Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, №4(37), 2006

УДК 517.926

Временные симметрии и периодические решения двумерной неавтономной дифференциальной системы с квадратичными правыми частями

В. В. Мироненко

Будем рассматривать дифференциальную систему

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a_0(t) + a_1(t)x + a_2(t)y + a_3(t)x^2 + a_4(t)xy + a_5(t)y^2, \\ \frac{dy}{dt} &= b_0(t) + b_1(t)x + b_2(t)y + b_3(t)x^2 + b_4(t)xy + b_5(t)y^2, \end{aligned} \quad (1)$$

$t \in I \subset R, (x, y) \in D \subset R^2$, считая коэффициенты $a_k(t)$ и $b_k(t)$ действительными непрерывными функциями.

Наряду с этой системой рассмотрим также дифференциальное уравнение Риккати

$$\frac{dz}{dt} = R(t) + Q(t)z + P(t)z^2. \quad (2)$$

Пусть уравнение (2) задано в комплексной области, т.е. $z = x + iy \in G \subset C, t \in I \subset R.$ Его коэффициенты будем считать комплексными непрерывными функциями:

$$R(t) = R_0(t) + iR_1(t),\ Q(t) = Q_0(t) + iQ_1(t),\ P(t) = P_0(t) + iP_1(t). \quad (3)$$

Лемма 1. *Дифференциальную систему (1) можно записать в виде дифференциального уравнения (2) с комплексными коэффициентами вида (3) тогда и только тогда, когда имеют место следующие соотношения:*

$$\begin{aligned} &R_0(t) = a_0(t),\ R_1(t) = b_0(t); \\ &Q_0(t) = a_1(t) = b_2(t),\ Q_1(t) = b_1(t) = -a_2(t); \\ &P_0(t) = a_3(t) = \frac{b_4(t)}{2} = -a_5(t),\ P_1(t) = b_3(t) = -\frac{a_4(t)}{2} = -b_5(t). \end{aligned} \quad (4)$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть дифференциальная система (1) может быть записана в виде дифференциального уравнения (2) с комплексными коэффициентами вида (3). Тогда из соотношения $\frac{dz}{dt} = \frac{dx}{dt} + i\frac{dy}{dt}$ следует равенство

$$\begin{aligned} &R_0(t) + iR_1(t) + \left(Q_0(t) + iQ_1(t)\right)(x + iy) + \left(P_0(t) + iP_1(t)\right)(x + iy)^2 = \\ &= \left(a_0(t) + a_1(t)x + a_2(t)y + a_3(t)x^2 + a_4(t)xy + a_5(t)y^2\right) + \\ &+ i\left(b_0(t) + b_1(t)x + b_2(t)y + b_3(t)x^2 + b_4(t)xy + b_5(t)y^2\right). \end{aligned}$$

Собирая коэффициенты при различных степенях x и y в правой части этого равенства, придем к соотношениям (4).

Доказательство достаточности, с учетом проведенного доказательства необходимости, является очевидным.

Лемма доказана.

Следствие. *Пусть для коэффициентов дифференциальной системы (1) имеют место следующие соотношения:*

$$\begin{aligned} &a_1(t) = b_2(t),\ a_4(t) = -2b_3(t) = 2b_5(t), \\ &b_1(t) = -a_2(t),\ b_4(t) = 2a_3(t) = -2a_5(t). \end{aligned} \quad (5)$$

Тогда эта система может быть записана в виде уравнения Риккати (2) с комплексными коэффициентами вида (3), которые выражаются через коэффициенты системы (1) по формулам (4).

Для любой функции $P(t,x)$ положим по определению

$$P_{ч}(t,x)=\frac{P(t,x)+P(-t,x)}{2},\ \ P_{н}(t,x)=\frac{P(t,x)-P(-t,x)}{2}.$$

Аналогично [1, с. 34] можно показать, что в том случае, когда функции *z*, *R*(*t*), *Q*(*t*), *P*(*t*) комплекснозначны, отражающая функция дифференциального уравнения (2) определяется выражением

$$F(t,z)=\big(m(t)z+r(t)\big)/\big(s(t)z+m(-t)\big), \tag{6}$$

где $m(t)=l(t)+n(t),$ а нечетные функции *r*(*t*), *s*(*t*), *n*(*t*), и четная функция *l*(*t*) являются решениями линейной дифференциальной системы

$$\begin{cases}\dfrac{dr}{dt}=Q_{н}(t)r(t)-2R_{н}(t)n(t)-2R_{ч}(t)l(t),\\ \dfrac{ds}{dt}=-Q_{н}(t)s(t)-2P_{н}(t)n(t)+2P_{ч}(t)l(t),\\ \dfrac{dn}{dt}=P_{н}(t)r(t)+R_{н}(t)s(t)-Q_{ч}(t)l(t),\\ \dfrac{dl}{dt}=P_{ч}(t)r(t)-2R_{ч}(t)s(t)-2Q_{ч}(t)n(t)\end{cases} \tag{7}$$

с начальными условиями

$$r(0)=s(0)=n(0)=0,\ \ z(0)=1. \tag{8}$$

Все названные нами функции комплексозначны. Будем считать поэтому

$$m(t)=M(t)+iN(t),\ \ r(t)=\alpha(t)+i\beta(t),\ \ s(t)=\gamma(t)+i\delta(t). \tag{9}$$

Здесь *M*(*t*), *N*(*t*), *α*(*t*), *β*(*t*), *γ*(*t*), *δ*(*t*) являются действительными функциями.

