Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, №6(39), **1**, 2006

УДК 537.874.6

Собственные частоты двухслойных сферических металлических резонаторов с биизотропным слоем

В. Н. Капшай, В. В. Кондратюк

Задачи об электромагнитных резонаторах являются, по существу, задачами на собственные значения (СЗ). Зависимость СЗ от параметров, характеризующих среду, может дать важную информацию об этих параметрах. Так, частоты сферического металлического резонатора, заполненного биизотропной средой [1], зависят от параметров биизотропной среды. В настоящей работе мы находим «условие квантования» для определения собственных частот двухслойных сферических резонаторов радиуса R, в которых один из слоев является биизотропным, а другой слой, – вакуум. Следует рассмотреть две возможности: резонатор, заполненный биизотропной средой, имеющей сферическую вакуумную полость радиуса $r_0 < R$, «вакуумный» резонатор с биизотропной сферической частицей радиуса r_0 в центре.

Вначале рассмотрим металлический «вакуумный» сферический резонатор с биизотропным ядром. Внутри такого резонатора может существовать «стоячая» волна, которая есть суперпозиция двух сферических волн: расходящейся и сходящейся. Наиболее просто сферические электромагнитные волны (СЭВ) записываются с помощью полной и ортонормированной системы шаровых векторов $\vec{Y}^{L}_{JM}(\vec{n}_r)$ [2]. С помощью шаровых векторов можно построить функции вида [3]:

$$\vec{F}_{JM\nu}(z\,|\,k,\vec{r}) = z_J(kr)\vec{Y}^{J}_{JM}(\vec{n}_r) - i\nu\left[a_J z_{J+1}(kr)\vec{Y}^{J+1}_{JM}(\vec{n}_r) - b_J z_{J-1}(kr)\vec{Y}^{J-1}_{JM}(\vec{n}_r)\right], \quad (1)$$

где $z_L(\rho)$ – одна из сферических функций, $a_J = \sqrt{J/(2J+1)}$, $b_J = \sqrt{1-a_J^2}$, k – волновые числа соответствующей среды ($k_\nu = (\sqrt{\varepsilon\mu - \chi^2} + \nu\alpha)\omega/c$ – для биизотропной среды, $\nu = \pm 1$ – поляризация, $k = \omega/c$ – для вакуума). СЭВ в вакууме можно записать в виде

$$\vec{E}_{JM\nu}(\vec{r}) = E_0 \vec{F}_{JM\nu}(z\,|\,k,\vec{r}). \quad (2)$$

Тогда напряженность электрического поля «стоячей» волны с использованием СЭВ запишется в виде

$$\vec{E}_{JM\nu}(\vec{r}) = E^{1}_{JM\nu}\vec{F}_{JM\nu}(h^{(1)}\,|\,k,\vec{r}) + E^{2}_{JM\nu}\vec{F}_{JM\nu}(h^{(2)}\,|\,k,\vec{r}). \quad (3)$$

Здесь $h^{(1,2)}_L(\rho)$ – сферические функции Ханкеля 1-го и 2-го рода соответственно. Однако любая из функций вида (3), взятая отдельно, не удовлетворяет граничным условиям на поверхностях резонатора, состоящих в равенстве нулю тангенциальной составляющей суммарного электрического поля. Поэтому рассмотрим следующую суперпозицию двух волн (с правой и левой поляризациями) с одинаковыми значениями J и M:

$$\vec{E}_{JM\nu}(\vec{r}) = \sum_{\nu=\pm 1}\{E^{1}_{JM\nu}\vec{F}_{JM\nu}(h^{(1)}\,|\,k,\vec{r}) + E^{2}_{JM\nu}\vec{F}_{JM\nu}(h^{(2)}\,|\,k,\vec{r})\}. \quad (4)$$

Поле внутри биизотропного шара, электромагнитные свойства которого описываются материальными уравнениями вида [4-9]:

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E} + (\chi + i\alpha)\vec{H}, \quad \vec{B} = (\chi - i\alpha)\vec{E} + \mu\vec{H}, \quad (5)$$

также можно записать, используя функции (1), где в качестве функций $z_L(\rho)$ нужно выбрать сферические функции Бесселя, так как только они не имеют особенностей вначале координат. Таким образом,

$$\vec{E}^{\hat{a}\acute{i}}_{JM\sigma}(\vec{r}) = \sum_{\sigma=\pm 1} A^{J}_{\sigma}\vec{F}_{JM\sigma}(j\,|\,k_\sigma,\vec{r}). \quad (6)$$

Теперь, используя материальные уравнения соответствующей среды и уравнения Максвелла, нетрудно найти напряженности магнитных полей:

$$\vec{H}_{JM\nu}(\vec{r}) = -i\sum_{\nu=\pm 1} \nu\{E^1_{JM\nu}\vec{F}_{JM\nu}(h^{(1)}\,|\,k,\vec{r}) + E^2_{JM\nu}\vec{F}_{JM\nu}(h^{(2)}\,|\,k,\vec{r})\}, \qquad (7)$$

$$\vec{H}^{\text{âí}}_{JM\sigma}(\vec{r}) = -\sum_{\sigma=\pm 1} A^J_\sigma b_\sigma \vec{F}_{JM\sigma}(j\,|\,k_\sigma,\vec{r}). \qquad (8)$$

Здесь ввели обозначение $b_\sigma = \dfrac{1}{\mu}\left[\chi + i\sigma\sqrt{\varepsilon\mu - \chi^2}\,\right]$.

Для удобства удовлетворения граничным условиям выразим функции $\vec{F}_{JM\nu}(z\,|\,k,\vec{r})$ через векторы $\vec{Y}^{(\lambda)}_{JM}(\vec{n}_r)$: функция $\vec{Y}^{(-1)}_{JM}(\vec{n}_r)$ не имеет тангенциальной составляющей. Используя рекуррентные соотношения для сферических функций, получим:

$$\vec{F}_{JM\nu}(z\,|\,k,\vec{r}) = z_J(kr)\vec{Y}^{(0)}_{JM}(\vec{n}_r) + i\nu\frac{1}{kr}\hat{z}'_J(kr)\vec{Y}^{(1)}_{JM}(\vec{n}_r) + i\nu\, a_J b_J\frac{2J+1}{kr} z_J(kr)\vec{Y}^{(-1)}_{JM}(\vec{n}_r). \qquad (9)$$

В (9) $\hat{z}(\rho) = \rho z(\rho)$, а штрих обозначает дифференцирование оп соответствующему аргументу. С учетом (9), например, формула (4) запишется в виде:

$$\vec{E}_{JM\nu}(\vec{r}) = \sum_{\nu=\pm 1}\left\{E^1_{JM\nu}\left[h^{(1)}_J(kr)\vec{Y}^{(0)}_{J\nu}(\vec{n}_r) + i\nu\frac{1}{kr}\hat{h}^{(1)\prime}_J(kr)\vec{Y}^{(1)}_{J\nu}(\vec{n}_r) + i\nu\, a_J b_J\frac{2J+1}{kr}h^{(1)}_J(kr)\vec{Y}^{(-1)}_{J\nu}(\vec{n}_r)\right] + \right.$$

$$\left. + E^2_{JM\nu}\left[h^{(2)}_J(kr)\vec{Y}^{(0)}_{J\nu}(\vec{n}_r) + i\nu\frac{1}{kr}\hat{h}^{(2)\prime}_J(kr)\vec{Y}^{(1)}_{J\nu}(\vec{n}_r) + i\nu\, a_J b_J\frac{2J+1}{kr}h^{(2)}_J(kr)\vec{Y}^{(-1)}_{J\nu}(\vec{n}_r)\right]\right\}.$$

