Известия Гомельского государственного университета
имени Ф.Скорины, 6(27), 2004

УДК 512.542

О группах, у которых каждая p-сверхразрешимая подгруппа является p-нильпотентной

Е.А.Задорожнюк

Все рассматриваемые нами в данной работе группы конечны. Все используемые обозначения и определения соответствуют принятым в [1, 2, 3]. Напомним лишь, что подгруппа H группы G называется n-минимальной, если в G существует такая цепь, что

$$1 = H_0 < \cdot \ldots < \cdot H_{n-1} < \cdot H_n = H,$$

и в любой максимальной цепи такого вида число членов не превосходит $n+1$.

Строение группы тесно связано со свойствами её минимальных подгрупп. Напомним, например, что если группа G имеет нечётный порядок и все её минимальные подгруппы входят в центр группы G, то группа нильпотентна [4]. Если же у группы нечётного порядка все минимальные подгруппы нормальны, то такая группа сверхразрешима [5]. Эти результаты получили развитие в работах многих авторов (см., например, [6], [7], [8]). Среди недавних работ по теории минимальных подгрупп отметим содержательную работу [9].

В работе [10] изучались группы, у которых каждая минимальная подгруппа содержится в гиперцентре своего нормализатора. Оказывается, что класс групп с таким свойством является тотально локальной формацией. Более того, он является формацией Шеметкова. Напомним, что непустая формация $\mathfrak{F}$ называется формацией Шеметкова, если всякая минимальная не $\mathfrak{F}$-группа является либо циклической группой простого порядка, либо группой Шмидта [11].

В настоящей работе мы дадим новые характеризации групп, у которых каждая минимальная подгруппа содержится в гиперцентре своего нормализатора.

Определение. Пусть $\varnothing \neq \pi \subseteq \mathbb{P}$ и $p \in \pi$. Группу G назовём nM_π-группой (в частности, nM_p-группой при $\pi = \{p\}$), если для любой её n-минимальной (а при $n > 1$ и неэлементарной) πd-подгруппы H выполняется включение

$$H \subseteq Z_\infty(N_G(H)).$$

В частности, $1M\pi$-группу будем называть M_π-группой.

1. Лемма. *Пусть A_1, A_2 — такие нормальные в G подгруппы, что для любого G-главного pd-фактора H/K, где $K < H < A_i (i = 1, 2)$, выполняется следующее условие:*

$$C_G(H/K) = G \qquad (1)$$

Тогда условие (1) выполняется и для любого G-главного pd-фактора подгруппы A_1A_2.

Доказательство. Рассмотрим нормальный ряд группы G

$$1 \subseteq A_1 \subseteq A_1A_2.$$

Уплотним его до G-главного ряда:

$$1 = G_0 \subset G_1 \subset ... \subset G_t = A_1 \subset G_{t+1} \subset ... \subset G_{t+r} = A_1A_2.$$

Так как по условию леммы все G-главные pd-факторы группы A_1 удовлетворяют условию (1), то нам достаточно показать, что все G-главные pd-факторы между A_1 и A_1A_2 удовлетворяют условию (1). Пусть H/K — произвольный G-главный pd-фактор, где $A_1 \subseteq H \subseteq A_1A_2$. Согласно [3, лемма 2.7] фактор H/K является G-изоморфным фактору $H \cap A_2/K \cap A_2$. Значит, фактор $H \cap A_2/K \cap A_2$ является G-главным pd-фактором. Кроме того, $H \cap A_2 \subseteq A_2$. Но тогда по условию леммы имеем

$$C_G(H \cap A_2/K \cap A_2) = G = C_G(H/K).$$

Лемма доказана.

2. Лемма. *Всякая подгруппа nM_π-группы G является nM_π-группой.*

Доказательство. Пусть T — произвольная собственная подгруппа nM_π-группы G. Покажем, что группа T является nM_π-группой. Пусть H — произвольная n-минимальная (а при $n > 1$ и неэлементарная) πd-подгруппа группы T. Покажем, что

$$H \subseteq Z_\infty(N_T(H)).$$

Пусть $N = N_G(H)$. Так как группа G является nM_π-группой, то

$$H \subseteq Z_\infty(N).$$

Поэтому нам достаточно лишь проверить, что

$$Z_\infty(N) \subseteq Z_\infty(N_T(H)).$$

Рассмотрим произвольный N-главный ряд в $Z_\infty(N)$:

$$1 = N_0 \subseteq N_1 \subseteq \ldots \subseteq N_t = Z_\infty(N).$$

Ввиду леммы 1 имеем

$$C_N(N_i/N_{i-1}) = N$$

для любого $i = 1, \ldots, t$.