Теорема 1. *Пусть для дифференциальной системы (1) выполняются соотношения (5). Тогда отражающая функция этой системы имеет вид*

$$F(t,x,y)=\big(U(t,x,y),V(t,x,y)\big)^{T},$$

$$\begin{aligned}U(t,x,y)=&\frac{\big(M(t)\gamma(t)+N(t)\delta(t)\big)\big(x^2+y^2\big)}{R(t,x,y)}+\\&+\frac{\big(\alpha(t)\gamma(t)-\beta(t)\delta(t)+M(t)M(-t)+N(t)N(-t)\big)x}{R(t,x,y)}+\\&+\frac{\big(M(t)N(-t)-N(t)M(-t)-\alpha(t)\delta(t)-\beta(t)\gamma(t)\big)y}{R(t,x,y)}-\\&-\frac{\alpha(t)M(-t)+\beta(t)N(-t)}{R(t,x,y)},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V(t,x,y)=&\frac{\big(N(t)\gamma(t)-M(t)\delta(t)\big)\big(x^2+y^2\big)}{R(t,x,y)}+\\&+\frac{\big(N(t)M(-t)-M(t)N(-t)-\alpha(t)\delta(t)-\beta(t)\gamma(t)\big)x}{R(t,x,y)}+\\&+\frac{\big(M(t)M(-t)-N(t)N(-t)+\beta(t)\delta(t)-\alpha(t)\gamma(t)\big)y}{R(t,x,y)}-\\&-\frac{\beta(t)M(-t)+\alpha(t)N(-t)}{R(t,x,y)},\end{aligned} \tag{10}$$

где

$$R(t,x,y)=\left(\gamma^2(t)+\delta^2(t)\right)\left(x^2+y^2\right)+2\left(M(-t)\gamma(t)+N(-t)\delta(t)\right)\left(x+y\right)+M^2(-t)+N^2(-t).$$

Доказательство. Согласно предыдущей лемме, дифференциальная система (1) может быть записана в виде уравнения Риккати (2). Отражающая функция дифференциального уравнения (2) определяется выражением (6). Учитывая представление (9), мы можем записать ее следующим образом:

$$F(t,x,y)=\frac{\left(M(t)+iN(t)\right)\left(x+iy\right)+\left(\alpha(t)+i\beta(t)\right)}{\left(\gamma(t)+i\delta(t)\right)\left(x+iy\right)+\left(M(t)+iN(t)\right)}.$$

Выделяя в этом выражении действительную и мнимую части $U(t,x,y)$ и $V(t,x,y)$, придем к утверждению теоремы.

Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть коэффициенты правой части системы (1) непрерывны, 2ω-периодичны по t и удовлетворяют соотношениям (5). Тогда продолжимое на* [-ω;ω] *решение* $\left(x(t),y(t)\right)^T$ *этой системы является 2ω-периодическим тогда и только тогда, когда* $x=x(\omega)$ *и* $y=y(\omega)$ *удовлетворяют следующей системе алгебраических уравнений:*

$$\begin{cases}\left(M(-\omega)\gamma(-\omega)+N(-\omega)\delta(-\omega)\right)\left(x^2+y^2\right)+\\+\left(\alpha(-\omega)\gamma(-\omega)-\beta(-\omega)\delta(-\omega)+M(-\omega)M(\omega)+N(-\omega)N(\omega)\right)x+\\+\left(M(-\omega)N(\omega)-N(-\omega)M(\omega)-\alpha(-\omega)\delta(-\omega)-\beta(-\omega)\gamma(-\omega)\right)y-\\-\alpha(-\omega)M(\omega)+\beta(-\omega)N(\omega)=R(-\omega,x,y)x,\\\left(N(-\omega)\gamma(-\omega)-M(-\omega)\delta(-\omega)\right)\left(x^2+y^2\right)+\\+\left(N(-\omega)M(\omega)-M(-\omega)N(\omega)-\alpha(-\omega)\delta(-\omega)-\beta(-\omega)\gamma(-\omega)\right)x+\\+\left(M(-\omega)M(\omega)-N(-\omega)N(\omega)+\beta(-\omega)\delta(-\omega)-\alpha(-\omega)\gamma(-\omega)\right)y-\\-\beta(-\omega)M(\omega)+\alpha(-\omega)N(\omega)=R(-\omega,x,y)y.\end{cases}\tag{11}$$

Доказательство следует из основной леммы для отражающей функции [1, с.12].

Следствие. *Пусть коэффициенты правой части системы (1) непрерывны, 2ω-периодичны по t и удовлетворяют соотношениям (5). Тогда для этой системы возможны четыре случая:*

1) *система (1) имеет ровно одно периодическое решение;*
2) *система (1) имеет ровно два периодических решения;*
3) *все продолжимые на* [-ω;ω] *решения системы (1) периодичны;*
4) *система (1) не имеет периодических решений.*

Знание отражающей функции дифференциальной системы (1) позволяет построить целый класс систем с той же самой отражающей функцией [1, с. 21–27] и сформулировать для них утверждение, совпадающее со следствием.

Abstract. The form of reflecting functions for some quadratic non-autonomous differential systems is presented in the paper. For such systems an algebraic system for initial points of periodic solution is given.

Литература

1. В. И. Мироненко, Отражающая функция и периодические решения дифференциальных уравнений, Минск, Университетское, 1986.

Гомельский государственный
Поступило 15.05.06

университет имени Ф. Скорины