Известия Гомельского государственного университета
имени Ф.Скорины, 6(27), 2004

УДК 512.542

Операторы замыкания для ω-локальных классов Фиттинга

Е.Н.Залесская

Введение

Одним из основополагающих результатов о взаимосвязи разрешимых корадикальных и радикальных классов (формаций и классов Фиттинга) в теории формаций групп является теорема Брайса-Косси [1] о том, что локальная разрешимая формация является τ-замкнутым классом для оператора замыкания $\tau \in \{S, S_n, N_0\}$, в частности, формацией Фиттинга, тогда и только тогда, когда все значения ее наибольшего приведенного спутника τ-замкнуты. Результат такого же типа был доказан для случая локальной формации произвольных групп Подуфаловой и Слеповой (см., например, теоремы 4.7 и 4.10 [2]).

В теории классов Фиттинга возникает дуальная задача — задача характеризации локального τ-замкнутого класса Фиттинга для оператора замыкания $\tau \in \{S, Q, R_0\}$ посредством наличия свойства τ-замкнутости у всех значений наибольшей приведенной функции Хартли, которая его определяет.

Решение указанной задачи для ω-локальных (в частности, локальных) классов Фиттинга — основной результат настоящей работы. Все рассматриваемые нами группы конечны.

§1. Предварительные сведения

Напомним, что если $\mathfrak{X}$ — класс групп, то

$S\mathfrak{X} = (G \mid G \leq H$ для некоторой группы $H \in \mathfrak{X})$; если $\mathfrak{X} = S\mathfrak{X}$, то класс $\mathfrak{X}$ называется наследственным или S-замкнутым;

$S_n\mathfrak{X} = (G \mid G sn H$ для некоторой группы $H \in \mathfrak{X})$; если $\mathfrak{X} = S_n\mathfrak{X}$, то класс $\mathfrak{X}$ называется нормально наследственным или S_n-замкнутым;

$Q\mathfrak{X} = (G \mid \exists H \in \mathfrak{X}$ и эпиморфизм H на G); если $\mathfrak{X} = Q\mathfrak{X}$, то класс $\mathfrak{X}$ называется гомоморфом или Q-замкнутым;

$R_0\mathfrak{X} = (G \mid \exists N_i \trianglelefteq G (i = 1, ..., r)$, такие, что $G/N_i \in \mathfrak{X}$ и $\cap_{i=1}^{r} N_i = 1)$; если $\mathfrak{X} = R_0\mathfrak{X}$, то класс $\mathfrak{X}$ называется R_0-замкнутым;

$N_0\mathfrak{X} = (G \mid \exists K_i sn G (i = 1, ..., r)$, такие, что $K_i \in \mathfrak{X}$ и $G =< K_1, ..., K_r >)$; если $\mathfrak{X} = N_0\mathfrak{X}$, то класс $\mathfrak{X}$ называется N_0-замкнутым.

Напомним, что ω-локальные классы Фиттинга впервые были определены в работе А.Н.Скибы и Л.А.Шеметкова [3].

Пусть $\varnothing \neq \omega \subseteq \mathbb{P}$, где $\mathbb{P}$ — множество всех простых чисел. Отображение $f : \omega \cup \{\omega'\} \rightarrow \{$классы Фиттинга$\}$ называется ω-локальной функцией Хартли или ω-локальной H-функцией.

Пусть $LR_\omega(f) = \{G \mid G^{\omega d} \in f(\omega')$ и $F^p(G) \in f(p)$ для всех $p \in \omega \cap \pi(G)\}$, где $G^{\omega d} = G^{\mathfrak{E}_{\omega d}}$, $F^p(G) = G^{\mathfrak{N}_p \mathfrak{E}_{p'}}$ и $\mathfrak{E}_{\omega d}$ — класс всех тех групп, у которых каждый композиционный фактор является ωd-группой.

Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется ω-локальным [3], если существует некоторая ω-локальная Н-функция f такая, что $\mathfrak{F} = LR_\omega(f)$.

