Известия Гомельского государственного
университета им. Ф.Скорины, 6(27), 2004

*УДК 512.542*

# О вложении подгрупп в проекторы конечных разрешимых групп

Т.И. Васильева

По известной теореме Силова, существующие в каждой конечной группе силовские $p$-подгруппы наряду с сопряженностью обладают свойством вложения: их подгруппами исчерпываются все $p$-подгруппы данной группы. При этом силовские $p$-подгруппы являются $\mathfrak{S}_p$-проекторами группы. Аналогичное свойство вложения, согласно теоремам Холла-Чунихина, присуще $\pi$-холловым подгруппам (или $\mathfrak{S}_\pi$-проекторам) $\pi$-разрешимой группы. Однако, как показывают примеры формаций всех нильпотентных групп, всех сверхразрешимых групп и др., для проекторов целого ряда формаций свойство вложения не выполняется.

В 1978 году Л.А. Шеметковым в [1] была поставлена задача: найти условия, при которых фиксированная $\mathfrak{F}$-подгруппа содержится в $\mathfrak{F}$-проекторе. В настоящей работе данная задача исследуется для классов Шунка заданного вида, откуда получается вложение нильпотентных и $\pi$-разложимых подгрупп соответственно в картеровы подгруппы и $\pi$-разложимые проекторы разрешимых групп.

В работе рассматриваются только конечные разрешимые группы.

Для подгруппы $H$ группы $G$ используется обозначение $H \leq G$. Пусть $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{F}$ — некоторые классы групп. Подгруппа $H$ группы $G$ называется $\mathfrak{X}$-проектором [2], если $HN/N$ — максимальная $\mathfrak{X}$-подгруппа в $G/N$ для любой нормальной подгруппы $N$ из $G$. Примитивная группа — это группа $G$, в которой существует максимальная подгруппа $M$ с единичным ядром $Core_G(M)$; в этом случае $M$ называется примитиватором группы $G$. Класс Шунка — непустой гомоморф $\mathfrak{X}$, содержащий всякую группу $G$, у которой $G/Core_G(M) \in \mathfrak{X}$ для любой максимальной подгруппы $M$ из $G$. Если $\mathfrak{X}$ — класс Шунка, то его границей называется класс групп $b(\mathfrak{X})$ [3], состоящий из всех таких примитивных групп $G$, что $G \notin \mathfrak{X}$, но $G/N \in \mathfrak{X}$ для любой нормальной подгруппы $N \neq 1$ группы $G$. Через $\pi$ обозначается некоторое множество простых чисел, $\pi'$ — дополнение к $\pi$ во множестве всех простых чисел, $\pi(\mathfrak{X})$ — множество всех различных простых делителей порядков групп, принадлежащих $\mathfrak{X}$. Через $\mathfrak{X} \times \mathfrak{F}$ обозначается класс всех групп $G$, представимых в виде $G = A \times B$, где $A \in \mathfrak{X}$, $B \in \mathfrak{F}$; $\mathfrak{X}_\pi$ — класс всех $\pi$-групп, которые принадлежат $\mathfrak{X}$; $\mathfrak{N}$ — класс всех нильпотентных групп; $\mathfrak{S}$ — класс всех разрешимых групп. Подгруппа $H$ группы $G$ называется абнормальной, если $x \in \langle H, H^x \rangle$ для любого $x \in G$. Остальные определения и обозначения можно найти в [1] и [3].

**Определение.** Пусть $H$ и $F$ — подгруппы группы $G$. Будем говорить, что $H$ арифметически вкладывается в $F$, если из условий $H \leq U \leq G$, $F \leq U \leq G$ и $V \trianglelefteq U$ всегда следует, что $\pi(HV/V) \subseteq \pi(FV/V)$.

Ясно, что если $H$ содержится в некотором $\mathfrak{F}$-проекторе $F$ группы, то $H$ арифметически вкладывается в $F$. Однако обратное утверждение выполняется не всегда. Например, пусть $\mathfrak{U}$ — формация всех сверхразрешимых групп. В симметрической группе $S_4$ силовская 2-подгруппа $H$ арифметически вкладывается в $\mathfrak{U}$-проектор $F$, который изоморфен симметрической группе $S_3$. Но $\mathfrak{U}$-подгруппа $H$ не содержится в $F^x$ для любого $x \in S_4$.

