ &\left[\mathbf{G},\tilde{\gamma}^1\tilde{\gamma}^2\tilde{\gamma}^3\right]=\mathbf{G}\tilde{\gamma}^1\tilde{\gamma}^2\tilde{\gamma}^3-\tilde{\gamma}^1\tilde{\gamma}^2\tilde{\gamma}^3\mathbf{G}=0, \end{aligned} \tag{22}$$

причем матрицы $\mathbf{F}^{-1}$, $\mathbf{G}^{-1}$, обратные $\mathbf{F}$ и $\mathbf{G}$, имеют вид

$$\mathbf{F}^{-1} = \frac{f_1}{f_1^2 - f_{16}^2} \cdot \tilde{\gamma}^1 + \frac{f_{16}}{f_{16}^2 - f_1^2} \cdot \mathbf{E}, \tag{23}$$

$$\mathbf{G}^{-1} = \varphi_1\left(x^4\right)\tilde{\gamma}^1 + \varphi_8\left(x^4\right)\tilde{\gamma}^2\tilde{\gamma}^3 + \varphi_{11}\left(x^4\right)\tilde{\gamma}^1\tilde{\gamma}^2\tilde{\gamma}^3 + \varphi_{16}\left(x^4\right)\mathbf{E}, \tag{24}$$

где

$$\varphi_1 = \frac{g_1 g_{11}^2 + g_1 g_8^2 + g_1^3 - g_1 g_{16}^2 - 2 g_8 g_{16} g_{11}}{\xi + \zeta}, \tag{25}$$

$$\varphi_8 = \frac{g_8 g_{11}^2 - g_8 g_1^2 - g_8^3 - g_8 g_{16}^2 + 2 g_1 g_{11} g_{16}}{\xi + \zeta}, \tag{26}$$

$$\varphi_{11} = \frac{-g_{11} g_{16}^2 - g_{11} g_1^2 - g_{11}^3 + g_{11} g_8^2 + 2 g_8 g_{16} g_1}{\xi + \zeta}, \tag{27}$$

$$\varphi_{16} = \frac{-g_{16} g_1^2 + g_{16} g_{11}^2 + g_{16}^3 + g_{16} g_8^2 - 2 g_{11} g_1 g_8}{\xi + \zeta}, \tag{28}$$

$$\xi = g_1^4 + g_8^4 + g_{11}^4 + g_{16}^4 - 8 g_1 g_8 g_{11} g_{16}, \tag{29}$$

$$\zeta = 2\left(g_1^2\left(g_8^2 + g_{11}^2 - g_{16}^2\right) + g_8^2\left(g_{16}^2 - g_{11}^2\right) + g_{11}^2 g_{16}^2\right). \tag{30}$$

Ввиду (19) – (30), из (18) имеем

$$\begin{gathered}\mathbf{F}^{-1}\left(x^3\right) \cdot \left\{\frac{\tilde{\gamma}^1\tilde{\gamma}^2\tilde{\gamma}^3}{\sqrt{a_{33}(x^3)}}\left(\frac{\partial}{\partial x^3} - \frac{\partial \ln a_{33}\left(x^3\right)}{4\partial x^3}\right) - K_{34} \cdot b\left(x^3\right)\right\} \cdot \mathbf{F}\left(x^3\right) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \\ +\mathbf{G}^{-1}\left(x^4\right) \cdot \left\{\frac{\tilde{\gamma}^1\tilde{\gamma}^2\tilde{\gamma}^4}{\sqrt{a_{44}(x^4)}}\frac{\partial}{\partial x^4} - K_{34} \cdot c\left(x^4\right)\right\} \cdot \mathbf{G}\left(x^4\right) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0.\end{gathered} \tag{31}$$

Переменные в уравнении (31) разделены.