Если $\mathfrak{F} = LR_\omega(f)$ для ω-локальной H-функции f, то согласно результату А.Н.Скибы и Л.А.Шеметкова [3] $\mathfrak{F}$ определяется формулой:

$$\mathfrak{F} = (\cap_{p\in\pi_2}\mathfrak{E}_{p'}) \cap (\cap_{p\in\pi_1} f(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'}) \cap f(\omega')\mathfrak{E}_{\omega d}, \qquad (*)$$

где $\pi_1 = \omega \cap Supp(f)$, Supp(f)=$\{a \in \omega \cup \{\omega'\} \mid f(a) \neq \varnothing\}$, $\pi_2 = \omega \backslash \pi_1$.

Лемма 1.1 ([4, с.273]). *Класс $\mathfrak{X}$ R_0-замкнут при условии, что если группа G имеет нормальные подгруппы N_1 и N_2, такие, что $G/N_i \in \mathfrak{X}(i = 1, 2)$ и $N_1 \cap N_2 = 1$, то $G \in \mathfrak{X}$.*

Лемма 1.2 ([4, с.686]). *Если оператор замыкания $\tau \in \{S, Q, R_0\}$, то τ-замкнутый класс Фиттинга является классом Локетта.*

Лемма 1.3 ([4, с.63]). *Пусть G и H — группы и $W = G \wr H$. Если $N \lhd G$, то $N^* \lhd W$ и*

$$W/N^* \simeq (G/N) \wr H.$$

Лемма 1.4 [4, с.697]). *Если $\mathfrak{F}$ — класс Локетта и группа $G \notin \mathfrak{F}$, то для любой группы H $\mathfrak{F}$-радикал сплетения*

$$(G \wr H)_\mathfrak{F} = (G_\mathfrak{F})^*.$$

Пусть $\mathfrak{X}$ — произвольная совокупность групп, p — некоторое простое число. Тогда

$$\mathfrak{X}(F^p) = \begin{cases} Fit(F^p(G) | G \in \mathfrak{X}), & p \in \pi(\mathfrak{X}); \\ \varnothing, & p \notin \pi(\mathfrak{X}). \end{cases}$$

Лемма 1.5 ([3, с.139]). *Пусть $\mathfrak{F}$ — класс Фиттинга. Тогда следующие условия равносильны:*

1)$\mathfrak{F}(F^p)\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{F}$ для всех $p \in \omega$;

2)$\mathfrak{F} = LR_\omega(f)$, где $f(\omega') = \mathfrak{F}$ и $f(p) = \mathfrak{F}(F^p)\mathfrak{N}_p$ для всех $p \in \omega$;

3) класс $\mathfrak{F}$ ω-локален. **Лемма 1.6** ([5]). *Пусть $\mathfrak{F}$ — ω-локальный класс Локетта. Тогда $\mathfrak{F}$ определяется наибольшей приведенной ω-локальной H-функцией F и ее значения являются классами Локетта, причем $F(\omega') = \mathfrak{F}$ и $F(p)\mathfrak{N}_p = F(p) \subseteq \mathfrak{F}$ для всех $p \in \omega$.*

§2. Вспомогательные результаты

Для доказательства основных результатов работы предварительно докажем несколько лемм.

Непосредственная проверка показывает, что справедлива

Лемма 2.1. *Пусть τ — оператор замыкания. Если $\tau \in \{S, Q, R_0\}$ и $\mathfrak{F}_i$ — τ-замкнутый класс Фиттинга для всех $i \in I$, то класс Фиттинга $\mathfrak{F} = \cap_{i\in I}\mathfrak{F}_i$ τ-замкнут.*

Лемма 2.2. *Пусть $\tau \in \{S, Q, R_0\}$ — оператор замыкания и $\mathfrak{F} = \prod_{i=1}^n \mathfrak{F}_i$. Если $\mathfrak{F}_1$ — τ-замкнутый класс Фиттинга и $\mathfrak{F}_j$ — τ-замкнутый радикальный гомоморф для любого $j \in \{2, ..., n\}$, то $\mathfrak{F}$ — τ-замкнутый класс Фиттинга.*

Доказательство. Докажем методом индукции по числу сомножителей n. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2$, где $\mathfrak{F}_1$ — τ-замкнутый класс Фиттинга и $\mathfrak{F}_2$ — τ-замкнутый радикальный гомоморф.

