Известия Гомельского государственного университета
имени Ф.Скорины, 5(32), 2005

УДК 512.542

Об одной проблеме теории ω-локальных формаций

В. М. Селькин

Все рассматриваемые группы предполагаются конечными. Используется общепринятая терминология [1, 2, 3, 4].

Формация $\mathfrak{F}$ называется минимальной насыщенной не $\mathfrak{H}$-формацией [5], если $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$, но все ее собственные насыщенные подформации содержатся в классе групп $\mathfrak{H}$. Общая проблема изучения формаций такого рода была поставлена Л.А.Шеметковым в докладе на VI Всесоюзном симпозиуме по теории групп [5]. Решению этой проблемы был посвящен ряд работ А.Н.Скибы, в частности [3, 6]. Отметим, что значительная часть теории минимальных насыщенных не $\mathfrak{H}$-формаций, построенная в этих работах, представлена в книге [3].

В монографии [3] была предложена конструкция, позволяющая во многих ключевых ситуациях (в частности, при исследовании формаций экстремальных типов) избегать исследования частных случаев.

В данной работе, отвечая на вопрос 14 работы [4] и охватывая все предыдущие выше результаты, мы даем описание минимальных τ-замкнутых ω-насыщенных не $\mathfrak{H}$-формаций, где $\mathfrak{H}$ — произвольная формация классического типа.

Теорема . *Пусть $\mathfrak{H}$ — локальная формация классического типа, и H — её канонический спутник. Тогда $\mathfrak{F}$ в том и только в том случае является минимальной τ-замкнутой ω-насыщенной не $\mathfrak{H}$-формацией, когда $\mathfrak{F} = \tau^{\omega}\mathrm{form}\,(G)$, где G — такая монолитическая $\overline{\tau}$-минимальная не $\mathfrak{H}$-группа с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$, что либо $\pi = \pi(P) \cap \omega = \varnothing$, либо $\pi \neq \varnothing$ и выполняется одно из следующих условий:*

1) $G = P$ — группа простого порядка $p \notin \pi(\mathfrak{H})$;

2) P — неабелева группа и если $p \in \omega$, то G — $\overline{\tau}$-минимальная не $(H(q))$-группа с $P = G^{H(q)}$ для всякого $q \in \pi$;

3) $G = [P]H$, $P = C_G(P)$ — абелева p-группа,и если $p \in \omega$, то H — монолитическая группа с нефраттиниевым монолитом Q (p не делит $|Q|$) одного из следующих типов: а) H — $\overline{\tau}$-минимальная не $(\mathfrak{N}_p\mathfrak{M})$-группа, $Q = H^{\mathfrak{N}_p\mathfrak{M}}$; б) H — минимальная не $\mathfrak{M}$-группа, причем H либо группа кватернионов порядка 8; либо неабелева группа порядка q^3 простой нечетной экспоненты q; либо циклическая q-группа.

Из теоремы непосредственно вытекают описание критических формаций различных типов.

Следствие 1. *Пусть $\mathfrak{H}$ — 2-кратно локальная формация, H — ее канонический ω-локальный спутник. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ — минимальная τ-замкнутая ω-локальная не $\mathfrak{F}$-формация, когда $\mathfrak{F} = \tau^{\omega}\mathrm{form}G$, где G — такая $\overline{\tau}$-минимальная монолитическая не $\mathfrak{H}$-группа с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$, что либо $\pi = \pi(P) \cap \omega = \varnothing$, либо $\pi \neq \varnothing$ и выполняется одно из следующих условий:*

1) $G = P$ — группа простого порядка $p \notin \pi(\mathfrak{H})$;

2) P — неабелева группа, и G — $\overline{\tau}$-минимальная не $(H(q))$-группа с $P = G^{H(q)}$ для всякого простого числа $q \in \pi$;

3) $G = [P]H$, $P = C_G(P)$ — абелева p-группа и H — $\overline{\tau}$-минимальная не $(H(p)$-группа с монолитом $Q = H^{H(p)} \not\subseteq \Phi(H)$ (p не делит $|Q|$).