Напомним [2], что для класса Шунка $\mathfrak{X}$ во всякой группе $G$ существует в точности один класс сопряженных $\mathfrak{X}$-проекторов и понятия $\mathfrak{X}$-проектора и $\mathfrak{X}$-покрывающей подгруппы совпадают. Картерова подгруппа (т.е. самонормализуемая нильпотентная подгруппа) является $\mathfrak{N}$-проектором группы.

**Теорема 1.** *Пусть $\mathfrak{X}$ — класс Шунка такой, что любая группа из его границы $b(\mathfrak{X})$ является либо группой простого порядка, либо имеет нильпотентный примитиватор. Если $\mathfrak{X}$-подгруппа $H$ группы $G$ арифметически вкладывается в каждый $\mathfrak{X}$-проектор из $G$, то $H$ содержится в некотором $\mathfrak{X}$-проекторе группы $G$.*

*Доказательство.* Пусть $G$ — группа наименьшего порядка, для которой теорема не выполняется. Тогда в $G$ имеется $\mathfrak{X}$-подгруппа $H$, которая арифметически вкладывается во всякий $\mathfrak{X}$-проектор группы $G$ и не содержится ни в одном $\mathfrak{X}$-проекторе группы $G$.

Возьмем минимальную нормальную подгруппу $N$ группы $G$. Факторгруппа $HN/N \simeq H/H \cap N \in Q\mathfrak{X} = \mathfrak{X}$. Покажем, что $HN/N$ арифметически вкладывается во всякий $\mathfrak{X}$-проектор $R/N$ группы $G/N$. Пусть $HN/N \leq U/N \leq G/N$, $R/N \leq U/N \leq G/N$ и $V/N \trianglelefteq U/N$. В $R$ существует $\mathfrak{X}$-проектор $F$. Так как $R = FN$ и, по лемме 15.1 из [1], $F$ является $\mathfrak{X}$-проектором группы $G$, то множество $\pi(HN/N \cdot V/N/V/N) = \pi(HV/V) \subseteq \subseteq \pi(FV/V) = \pi(R/N \cdot V/N/V/N)$. По выбору $G$ $\mathfrak{X}$-подгруппа $HN/N$ содержится в некотором $\mathfrak{X}$-проекторе группы $G/N$. Из сопряженности $\mathfrak{X}$-проекторов группы $G/N$ следует существование такого элемента $x \in G$, что $HN/N \leq (R/N)^{xN} = R^x/N$.

Если $R^x \neq G$, то для $R^x$ условия теоремы выполняются. Значит, $H \leq F^y$ для некоторого $y \in G$. Противоречие с выбором $G$.

Предположим, что $R^x = G$. Тогда $G/N \in \mathfrak{X}$ для любой минимальной нормальной подгруппы $N$ группы $G$. Так как $G \notin \mathfrak{X}$ и $\mathfrak{X}$ есть класс Шунка, то $G \in b(\mathfrak{X})$. По условию теоремы, $G$ имеет нильпотентный примитиватор. Обозначим его через $M$. Тогда группа $G = MN$, $M \cap N = 1$, $N = C_G(N)$ и $|N| = p^\alpha$ для некоторого простого числа $p$. Поскольку $M \simeq G/N \in \mathfrak{X}$ и $M$ $\mathfrak{X}$-абнормальна в $G$, то $M$ является $\mathfrak{X}$-проектором группы $G$.

Пусть силовская $p$-подгруппа $M_p$ группы $M$ отлична от 1. Тогда $M = N_G(M_p)$. Силовская $p$-подгруппа $G_p$ группы $G$, содержащая $M_p$, имеет вид: $G_p = M_pN$. Отсюда $M_p \neq N_G(M_p) = M \cap G_p = M_p$. Пришли к противоречию.