Граничные условия, заключающиеся в непрерывности тангенциальных составляющих суммарных электрического и магнитного полей на границе раздела вакуум-биизотропная среда ($r = r_0$), а также в занулении тангенциальной составляющей электрического поля на границе вакуум-металл ($r = R$), записываются следующим образом:

$$\begin{cases} \left[\vec{n},\vec{E}_{JM\nu}(\vec{r})\right]_{r=R} = 0; \\ \left[\vec{n},\vec{E}_{JM\nu}(\vec{r}) - \vec{E}^{\text{âí}}_{JM\sigma}(\vec{r})\right]_{r=r_0} = 0; \\ \left[\vec{n},\vec{H}_{JM\nu}(\vec{r}) - \vec{H}^{\text{âí}}_{JM\sigma}(\vec{r})\right]_{r=r_0} = 0. \end{cases} \qquad (10)$$

Система для определения собственных частот рассматриваемого резонатора:

$$\begin{cases} h^{(1)}_J(kR)E^1_{+1} + h^{(1)}_J(kR)E^1_{-1} + h^{(2)}_J(kR)E^2_{+1} + h^{(2)}_J(kR)E^2_{-1} = 0; \\ \hat{h}^{(1)\prime}_J(kR)E^1_{+1} - \hat{h}^{(1)\prime}_J(kR)E^1_{-1} + \hat{h}^{(2)\prime}_J(kR)E^2_{+1} - \hat{h}^{(2)\prime}_J(kR)E^2_{-1} = 0; \\ h^{(1)}_J(kr_0)E^1_{+1} + h^{(1)}_J(kr_0)E^1_{-1} + h^{(2)}_J(kr_0)E^2_{+1} + h^{(2)}_J(kr_0)E^2_{-1} - j_J(k_{+1}r_0)A_{+1} - j_J(k_{-1}r_0)A_{-1} = 0; \\ \hat{h}^{(1)\prime}_J(kr_0)E^1_{+1} - \hat{h}^{(1)\prime}_J(kr_0)E^1_{-1} + \hat{h}^{(2)\prime}_J(kr_0)E^2_{+1} - \hat{h}^{(2)\prime}_J(kr_0)E^2_{-1} - \dfrac{\hat{j}'_J(k_{+1}r_0)}{n_{+1}}A_{+1} + \dfrac{\hat{j}'_J(k_{-1}r_0)}{n_{-1}}A_{-1} = 0; \\ h^{(1)}_J(kr_0)E^1_{+1} - h^{(1)}_J(kr_0)E^1_{-1} + h^{(2)}_J(kr_0)E^2_{+1} - h^{(2)}_J(kr_0)E^2_{-1} + ib_{+1}j_J(k_{+1}r_0)A_{+1} + ib_{-1}j_J(k_{-1}r_0)A_{-1} = 0; \\ \hat{h}^{(1)\prime}_J(kr_0)E^1_{+1} + \hat{h}^{(1)\prime}_J(kr_0)E^1_{-1} + \hat{h}^{(2)\prime}_J(kr_0)E^2_{+1} + \hat{h}^{(2)\prime}_J(kr_0)E^2_{-1} + ib_{+1}\dfrac{\hat{j}'_J(k_{+1}r_0)}{n_{+1}}A_{+1} - ib_{-1}\dfrac{\hat{j}'_J(k_{-1}r_0)}{n_{-1}}A_{-1} = 0, \end{cases} \qquad (11)$$

является однородной и имеет нетривиальное решение, когда ее определитель равен нулю, то есть