Рассмотрим ряд

$$1 = N_0 \cap T \subseteq N_1 \cap T \subseteq \ldots \subseteq N_t \cap T = Z_\infty(N) \cap T. \tag{2}$$

Пусть $T_i = N_i \cap T$, где $i = 1, \ldots, t$. Заметим, что $T_{i-1} \trianglelefteq T_i$ для всех $i = 1, \ldots, t$. Так как

$$T_i/T_{i-1} = N_i \cap T/N_{i-1} \cap T \cap N_i \simeq N_{i-1}(N_i \cap T)/N_{i-1} = N_{i-1}T_i/N_{i-1} \subseteq N_i/N_{i-1},$$

то

$$C_T(T_i/T_{i-1}) \supseteq C_T(N_i/N_{i-1}) = C_N(N_i/N_{i-1}) \cap T = N \cap T.$$

Но тогда

$$N \cap T \subseteq C_T(T_i/T_{i-1}) \cap N = C_{T\cap N}(T_i/T_{i-1}) \subseteq T \cap N.$$

Значит,

$$C_{T\cap N}(T_i/T_{i-1}) = T \cap N.$$

Заметим, что

$$(Z_\infty(N) \cap T) \trianglelefteq (N \cap T) = N_T(H).$$

Отбросив в (2) повторяющиеся члены и уплотнив его до главного ряда группы $T \cap N$, видим, что $Z_\infty(N) \subseteq Z_\infty(N_T(H))$. Лемма доказана.

3. Лемма. *Каждая p-сверхразрешимая подгруппа группы G является p-нильпотентной тогда и только тогда, когда каждая минимальная p-подгруппа H группы G удовлетворяет условию*

$$H \subseteq Z_{\mathfrak{F}}(N_G(H)),$$

где $\mathfrak{F}$ — формация всех p-нильпотентных групп.

Доказательство. Необходимость. Предположим, что каждая p-сверхразрешимая подгруппа группы G является p-нильпотентной. Докажем, что для произвольной минимальной p-подгруппы H группы G имеет место включение

$$H \subseteq Z_{\mathfrak{F}}(N_G(H)),$$

где $\mathfrak{F}$ — формация всех p-нильпотентных групп. Пусть $H =< x >$, $N = N_G(H)$, N_p — силовская p-подгруппа в N. Тогда из $H \trianglelefteq N_p$ следует, что $H \cap Z(N_p) \neq 1$. Так как группа H простого порядка, то $H \subseteq Z(N_p)$, и поэтому $N_p \subseteq C_G(H)$.

Пусть теперь y — такой элемент из N, что его порядок не делится на p. Тогда в группе $T =< x >< y >$ подгруппа $< x >$ — силовская p-подгруппа, $< y >$ — холловская p'-подгруппа. Очевидно, группа T является сверхразрешимой. Значит, она p-сверхразрешима. Тогда группа T по предположению является p-нильпотентной, что влечёт включение

$$y \subseteq C_G(< x >).$$

Любой элемент $z \in N$ представим в виде $z = z_1 z_2$, где z_1 — p-элемент, z_2 — p'-элемент в N. Тогда согласно доказанному $z_1, z_2 \in C_G(H)$, откуда следует, что $z = z_1 z_2 \in C_G(H)$, т.е. $N \subseteq C_G(H)$. Получаем, что $H \subseteq Z(N)$, а значит, $H \subseteq Z_\infty(N)$.