Рассмотрим следующие случаи:

1. $\tau = S$.

Пусть $G \in \mathfrak{F}$. Тогда если H — подгруппа группы G, то $G_{\mathfrak{F}_1} \cap H \subseteq G_{\mathfrak{F}_1} \in \mathfrak{F}_1$. Следовательно, $G_{\mathfrak{F}_1} \cap H \in \mathfrak{F}_1$. Так как $HG_{\mathfrak{F}_1}/G_{\mathfrak{F}_1}$ — подгруппа группы $G/G_{\mathfrak{F}_1} \in \mathfrak{F}_2$, то ввиду изоморфизма

$$H/H \cap G_{\mathfrak{F}_1} \simeq HG_{\mathfrak{F}_1}/G_{\mathfrak{F}_1}$$

и S-замкнутости класса $\mathfrak{F}_2$ следует, что $H/H \cap G_{\mathfrak{F}_1} \in \mathfrak{F}_2$. Значит, $H \in \mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2 = \mathfrak{F}$ и класс $\mathfrak{F}$ S-замкнут.

2. $\tau = Q$.

Пусть $G \in \mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2$ и K — нормальная подгруппа группы G. Тогда ввиду изоморфизма

$$G_{\mathfrak{F}_1}K/K \simeq G_{\mathfrak{F}_1}/G_{\mathfrak{F}_1} \cap K = G_{\mathfrak{F}_1}/K_{\mathfrak{F}_1}$$

и того, что класс $\mathfrak{F}_1$ Q-замкнут, получаем, что $G_{\mathfrak{F}_1}K/K \in \mathfrak{F}_1$. Но $G/G_{\mathfrak{F}_1} \in \mathfrak{F}_2$. Следовательно,

$$G/G_{\mathfrak{F}_1}/G_{\mathfrak{F}_1}K/G_{\mathfrak{F}_1} \simeq G/G_{\mathfrak{F}_1}K \in \mathfrak{F}_2.$$

Теперь, учитывая изоморфизм

$$G/G_{\mathfrak{F}_1}K \simeq G/K/G_{\mathfrak{F}_1}K/K \in \mathfrak{F}_2$$

следует, что $G/K \in \mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2$ и класс $\mathfrak{F}$ является Q-замкнутым.

3. $\tau = R_0$.

Предположим, что $G/K_i \in \mathfrak{F}$, i=1,2. Без ограничения общности мы можем считать, что $K_1 \cap K_2 = 1$. Пусть $L_i/K_i = (G/K_i)_{\mathfrak{F}_1}$. Тогда ввиду изоморфизма

$$L_1 \cap L_2/L_1 \cap K_2 \simeq (L_1 \cap L_2)K_2/K_2$$

и того, что

$$(L_1 \cap L_2)K_2/K_2 \trianglelefteq L_2/K_2 \in \mathfrak{F}_1,$$

следует

$$L_1 \cap L_2/L_1 \cap K_2 \in \mathfrak{F}_1.$$

Аналогично получаем, что

$$L_1 \cap L_2/L_2 \cap K_1 \in \mathfrak{F}_1.$$

Но класс $\mathfrak{F}_1$ является R_0-замкнутым. Следовательно,

$$L_1 \cap L_2/(L_1 \cap K_2) \cap (L_2 \cap K_1) = L_1 \cap L_2 \in \mathfrak{F}_1.$$

Теперь, из того, что $G/K_i \in \mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2$, i=1,2, следует, что

$$G/K_i/L_i/K_i \in \mathfrak{F}_2.$$

Но

$$G/K_i/L_i/K_i \simeq G/L_i.$$

Значит, $G/L_i \in \mathfrak{F}_2$ и поэтому $G/L_1 \cap L_2 \in \mathfrak{F}_2$. Отсюда $G \in \mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2 = \mathfrak{F}$ и класс $\mathfrak{F}$ является R_0-замкнутым по лемме 1.1.