Следствие 2. *Пусть $\mathfrak{H}$ — 2-кратно ω-локальная наследственная формация, H — ее канонический ω-локальный спутник. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ — минималь-*

ная наследственная ω-локальная не $\mathfrak{F}$-формация, когда $\mathfrak{F} = s^{\omega}\mathrm{form}G$, где G — такая монолитическая минимальная не $\mathfrak{H}$-группа с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$, что либо $\pi = \pi(P) \cap \cap\, \omega = \varnothing$, либо $\pi \neq \varnothing$ и выполняется одно из следующих условий: одного из следующих типов:

1) $G = P$ — группа простого порядка $p \notin \pi(\mathfrak{H})$;

2) P — неабелева группа, и G — минимальная не $(H(q))$-группа с $P = G^{H(q)}$ для всякого простого числа $q \in \pi$;

3) $G = [P]H$, $P = C_G(P)$ — абелева p-группа и H — монолитическая минимальная не $(H(p))$-группа с монолитом $Q = H^{H(p)} \nsubseteq \Phi(H)$ (p не делит $|Q|$).

Следствие 3. *Пусть $\mathfrak{H}$ — формация классического типа, H — ее канонический спутник. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ — минимальная наследственная ω-локальная не $\mathfrak{H}$-формация, когда $\mathfrak{F} = s^{\omega}\mathrm{form}G$, где G — такая монолитическая минимальная не $\mathfrak{H}$-группа с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$, что либо $\pi = \pi(P) \cap \omega = \varnothing$, либо $\pi \neq \varnothing$ и выполняется одно из следующих условий:*

1) $G = P$ — группа простого порядка p, где $p \notin \mathfrak{H}$;

2) $P = G^{H(q)}$ — неабелева группа и G — минимальная не $(H(q))$-группа для всякого простого числа $q \in \pi$;

3) $G = [P]H$, где $P = C_G(P)$ — абелева p-группа, а H — такая монолитическая минимальная не $(H(p))$-группа с монолитом Q (p не делит $|Q|$) одного из следующих типов:

а) $Q = H^{H(q)} \nsubseteq \Phi(H)$ и каждая собственная подгруппа группы H принадлежит $H(q)$ для всякого простого числа $q \in \pi(Q) \cap \omega$;

б) группа кватернионов порядка 8;

в) неабелева группа порядка q^3 простой нечетной экспоненты q;

г) примарная циклическая группа порядка q^n.

Следствие 4. *Пусть $\mathfrak{H}$ — наследственная формация классического типа, H — ее максимальный внутренний локальный экран. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ — минимальная локальная наследственной не $\mathfrak{H}$-формация, когда $\mathfrak{F} = s^{l}\mathrm{form}G$, где G — такая монолитическая минимальная не $\mathfrak{H}$-группа с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$, и выполняестя одно из следующих условий:*

1) $G = P$ — группа простого прорядка p, где $p \notin \mathfrak{H}$;

2) $P = G^{H(q)}$ — неабелева группа и G — минимальная не $H(q)$-группа для всякого простого числа $q \in \pi(P)$;

2) $G = [P]H$, где $P = C_G(P)$ — абелева p-группа, а H — такая монолитическая минимальная не $H(p)$-группа с монолитом Q (p не делит $|Q|$) одного из следующих типов:

а) H — минимальная не $H(q)$-группа с монолитом $Q = H^{H(q)} \nsubseteq \Phi(H)$ для всякого простого числа $q \in \pi(Q)$;

б) либо H — группа кватернионов порядка 8; либо неабелева группа порядка q^3 простой нечетной экспоненты q; либо примарная циклическая группа порядка q^n.

Abstract. The author describes minimal τ-closed ω-saturated non-$\mathfrak{H}$-formations of finite groups where $\mathfrak{H}$ is a formation of classical type.

Литература

1. Л. А. Шеметков, *Формации конечных групп*, Москва, Наука, 1978.

2. Л. А. Шеметков, А. Н. Скиба, *Формации алгебраических систем*, Москва, Наука, 1989.

3. А. Н. Скиба, *Алгебра формаций*, Минск, Беларуская навука, 1997.

4. L. A. Shemetkov, A. N. Skiba, *Multiply ω-local formations and Fitting classes of finete groups*, Seberian Advances in Mathematics, 10:2 (2000), 1–30.

5. Л. А. Шеметков, *Экраны ступенчатых формация*, Тр. VI Всесоюзного симпозиума по теории групп, Киев, 1980, 37–50.

6. А. Н. Скиба, *О неоднопорожденных S-замкнутых локальных формациях*, В кн.: Арифметическое и подгрупповое строение конечных групп, Минск, Наука и техника, 1986, 149–156.

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступило 2.09.05