Предположим, что $M_p = 1$. Обозначим $\pi_1 = \pi(G) \setminus \{p\}$. Тогда $M$ является $\pi_1$-холловой подгруппой, а $H$ — $\pi_1$-подгруппой группы $G$. Так как $G$ обладает $D_{\pi_1}$-свойством, то $H \leq M^g$ для некоторого $g \in G$. Это противоречие завершает доказательство теоремы.

Ввиду того, что класс всех нильпотентных групп является классом Шунка, рассмотренным в теореме 1, получаем

**Следствие.** *Если нильпотентная подгруппа $H$ группы $G$ арифметически вкладывается во всякую картерову подгруппу группы $G$, то $H$ содержится в некоторой картеровой подгруппе группы $G$.*

**Лемма 1.** *Пусть $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{H}$ — классы Шунка такие, что $\pi(\mathfrak{X}) \cap \pi(\mathfrak{H}) = 1$. Тогда $\mathfrak{X} \times \mathfrak{H}$ — класс Шунка.*

*Доказательство.* Обозначим $\pi = \pi(\mathfrak{X})$. Тогда $\pi(\mathfrak{H}) \subseteq \pi'$. Покажем, что $\mathfrak{X} \times \mathfrak{H}$ — гомоморф. Пусть $G = A \times B$, где $A \in \mathfrak{X}$, $B \in \mathfrak{H}$ и $K \trianglelefteq G$. Тогда $G/K = AK/K \cdot BK/K$, причем $AK/K \simeq A/A \cap K \in Q\mathfrak{X} = \mathfrak{X}$, $BK/K \simeq B/B \cap K \in Q\mathfrak{H} = \mathfrak{H}$. Так как $AK/K$ — $\pi$-группа, а $BK/K$ — $\pi'$-группа, то $AK/K \cap BK/K = 1$. Таким образом, $G/K \in \mathfrak{X} \times \mathfrak{H}$, т.е. $\mathfrak{X} \times \mathfrak{H}$ — гомоморф.

Докажем теперь, что класс $\mathfrak{X} \times \mathfrak{H}$ примитивно замкнут. Пусть $G/Core_G(M) \in \mathfrak{X} \times \mathfrak{H}$ для любой максимальной в $G$ подгруппы $M$.

Так как $\mathfrak{X}$ — класс Шунка, то в $G$ существует $\mathfrak{X}$-проектор $R$.

Если $R = G$, то $G \in \mathfrak{X} \times \mathfrak{H}$.

Пусть $R \neq G$. Покажем, что $R \trianglelefteq G$. Для этого возьмем любую максимальную в $G$ подгруппу $W$, содержащую $R$, и докажем, что для ее ядра $Core_G(W)$ факторгруппа $G/Core_G(W) \in \mathfrak{H}$.

Из $G/Core_G(W) \in \mathfrak{X} \times \mathfrak{H}$ следует $G/Core_G(W) = A/Core_G(W) \times B/Core_G(W)$, где $A/Core_G(W) \in \mathfrak{X}$, $B/Core_G(W) \in \mathfrak{H}$. Поскольку $G/Core_G(W)/B/Core_G(W) \simeq \simeq A/Core_G(W) \in \mathfrak{X}$ и $RCore_G(W)/Core_G(W)$ есть $\mathfrak{X}$-проектор в $G/Core_G(W)$, то $G/Core_G(W) = R/Core_G(W) \cdot B/Core_G(W)$. Ввиду этого и того, что $RCore_G(W)/Core_G(W)$ является $\pi$-группой, получаем $RCore_G(W)/Core_G(W) = A/Core_G(W)$. Это означает, что $RCore_G(W) \trianglelefteq G$. Тогда из $RCore_G(W) \leq W$ имеем $RCore_G(W) = = Core_G(W)$. Отсюда $G/Core_G(W) = B/Core_G(W) \in \mathfrak{H}$.

По обобщенной лемме Фраттини, $G = N_G(R)Core_G(W)$. Если $N_G(R) \neq G$, то $N_G(R)$ содержится в некоторой максимальной в $G$ подгруппе $T$. Для ее ядра $Core_G(T)$ по доказанному выше $G = N_G(R)Core_G(T) \leq T$. Противоречие. Значит, $N_G(R) = G$.