$$\begin{vmatrix} h^{(1)}_J(kR) & h^{(1)}_J(kR) & h^{(2)}_J(kR) & h^{(2)}_J(kR) & 0 & 0 \\ \hat{h}^{(1)\prime}_J(kR) & -\hat{h}^{(1)\prime}_J(kR) & \hat{h}^{(2)\prime}_J(kR) & -\hat{h}^{(2)\prime}_J(kR) & 0 & 0 \\ h^{(1)}_J(kr_0) & h^{(1)}_J(kr_0) & h^{(2)}_J(kr_0) & h^{(2)}_J(kr_0) & -j_J(k_{+1}r_0) & -j_J(k_{-1}r_0) \\ \hat{h}^{(1)\prime}_J(kr_0) & -\hat{h}^{(1)\prime}_J(kr_0) & \hat{h}^{(2)\prime}_J(kr_0) & -\hat{h}^{(2)\prime}_J(kr_0) & -\dfrac{\hat{j}'_J(k_{+1}r_0)}{n_{+1}} & \dfrac{\hat{j}'_J(k_{-1}r_0)}{n_{-1}} \\ h^{(1)}_J(kr_0) & -h^{(1)}_J(kr_0) & h^{(2)}_J(kr_0) & -h^{(2)}_J(kr_0) & ib_{+1}j_J(k_{+1}r_0) & ib_{-1}j_J(k_{-1}r_0) \\ \hat{h}^{(1)\prime}_J(kr_0) & \hat{h}^{(1)\prime}_J(kr_0) & \hat{h}^{(2)\prime}_J(kr_0) & \hat{h}^{(2)\prime}_J(kr_0) & i\dfrac{b_{+1}\hat{j}'_J(k_{+1}r_0)}{n_{+1}} & -i\dfrac{b_{-1}\hat{j}'_J(k_{-1}r_0)}{n_{-1}} \end{vmatrix} = 0. \qquad (12)$$

Раскрывая определитель (12) получим трансцендентное уравнение для определения собственных частот сферического металлического резонатора с биизотропным ядром и вакуумным слоем. Подставив найденные частоты в (11), получим систему для определения собственных функций рассматриваемого резонатора.

Теперь рассмотрим задачу о собственных частотах и собственных функциях электромагнитного резонатора, представляющего собой металлическую сферу радиуса R, имеющую вакуумную полость радиуса r_0 в биизотропном слое. Стоячая волна в биизотропном слое запишется в виде:

$$\vec{E}_{JM\nu}(\vec{r}) = E^1_{JM\nu}\vec{F}_{JM\nu}(h^{(1)} \mid k_\nu, \vec{r}) + E^2_{JM\nu}\vec{F}_{JM\nu}(h^{(2)} \mid k_\nu, \vec{r}). \tag{13}$$

Но так как любая из функций вида (13), взятая отдельно, не удовлетворяет граничным условиям на поверхностях резонатора, необходимо, аналогично (4), рассмотреть следующую суперпозицию двух волн (с правой и левой поляризациями) с одинаковыми значениями J и M:

$$\vec{E}_{JM\nu}(\vec{r}) = \sum_{\nu=\pm1}\{E^1_{JM\nu}\vec{F}_{JM\nu}(h^{(1)} \mid k_\nu, \vec{r}) + E^2_{JM\nu}\vec{F}_{JM\nu}(h^{(2)} \mid k_\nu, \vec{r})\}. \tag{14}$$

Электромагнитное поле в вакуумной полости также можно описать, используя (1), имеем

$$\vec{E}^{\text{âí}}_{JM\sigma}(\vec{r}) = \sum_{\sigma=\pm1} A^J_\sigma \vec{F}_{JM\sigma}(j \mid k, \vec{r}). \tag{15}$$

Используя уравнения Максвелла в среде и материальные уравнения, находим напряженности магнитных полей волны в биизотропном слое и волны в вакуумной полости:

$$\vec{H}_{JM\nu}(\vec{r}) = -\sum_{\nu=\pm1} b_\nu\{E^1_{JM\nu}\vec{F}_{JM\nu}(h^{(1)} \mid k_\nu, \vec{r}) + E^2_{JM\nu}\vec{F}_{JM\nu}(h^{(2)} \mid k_\nu, \vec{r})\}, \tag{16}$$

$$\vec{H}^{\text{âí}}_{JM\sigma}(\vec{r}) = -i\sum_{\sigma=\pm1} \sigma A^J_\sigma \vec{F}_{JM\sigma}(j \mid k, \vec{r}). \tag{17}$$