Теперь, учитывая свойство ассоциативности умножения классов Фиттинга, заключаем, что лемма верна для любого числа сомножителей n. Лемма доказана.

Лемма 2.3. *Пусть $\mathfrak{F} = LR_\omega(F)$, где F — наибольшая приведенная ω-локальная H-функция и $W = G \wr Z_p$ — регулярное сплетение группы G с циклической группой порядка p. Если $p \in \omega$ и G является $F(p)$-группой, то $W \in \mathfrak{F}$.*

Доказательство. Пусть G^* — базисная группа регулярного сплетения W.

Покажем, что если $G \in F(p)$, то $W \in \mathfrak{F}$.

Учитывая определение класса Фиттинга, $G^* \in F(p)$, и поэтому $G^* \subseteq W_{F(p)}$. Составим факторгруппу $W/G^*/W_{F(p)}/G^*$. Но тогда ввиду изоморфизмов

$$W/G^*/W_{F(p)}/G^* \simeq W/W_{F(p)}$$

и

$$W/G^* \simeq Z_p \in \mathfrak{N}_p$$

следует, что $W_{F(p)} = G^*$ или $W = W_{F(p)}$. Очевидно, что в каждом случае $W \in F(p)\mathfrak{N}_p$. Но по условию F — наибольшая приведенная ω-локальная H-функция. Значит, $F(p)\mathfrak{N}_p = F(p) \subseteq \mathfrak{F}$, а поэтому $W \in F(p) \subseteq \mathfrak{F}$. Лемма доказана.

§3. Формации Фиттинга

Напомним, что класс групп называется формацией Фиттинга, если он является одновременно формацией и классом Фиттинга.

Теорема 3.1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — ω-локальный класс Фиттинга. Класс $\mathfrak{F}$ является τ-замкнутым для оператора замыкания $\tau \in \{Q, R_0\}$ тогда и только тогда, когда каждое значение его наибольшей приведенной ω-локальной H-функции F τ-замкнуто.*

Доказательство. Так как $\mathfrak{F} = LR_\omega(F)$, где F — наибольшая приведенная ω-локальная H-функция класса $\mathfrak{F}$, то ввиду [3] ω-локальный класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ определяется формулой

$$\mathfrak{F} = (\cap_{p \in \pi_2} \mathfrak{E}_{p'}) \cap (\cap_{p \in \pi_1} F(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'}) \cap F(\omega')\mathfrak{E}_{\omega d}, \qquad (*)$$

где $\pi_1 = \omega \cap Supp(F), \pi_2 = \omega \setminus \pi_1$.

В зависимости от значений оператора замыкания τ рассмотрим два случая.

1. $\tau = Q$.

Тот факт, что если значение $F(a)$ наибольшей приведенной ω-локальной H-функции F является Q-замкнутым классом для каждого $a \in \omega \cup \{\omega'\}$, то и $\mathfrak{F}$ — Q-замкнутый класс Фиттинга вытекает непосредственно из того, что классы групп $\mathfrak{E}_{\pi_2'}, \mathfrak{N}_p, \mathfrak{E}_{p'}, \mathfrak{E}_{\omega d}$ являются Q-замкнутыми ввиду лемм 2.1, 2.2 и равенства $(*)$.

Докажем, что из Q-замкнутости класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ следует, что и значение ω-локальной H-функции F является Q-замкнутым для всех $a \in \omega \cup \{\omega'\}$.

Так как $\mathfrak{F}$ — Q-замкнутый класс Фиттинга, то по лемме 1.2, $\mathfrak{F}$ — класс Локетта. Если $a = \omega'$, то ввиду леммы 1.6, $F(\omega') = \mathfrak{F}$ — Q-замкнутый класс Фиттинга. Пусть $a \in \omega \setminus \pi_1$. В этом случае $F(a) = \varnothing$ и класс $F(a)$ является Q-замкнутым для всех $a \in \omega \setminus \pi_1$.