Достаточность. Пусть каждая минимальная p-подгруппа H группы G удовлетворяет условию

$$H \subseteq Z_\infty(N_G(H)),$$

где $\mathfrak{F}$ — формация всех p-нильпотентных групп. Докажем, что каждая p-сверхразрешимая подгруппа группы G является p-нильпотентной. Предположим, что это утверждение не верно. Выберем в группе G p-сверхразрешимую подгруппу H наименьшего порядка, не являющуюся p-нильпотентной. Тогда каждая собственная подгруппа группы H p-нильпотентна. Согласно [12; IV,(5.4)] группа H является группой Шмидта. Ввиду [12; III,(5.2)] имеем

$$H = PQ, \ C_P(Q) = P' = \Phi(P),$$

где P — нормальная силовская p-подгруппа группы H, Q — её абнормальная циклическая силовская q-подгруппа, p и q — различные простые числа.

Так как группа H является p-сверхразрешимой, а $P/\Phi(P)$ — главный p-фактор в H, то $P/\Phi(P)$ — циклическая группа. Тогда ввиду [13; 5,(1.2)] группа P также циклическая, а значит, она является абелевой. Поэтому $P' = \Phi(P) = 1$. Но так как $P/\Phi(P) = P/1$ — главный p-фактор, то $|P| = p$. Ввиду того, что $N_H(P) = H$, получаем, что $P \subseteq Z_{\mathfrak{F}}(H)$, т.е. $H/C_H(P) \in f(p) = (1)$, где f — локальный спутник формации всех p-нильпотентных групп. Тогда $C_H(P) = H$, т.е. $P \subseteq Z(H)$. Значит, H — нильпотентная группа. Противоречие. Лемма доказана.

4. Лемма. *Каждая p-сверхразрешимая подгруппа группы G является p-нильпотентной тогда и только тогда, когда группа G является M_p-группой.*

Доказательство. Необходимость доказывается так же, как и в лемме 3.

Достаточность вытекает из леммы 3.

5. Лемма. *Каждая p-сверхразрешимая подгруппа группы G является p-нильпотентной тогда и только тогда, когда каждая минимальная p-подгруппа H группы G удовлетворяет условию*

$$H \subseteq Z(N_G(H)).$$

Доказательство. Необходимость доказывается так же, как и в лемме 3.

Достаточность следует из леммы 4.

6. Лемма. *Каждая p-сверхразрешимая подгруппа группы G является p-нильпотентной тогда и только тогда, когда для любой 2-минимальной неэлементарной pd-подгруппы H группы G выполняется включение*

$$H \subseteq Z_{\mathfrak{F}}(N_G(H)),$$

где $\mathfrak{F}$ — формация всех p-нильпотентных групп.

Доказательство. Необходимость. Пусть каждая p-сверхразрешимая подгруппа группы G является p-нильпотентной. Пусть H — любая 2-минимальная неэлементарная pd-подгруппа группы G, y — любой элемент из $N_G(H)$. Рассмотрим группу $H < y >$. Понятно, что $H \trianglelefteq H < y >$. Ввиду изоморфизма

$$H < y > /H \simeq < y > /H \cap < y >$$

следует, что группа $H < y > /H$ является циклической, а значит, — сверхразрешимой. Если $|H| = p^2$, то ввиду цикличности H и [1; A,(7.12)] следует, что группа $H < y >$ сверхразрешима. Если $|H| = pq$, где q — отличное от p простое число, то в группе $H < y >$ имеется нормальный ряд, проходящий через H, с главными факторами простых порядков. Тогда группа H будет также сверхразрешимой, а значит, — p-сверхразрешимой. По условию леммы группа $H < y >$ должна быть p-нильпотентной. Тогда для любого главного pd-фактора L/Z группы $H < y >$, лежащего ниже H, имеет место равенство

$$C_{H<y>}(L/Z) = H < y >,$$

поэтому

$$y \in C_{H<y>}(L/Z).$$

Тогда

$$N_G(H) \subseteq C_{H<y>}(L/Z) \subseteq C_{N_G(H)}(L/Z).$$

Отсюда получаем, что

$$C_{N_G(H)}(L/Z) = N_G(H).$$

Значит,

$$H \subseteq Z_{\mathfrak{F}}(N_G(H)),$$

где $\mathfrak{F}$ — формация всех p-нильпотентных групп.