Условия, на границах раздела биизотропный слой – вакуум ($r = r_0$) и биизотропный слой – металл ($r = R$) дают следующую систему для определения собственных частот рассматриваемого резонатора:

$$\left\{\begin{aligned}
& h^{(1)}_J(k_{+1}R)E^1_{+1} + h^{(1)}_J(k_{-1}R)E^1_{-1} + h^{(2)}_J(k_{+1}R)E^2_{+1} + h^{(2)}_J(k_{-1}R)E^2_{-1} = 0;\\
& \frac{\hat{h}^{(1)\prime}_J(k_{+1}R)}{n_{+1}}E^1_{+1} - \frac{\hat{h}^{(1)\prime}_J(k_{-1}R)}{n_{-1}}E^1_{-1} + \frac{\hat{h}^{(2)\prime}_J(k_{+1}R)}{n_{+1}}E^2_{+1} - \frac{\hat{h}^{(2)\prime}_J(k_{-1}R)}{n_{-1}}E^2_{-1} = 0;\\
& h^{(1)}_J(k_{+1}r_0)E^1_{+1} + h^{(1)}_J(k_{-1}r_0)E^1_{-1} + h^{(2)}_J(k_{+1}r_0)E^2_{+1} + h^{(2)}_J(k_{-1}r_0)E^2_{-1} - j_J(kr_0)A_{+1} - j_J(kr_0)A_{-1} = 0;\\
& \frac{\hat{h}^{(1)\prime}_J(k_{+1}r_0)}{n_{+1}}E^1_{+1} - \frac{\hat{h}^{(1)\prime}_J(k_{-1}r_0)}{n_{-1}}E^1_{-1} + \frac{\hat{h}^{(2)\prime}_J(k_{+1}r_0)}{n_{+1}}E^2_{+1} - \frac{\hat{h}^{(2)\prime}_J(k_{-1}r_0)}{n_{-1}}E^2_{-1} - \hat{j}'_J(kr_0)A_{+1} + \hat{j}'_J(kr_0)A_{-1} = 0;\\
& b_{+1}h^{(1)}_J(k_{+1}r_0)E^1_{+1} + b_{-1}h^{(1)}_J(k_{-1}r_0)E^1_{-1} + b_{+1}h^{(2)}_J(k_{+1}r_0)E^2_{+1} + b_{-1}h^{(2)}_J(k_{-1}r_0)E^2_{-1} - ij_J(kr_0)A_{+1} + ij_J(kr_0)A_{-1} = 0;\\
& \frac{b_{+1}\hat{h}^{(1)\prime}_J(k_{+1}r_0)}{n_{+1}}E^1_{+1} - \frac{b_{-1}\hat{h}^{(1)\prime}_J(k_{-1}r_0)}{n_{-1}}E^1_{-1} + \frac{b_{+1}\hat{h}^{(2)\prime}_J(k_{+1}r_0)}{n_{+1}}E^2_{+1} - \frac{b_{-1}\hat{h}^{(2)\prime}_J(k_{-1}r_0)}{n_{-1}}E^2_{-1} - i\hat{j}'_J(kr_0)A_{+1} - i\hat{j}'_J(kr_0)A_{-1} = 0.
\end{aligned}\right. \tag{18}$$