Остается проверить, что из Q-замкнутости класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ вытекает Q-замкнутость класса $F(p)$ для всех $p \in \pi_1$.

Допустим, что существует такое $p \in \pi_1$, что класс $F(p)$ не является Q-замкнутым, то есть имеется группа $G \in F(p)$ с нормальной подгруппой N такая, что факторгруппа $G/N \notin F(p)$.

Пусть $W = G \wr Z_p$. По лемме 2.3, $W \in \mathfrak{F}$. Рассмотрим теперь регулярное сплетение $W_1 = (G/N) \wr Z_p$ групп G/N и Z_p. По лемме 1.3, оно изоморфно факторгруппе $(G \wr Z_p)/N^*$.

Так как класс групп $\mathfrak{F}$ является Q-замкнутым, то $W/N^* \in \mathfrak{F}$. Следовательно, $W_1 \in \in \mathfrak{F}$ и поэтому ввиду равенства (*) $W_1 \in (\cap_{p\in\pi_1} F(p)\mathfrak{E}_{p'}$. Значит, $W_1/(W_1)_{F(p)} \in \mathfrak{E}_{p'}$ и $p \not| \ |W_1/(W_1)_{F(p)}|$ для некоторого $p \in \pi_1$.

С другой стороны, по лемме 1.6, $F(p)$ — класс Локетта и $G/N \notin F(p)$ для некоторого $p \in \pi_1$. Тогда, применяя лемму 1.4, получаем, что

$$(G/N \wr Z_p)_{F(p)} = ((G/N)_{F(p)})^*.$$

Используя свойства сплетения, имеем

$$W_1/((G/N)_{F(p)})^* \simeq ((G/N)/(G/N)_{F(p)}) \wr Z_p.$$

Но $W_1 = G/N \wr Z_p$, значит, $(W_1)_{F(p)} = ((G/N)_{F(p)})^*$ и

$$W_1/(W_1)_{F(p)} \simeq ((G/N)/(G/N)_{F(p)}) \wr Z_p.$$

Отсюда вытекает, что порядок факторгруппы $W_1/(W_1)_{F(p)}$ не является p'-числом.

Полученное противоречие показывает, что класс $F(p)$ является Q-замкнутым для всех $p \in \pi_1$.

Итак, все значения наибольшей приведенной ω-локальной H-функции F являются Q-замкнутыми для любого $a \in \omega \cup \{\omega'\}$.

2. $\tau = R_0$.

Так как классы групп $\mathfrak{E}_{\pi_2'}, \mathfrak{N}_p, \mathfrak{E}_{p'}, \mathfrak{E}_{\omega d}$ являются R_0-замкнутыми, то ввиду лемм 2.1, 2.2 и равенства (*) получаем, что $\mathfrak{F}$ — R_0-замкнутый класс Фиттинга.

Покажем обратное: что из R_0-замкнутости класса $\mathfrak{F}$ вытекает R_0-замкнутость значений наибольшей приведенной ω-локальной H-функции F для всех $a \in \omega \cup \{\omega'\}$.

Так как класс $\mathfrak{F}$ — R_0-замкнутый класс Фиттинга, то по лемме 1.2, $\mathfrak{F}$ — класс Локетта. Очевидно, если $a = \omega'$, то по лемме 1.6, класс $F(\omega') = \mathfrak{F}$ — R_0-замкнут. Если же $a \in \omega\backslash\pi_1$, то в этом случае $F(a) = \varnothing$ и класс $F(a)$ является R_0-замкнутым для всех $a \in \omega\backslash\pi_1$.

Теперь остается выяснить, что если класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ является R_0-замкнутым, то и класс $F(p)$ является R_0-замкнутым для всех $p \in \pi_1$.

Допустим, что существует такое $p \in \pi_1$, что класс $F(p)$ не R_0-замкнут, то есть имеются факторгруппы $G/N_i, i = 1, 2$, которые принадлежат $F(p)$, где N_i — нормальная подгруппа группы G, но факторгруппа $G/N_1 \cap N_2 \notin F(p)$ для некоторого $p \in \pi_1$.