В группе $G$ для класса Шунка $\mathfrak{H}$ существует $\mathfrak{H}$-проектор $H$. Как и для $\mathfrak{X}$-проектора $R$, легко показать, что $H \trianglelefteq G$. Если $RH \neq G$, то $RH$ содержится в некоторой максимальной подгруппе $M$ группы $G$. По доказанному выше, $G/Core_G(M) \in \mathfrak{H}$. Поэтому $G = Core_G(M)H \leq M$. Противоречие. Итак, $G = R \times H \in \mathfrak{X} \times \mathfrak{H}$. Лемма доказана.

Отметим несколько свойств абнормальных подгрупп.

**Лемма 2.** *Пусть $R \leq G$ и $N \trianglelefteq G$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

*1) если $R$ абнормальна в $G$ и содержится в подгруппе $W$ группы $G$, то $RN/N$ абнормальна в $WN/N$;*

*2) если $N \leq R$ и $R/N$ абнормальна в $G/N$, то $R$ абнормальна в $G$.*

Доказательство получается прямой проверкой.

**Теорема 2.** *Пусть $\mathfrak{X}$ — класс Шунка, $\pi$ — некоторое множество простых чисел и $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_\pi \times \mathfrak{X}_{\pi'}$. Если абнормальная $\mathfrak{F}$-подгруппа $H$ группы $G$ арифметически вкладывается в каждый $\mathfrak{F}$-проектор группы $G$, то $H$ содержится в некотором $\mathfrak{F}$-проекторе из $G$.*

*Доказательство.* Пусть $G$ — группа наименьшего порядка, для которой теорема не выполняется. Тогда в $G$ имеется абнормальная $\mathfrak{F}$-подгруппа $H$, которая арифметически вкладывается во всякий $\mathfrak{F}$-проектор из $G$ и не содержится ни в одном $\mathfrak{F}$-проекторе из $G$.

Пусть $N$ — минимальная нормальная подгруппа группы $G$. По лемме 1, $\mathfrak{F}$ является гомоморфом. Поэтому факторгруппа $HN/N$ есть $\mathfrak{F}$-подгруппа, и по лемме 2, абнормальна в $G/N$. Рассмотрим произвольный $\mathfrak{F}$-проектор группы $G/N$. Он имеет вид $FN/N$, где $F$ — некоторый $\mathfrak{F}$-проектор группы $G$. Если $HN/N \leq U/N \leq G/N$, $FN/N \leq U/N \leq G/N$ и $V/N \trianglelefteq U/N$, то $\pi(HN/N \cdot V/N/V/N) = \pi(HV/V) \subseteq \pi(FV/V) = = \pi(FN/N \cdot V/N/V/N)$, т.е. $HN/N$ арифметически вкладывается во всякий $\mathfrak{F}$-проектор из $G/N$. В силу выбора $G$ найдется элемент $x \in G$ такой, что $HN/N \leq (FN/N)^{xN} = = F^xN/N$.

Если $F^xN \neq G$, то $H$ — абнормальная подгруппа группы $F^xN$. По лемме 15.1 из [1], всякий $\mathfrak{F}$-проектор из $F^xN$ является $\mathfrak{F}$-проектором в $G$, поэтому $H$ арифметически вкладывается в каждый $\mathfrak{F}$-проектор из $F^xN$. Отсюда следует, что $H \leq F^{xy}$ для некоторого $y \in F^xN$. Противоречие с выбором $G$.

Пусть теперь $F^xN = G$. Так как по лемме 1 $\mathfrak{F}$ есть класс Шунка и $G/N \in \mathfrak{F}$ для любой минимальной нормальной подгруппы $N$ группы $G$, то $F$ является примитиватором в $G$. Пусть $|N| = p^\alpha$ для некоторого простого числа $p$. Рассмотрим два случая.

1) Число $p \in \pi$.