Полученная однородная система уравнений имеет нетривиальное решение, когда ее определитель равен нулю, то есть

$$\begin{vmatrix}
h^{(1)}_J(k_{+1}R) & h^{(1)}_J(k_{-1}R) & h^{(2)}_J(k_{+1}R) & h^{(2)}_J(k_{-1}R) & 0 & 0\\
\frac{\hat{h}^{(1)\prime}_J(k_{+1}R)}{n_{+1}} & -\frac{\hat{h}^{(1)\prime}_J(k_{-1}R)}{n_{-1}} & \frac{\hat{h}^{(2)\prime}_J(k_{+1}R)}{n_{+1}} & -\frac{\hat{h}^{(2)\prime}_J(k_{-1}R)}{n_{-1}} & 0 & 0\\
h^{(1)}_J(k_{+1}r_0) & h^{(1)}_J(k_{-1}r_0) & h^{(2)}_J(k_{+1}r_0) & h^{(2)}_J(k_{-1}r_0) & -j_J(kr_0) & -j_J(kr_0)\\
\frac{\hat{h}^{(1)\prime}_J(k_{+1}r_0)}{n_{+1}} & -\frac{\hat{h}^{(1)\prime}_J(k_{-1}r_0)}{n_{-1}} & \frac{\hat{h}^{(2)\prime}_J(k_{+1}r_0)}{n_{+1}} & -\frac{\hat{h}^{(2)\prime}_J(k_{-1}r_0)}{n_{-1}} & -\hat{j}'_J(kr_0) & \hat{j}'_J(kr_0)\\
b_{+1}h^{(1)}_J(k_{+1}r_0) & b_{-1}h^{(1)}_J(k_{-1}r_0) & b_{+1}h^{(2)}_J(k_{+1}r_0) & b_{-1}h^{(2)}_J(k_{-1}r_0) & -ij_J(kr_0) & ij_J(kr_0)\\
\frac{b_{+1}\hat{h}^{(1)\prime}_J(k_{+1}r_0)}{n_{+1}} & -\frac{b_{-1}\hat{h}^{(1)\prime}_J(k_{-1}r_0)}{n_{-1}} & \frac{b_{+1}\hat{h}^{(2)\prime}_J(k_{+1}r_0)}{n_{+1}} & -\frac{b_{-1}\hat{h}^{(2)\prime}_J(k_{-1}r_0)}{n_{-1}} & -i\hat{j}'_J(kr_0) & -i\hat{j}'_J(kr_0)
\end{vmatrix} = 0. \tag{19}$$

Раскрывая определитель (19) получим трансцендентное уравнение для определения собственных частот сферического металлического резонатора, имеющего вакуумную полость в биизотропном слое. Подставив в систему уравнений (18) найденные частоты, получим систему для определения собственных функций рассматриваемого резонатора.

Abstract. Using an integral form of the Schrödinger equation for the Jost solutions and performing complex dilation in the coordinate plane analytical conditions allowing to find resonance energies (momentum) are derived. The method is illustrated in the example of some analytical potentials $U(r) = U_0 r^n e^{-r}$.

Литература

1. В.Н.Капшай, В.В.Кондратюк, Известия вузов. Физика. Т. 68, Вып. 1 (1990), 122-127
2. А.Б.Варшалович, А.Н.Москалев, В.К.Херсонский, *Квантовая теория углового момента*, Л.: Наука (1975), 439с.
3. Годлевская А.Н., Капшай В.Н. Оптика и спектроскопия, Т. 68, Вып. 1 (1990), 122-127
4. A.H. Sihvola, I.V. Lindell, Microwave and Opt. Technol. Lett., **4**, N.8 (1991), 295-297
5. J.C. Monzon, IEEE Transactions of Antennas and Propagation, **38**, N.2 (1990), 227-235
6. I.V. Lindell, A.H. Sihvola, A.J. Viitanen, Microwave and Opti. Technol. Lett., **5**, N.2 (1992), 79-81
7. I.V. Lindell, Proccedings of " Bi – isotropics' 93". Helsinki Univ. Tech. Electromagn. Lab. Rept 137, February 1993
8. I.V. Semchenko, S.A. Tretyakov, A.N. Serdyukov, Progress in Electromagnetic Research (PIER), **12** (1996), 335-370
9. S. Bolioli, Advances in Complex Electromagnetic Materials. – Kluwer Academic Publishers, Netherlands (1997), 33-51

Гомельский государственный
университет имени Ф. Скорины

Поступило __.__.__