Без ограничения общности можно считать, что $N_1 \cap N_2 = 1$.

Пусть $W_i = G/N_i \wr Z_p, i = 1, 2$ и $W = G \wr Z_p$. По лемме 2.3 следует, что $W_i \in \mathfrak{F}$. Учитывая лемму 1.3, имеем

$$W_i \simeq (G \wr Z_p)/N_i^* = W/N_i^* \in \mathfrak{F}.$$

Отсюда, ввиду R_0-замкнутости класса групп $\mathfrak{F}$ заключаем, что $W/N_1^* \cap N_2^* \in \mathfrak{F}$.

Легко видеть, что $W/N_1^* \cap N_2^* = W \in \mathfrak{F}$, и поэтому

$$W \in \mathfrak{E}_{\pi_2'} \cap (\cap_{p\in\pi_1} F(p)\mathfrak{E}_{p'}) \cap F(\omega')\mathfrak{E}_{\omega d}.$$

А это означает, что порядок факторгруппы $W/W_{F(p)}$ является p'-числом для некоторого $p \in \pi_1$.

Но по лемме 1.6, $F(p)$ — класс Локетта и $G/N_1 \cap N_2 = G \notin F(p)$ для некоторого $p \in \pi_1$. Теперь, применяя лемму 1.4, получаем, что $(G \wr Z_p)_{F(p)} = (G_{F(p)})^*$.

Но тогда по лемме 1.3 имеем

$$W/W_{F(p)} = W/(G_{F(p)})^* \simeq (G/G_{F(p)}) \wr Z_p$$

и порядок факторгруппы $W/W_{F(p)}$ не является p'-числом.

Получили противоречие. Следовательно, класс $F(p)$ — R_0-замкнут для всех $p \in \pi_1$. Теорема доказана.

Из теоремы 3.1. вытекает следующий результат.

Следствие 3.2. *ω-Локальный класс Фиттинга является формацией тогда и только тогда, когда все значения его наибольшей приведенной ω-локальной H-функции являются формациями.*

В случае $\omega = P$ мы получаем

Следствие 3.3. *Локальный класс Фиттинга является формацией тогда и только тогда, когда все значения его наибольшей приведенной H-функции являются формациями.*

§4. Наследственные классы Фиттинга

Напомним, что если из того, что группа G принадлежит классу групп $\mathfrak{F}$ и H — ее подгруппа, следует, что H принадлежит $\mathfrak{F}$, то класс групп $\mathfrak{F}$ называется наследственным или S-замкнутым.

Теорема 4.1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — ω-локальный класс Фиттинга. Класс $\mathfrak{F}$ является наследственным тогда и только тогда, когда каждое значение его наибольшей приведенной ω-локальной H-функции F является наследственным классом Фиттинга.*

Доказательство. Покажем вначале, что если все значения наибольшей приведенной ω-локальной H-функции F наследственны, то и $\mathfrak{F}$ — наследственный класс Фиттинга.

Предположим, что $\omega' \neq \varnothing$. Тогда ввиду леммы 1.5, $F(\omega') = \mathfrak{F}$ — наследственный класс Фиттинга. Если $\omega' = \varnothing$, то класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ локален и его можно представить следующим образом:

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{E}_\pi \cap (\cap_{p\in\pi} F(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'}),$$

где $\pi = Supp(F) = \{p \in P | F(p) \neq \varnothing\}$.

Из того, что классы групп $\mathfrak{E}_\pi, \mathfrak{N}_p, \mathfrak{E}_{p'}$ являются наследственными, ввиду лемм 2.1, 2.2 получаем, что $\mathfrak{F}$ — наследственный класс Фиттинга.

Докажем теперь, что если $\mathfrak{F}$ — наследственный класс Фиттинга, то и значения F наследственны для всех $a \in \omega \cup \{\omega'\}$. Так как $\mathfrak{F}$ — наследственный класс Фиттинга, то по лемме 1.2, $\mathfrak{F}$ — класс Локетта. Очевидно, если $a = \omega'$, то по лемме 1.6, $F(\omega') = \mathfrak{F}$, и $F(\omega')$ — наследственный класс Фиттинга. Пусть $a \in \omega \backslash \pi_1$. В этом случае $F(a) = \varnothing$ и класс $F(a)$ наследственнен для всех $a \in \omega \backslash \pi_1$.