Если $p$ не делит $|F|$, то $N$ является силовской $p$-подгруппой группы $G$. Так как

$H$ арифметически вкладывается в $F$, то $\pi(H) \subseteq \pi(F)$, т.е. $p$ не делит $|H|$. Обозначим $\omega = \mathbb{P} \setminus \{p\}$, где $\mathbb{P}$ — множество всех простых чисел. Группа $G$ разрешима, поэтому обладает $D_\omega$-свойством. Отсюда $\omega$-подгруппа $H$ содержится в некоторой $\omega$-холловой подгруппе $G_\omega = F^g$ для некоторого $g \in G$. Получили противоречие с выбором $G$.

Таким образом, $p$ делит $|F|$.

Предположим, что $p \in \pi(H)$. Силовская $p$-подгруппа $F_p$ группы $F$ нормальна в $F$. Из максимальности $F$ в $G$ и самоцентрализуемости $N$ следует, что $N_G(F_p) = F$. Силовская $p$-подгруппа $G_p$ группы $G$, содержащая $F_p$, имеет вид $G_p = F_pN$. Тогда $1 \neq Z(G_p) \leq N_{G_p}(F_p) \leq F$. Но $G_p \trianglelefteq G$. Это противоречит тому, что ядро $F$ в $G$ равно 1.

Пусть $p \notin \pi(H)$. Обозначим $\pi_1 = \pi(H)$. Тогда $N$ — $\pi_1'$-группа. Из $F \in \mathfrak{F}$ следует, что $F \leq N_G(F_p)$. Подгруппа $F$ максимальна в $G$ и ее ядро равно 1, поэтому $F = N_G(F_p)$. С другой стороны $F_p \neq G_p$, а значит, $F_p \neq N_{G_p}(F_p) = F \cap G_p = F_p$. Получили противоречие.

2) Пусть $p \in \pi'$.

Так как $\pi'$-холлова подгруппа $F_{\pi'}$ группы $F$ нормальна в $F$ и $G = FN$, то $F_{\pi'}N = G_{\pi'}$ — нормальная $\pi'$-холлова подгруппа группы $G$. Из $HG_{\pi'}/G_{\pi'} \leq G/G_{\pi'} \in \mathfrak{N}_\pi$ и абнормальности $H$ в $G$ следует, что $HG_{\pi'} = G$. Поэтому $\pi$-холлова подгруппа $H_\pi$ группы $H$ является $\pi$-холловой подгруппой группы $G$. Отсюда $H_\pi = F_\pi^y$ для некоторого $y \in G$. Из $F^y \in \mathfrak{F}$ получаем, что $F^y \leq N_G(F_\pi^y)$. Так как $N$ — единственная минимальная нормальная подгруппа в $G$ и $N \cap F^y = 1$, то $F^y = N_G(F_\pi^y)$. Из $\pi$-разложимости $H$ следует $H \leq N_G(H_\pi) = F^y$. Это противоречие завершает доказательство теоремы.

**Следствие 1.** *Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_\pi \times \mathfrak{S}_{\pi'}$. Если абнормальная $\mathfrak{F}$-подгруппа $H$ разрешимой группы $G$ арифметически вкладывается в каждый $\mathfrak{F}$-проектор группы $G$, то $H$ содержится в некотором $\mathfrak{F}$-проекторе из $G$.*

**Следствие 2.** *Если картерова подгруппа $H$ разрешимой группы $G$ арифметически вкладывается во всякий $p$-разложимый проектор группы $G$, то $H$ содержится в некотором $p$-разложимом проекторе из $G$.*

**Abstract.** A condition of the embedding of $\mathfrak{X}$-subgroups in $\mathfrak{X}$-projectors of finite soluble groups for the Schunck class $\mathfrak{X}$ is obtained.

## Литература

1. Л.А. Шеметков, *Формации конечных групп*, Москва, Наука, 1978.

2. W. Gaschütz, *Lectures on subgroups of Sylow type in finite soluble groups*, Notes on Pure Math. **11** (1979), 1–100.

3. K. Doerk, T. Hawkes, *Finite soluble groups*, Berlin–New York, Walter de Gruyter, 1992.

Белорусский государственный
университет транспорта

Поступило 20.09.04