В заключение укажем ещё один способ разделения переменных в уравнении (14). Пусть выполняется условие (7), и не выполняются требования (6). Воспользуемся (19) – (31), с той лишь разницей, что вместо (19) положим

$$\Phi\left(x^3, x^4\right) = \mathbf{F}\left(x^3\right) \cdot \mathbf{G}\left(x^4\right) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{32}$$

Из (14) получаем уравнение

$$\mathbf{F}^{-1}\left(x^{3}\right)\cdot\left\{\frac{\tilde{\gamma}^{1}\tilde{\gamma}^{2}\tilde{\gamma}^{3}}{\sqrt{a_{3,3}\left(x^{3}\right)}}\left(\frac{\partial}{\partial x^{3}}-\frac{\partial\ln a_{3,3}\left(x^{3}\right)}{4\partial x^{3}}\right)\right\}\cdot\mathbf{F}\left(x^{3}\right)\cdot\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}+$$

$$+\mathbf{G}^{-1}\left(x^{4}\right)\cdot\left\{\tilde{\gamma}^{1}\tilde{\gamma}^{2}\tilde{\gamma}^{4}\sqrt{\frac{a_{4,3}\left(x^{4}\right)}{a_{4,4}\left(x^{4}\right)}}\frac{\partial}{\partial x^{4}}-K_{34}\cdot\sqrt{a_{4,3}\left(x^{4}\right)}\right\}\cdot\mathbf{G}\left(x^{4}\right)\cdot\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}=0 \qquad (33)$$

в котором, как и в (31), переменные разделены.

Заметим, что в каждом из рассматриваемых случаев, как следует из (20) – (21), разделить переменные в уравнении (14) оказалось возможным благодаря представлению компонент биспинора Дирака, являющихся функциями переменных x^3, x^4, в виде суммы произведений функций переменных x^3 и x^4, т.е.

$$\Phi_i(x^3,x^4)=\sum_k \xi_{\,i\,k}\left(x^3\right)\cdot\zeta_{\,i\,k}\left(x^4\right).$$

Проведенные исследования позволяют предположить, что требования (6), несмотря на все их физическое содержание, для осуществления процедуры разделения переменных в уравнении Дирака, являются избыточными;

актуальным для развития метода Фурье являются исследования возможностей разделения переменных в волновых уравнениях в случае представления искомой волновой функции двух переменных $U\left(x,y\right)$ в виде суммы произведений функций одной переменной $f_k\left(x\right)$ и $g_k\left(y\right)$:

$$U\left(x,y\right)=\sum_k f_k\left(x\right)g_k\left(y\right)$$

Abstract. In this paper the author obtained two new ways of separation of variables in Dirac equation by the means of development of an algebraic method of separation of variables.

Литература

1. Ф.М.Морс, Г.Фешбах, *Методы теоретической физики*, т. 1, Москва, Издательство иностранной литературы, 1958.

2. Ф.М.Морс, Г.Фешбах, *Методы теоретической физики*, т. 2, Москва, Издательство иностранной литературы, 1960.

3. У.Миллер, мл., *Симметрия и разделение переменных*, Москва, Мир, 1981.

4. В. Г.Багров, М.Д.Носков, *Новые точные решения уравнения Дирака*, ХГТ, Известия ВУЗов, № 1 (1985), 85.

5. И.Е.Андрушкевич, *Об одном обобщении метода Фурье разделения переменных, Электромагнитные волны & электронные системы*, **3**, № 4 (1998), 4–17.

6. Г. В.Шишкин, И.Е.Андрушкевич, *Разделение переменных в уравнении Дирака в общей теории относительности. I*, Вестник Белгосуниверситета. Сер. 1, физ., мат. и мех. (1988), 26–30.

7. И.Е.Андрушкевич, Г.В.Шишкин, *О критериях разделимости переменных в уравнении Дирака в гравитационных полях*, ТМФ, **70**, № 2 (1987), 289–302.

8. G.V.Schiskin, *Two-component neutrino in gravitational field*, Nuow dm, B. **109**, № 6 (1994), 617–633.

9. Г.Бете, Э.Солпитер, *Квантовая механика атомов с одним и двумя электронами*, Москва, Физматгиз, 1969.

10. Д.Крамер, Х.Штефани, Э.Херльт, М.Мак-Каллум, *Точные решения уравнений Эйнштейна*, Москва, Энергоиздат, 1982.

Витебский государственный
университет им. П.М.Машерова

Поступило 10.06.04