Остается показать, что класс $F(p)$ наследственен для всех $p \in \pi_1$, где $\pi_1 = \omega \cap \cap Supp(F)$.

Допустим, что существует такое $p \in \pi_1$, что класс Фиттинга $F(p)$ ненаследственен, то есть для некоторой $F(p)$-группы G ее подгруппа $H \notin F(p)$.

Пусть $W = G \wr Z_p$. Согласно лемме 2.3, $W \in \mathfrak{F}$.

Рассмотрим теперь регулярное сплетение $W_1 = H \wr Z_p$ группы H и группы Z_p. Так как $\mathfrak{F}$ — наследственный класс Фиттинга и $W_1 \subseteq W \in \mathfrak{F}$, то

$$W_1 \in \mathfrak{F} = (\cap_{p\in\pi_2}\mathfrak{E}_{p'}) \cap (\cap_{p\in\pi_1} F(p)\mathfrak{E}_{p'}) \cap F(\omega')\mathfrak{E}_{\omega d}.$$

Отсюда $W_1 \in F(p)\mathfrak{E}_{p'}$ для некоторого $p \in \pi_1$. Значит, $W_1/((W_1)_{F(p)} \in \mathfrak{E}_{p'}$ и $p \nmid |W_1/(W_1)_{F(p)}|$.

Но $F(p)$ — класс Локетта и группа H не принадлежит $F(p)$. Следовательно, по лемме 1.4 получаем $(H \wr Z_p)_{F(p)} = (H_{F(p)})^*$.

Значит, ввиду леммы 1.3 $W_1/(H_{F(p)})^* \simeq (H/H_{F(p)}) \wr Z_p$.

Так как $(W_1)_{F(p)} = (H_{F(p)})^*$ и $W_1/(W_1)_{F(p)} \simeq (H/H_{F(p)}) \wr Z_p$, то заключаем, что порядок факторгруппы $W_1/(W_1)_{F(p)}$ не является p'-числом. Получили противоречие. Следовательно, класс $F(p)$ — S-замкнут для всех $p \in \pi_1$. Теорема доказана.

В случае $\omega = P$ мы получаем следующий результат.

Следствие 4.2. *Локальный класс Фиттинга является наследственным тогда и только тогда, когда все значения его наибольшей приведенной H-функции являются наследственными.*

Ввиду теоремы 1 [6] из теоремы 4.1. вытекает такой результат.

Следствие 4.3. *Разрешимый класс Фиттинга тотально локален тогда и только тогда, когда все значения его наибольшей приведенной H-функции тотально локальны.*

Abstract. Let τ be a closure operator and $\tau \in \{S, Q, R_0\}$. In this paper we classified the τ-closed ω-local Fitting classes by the means of the largest integrated ω-local Hartley function.

Литература

1. R.A.Bryce, J.Cossey, *Fitting formation of finite solvable groups*, Math. Z. **127**:3 (1972), 217–223.

2. Л.А.Шеметков, *Формации конечных групп*, Москва, Наука, 1978.

3. А.Н.Скиба, Л.А.Шеметков, *Кратно ω-локальные формации и классы Фиттинга конечных групп*, Мат. труды, **2**:2 (1999), 114–147.

4. K.Doerk, T.Hawkes, *Finite solvable groups*, Berlin–New York, Walter de Gryeter, 1992.

5. Н.Т.Воробьев, *О наибольшей приведенной функции Хартли*, Известия Гомельского гос. ун-та, 1 (2000), 8–13.

6. Н.Т.Воробьев, *О предположении Хоукса для радикальных классов*, Сиб. матем. ж. **37**:6 (1996), 1296–1302.

Витебский государственный
университет им.П.М.Машерова

Поступило 20.06.04