Достаточность. Допустим, что для любой 2-минимальной неэлементарной pd-подгруппы H группы G выполняется включение

$$H \subseteq Z_{\mathfrak{F}}(N_G(H)),$$

где $\mathfrak{F}$ — формация всех p-нильпотентных групп. Докажем, что каждая p-сверхразрешимая подгруппа группы G является p-нильпотентной. Предположим, что это утверждение не верно. Выберем в группе G p-сверхразрешимую подгруппу T наименьшего порядка, не являющуюся p-нильпотентной. Тогда каждая собственная подгруппа группы T p-нильпотентна. Согласно [12; IV,(5.4)] группа T является группой Шмидта. Ввиду [12; III,(5.2)] имеем

$$T = PQ,\ C_P(Q) = P' = \Phi(P),$$

где P — нормальная силовская p-подгруппа группы T, Q — её абнормальная циклическая силовская q-подгруппа, p и q — различные простые числа.

Так как группа T является p-сверхразрешимой, а $P/\Phi(P)$ — главный p-фактор в T, то $P/\Phi(P)$ — циклическая группа. Тогда ввиду [13; 5,(1.2)] группа P также циклическая, а значит, она является абелевой. Поэтому $P' = \Phi(P) = 1$. Но так как $P/\Phi(P) = P/1$ — главный p-фактор, то $|P| = p$. Пусть Z_q — группа простого порядка q группы Q. Понятно, что в группе PZ_q все максимальные ряды имеют длину, равную 2, т.е. подгруппа $H = PZ_q$ является 2-минимальной в группе T. Тогда ввиду предположения

$$H \subseteq Z_{\mathfrak{F}}(N_G(H)).$$

Так как $H \trianglelefteq N_G(H)$, то у группы H все главные pd-факторы центральны в $N_G(H)$. Следовательно,

$$C_{N_G(H)}(P) = N_G(H).$$

Это влечет, что

$$C_H(P) = P,$$

т.е. H — нильпотентная группа. Противоречие. Лемма доказана.

7. Теорема. *Для группы G следующие условия эквивалентны:*

1) каждая p-сверхразрешимая подгруппа группы G является p-нильпотентной;

2) каждая минимальная p-подгруппа H группы G удовлетворяет условию

$$H \subseteq Z_{\mathfrak{F}}(N_G(H)),$$

где $\mathfrak{F}$ — формация всех p-нильпотентных групп;

3) группа G является M_p-группой;

4) каждая минимальная p-подгруппа H группы G удовлетворяет условию

$$H \subseteq Z(N_G(H));$$

5) для любой 2-минимальной неэлементарной pd-подгруппы H группы G выполняется включение

$$H \subseteq Z_{\mathfrak{F}}(N_G(H)),$$

где $\mathfrak{F}$ — формация всех p-нильпотентных групп.

Доказательство. Эквивалентность утверждений 1) и 2) следует из леммы 3.1.5.

Эквивалентность утверждений 1) и 3) следует из леммы 3.

Эквивалентность утверждений 1) и 4) следует из леммы 4.

Эквивалентность утверждений 1) и 5) следует из леммы 5.

Теорема доказана.

Ввиду теоремы 7 $2M_p$-группа является M_p-группой.

Abstract. This article is devoted to the investigation of the groups in which every minimal subgroup lies in the hypercenter of its normalizator. New characterisations of such groups are considered.

Литература

1. K.Doerk., T.Hawkes, *Finite Soluble Groups*, Berlin–New York, Walter de Gruyter, 1992, p. 889.
2. Л.А. Шеметков, *Формации конечных групп*, Москва, Наука, 1978.
3. Л.А. Шеметков, А.Н. Скиба, *Формации алгебраических систем*, Москва, Наука, 1989.
4. N. Ito, *Note on (LM)-groups of finite order*, Kodai Math. Seminar Report, 1951, 1–6.
5. J. Buckley, *Finite groups whose minimal subgroups are normal*, Math. Z. **116** (1970), 15–17.
6. M. Asaad, *On the supersolvability of finite groups I*, Acta. Math. Acad. Soi. Hungar, **38** (1981), 57–59.
7. J. Derr, W. Deskins, N. Mukherjee, *The influence of minimal p-subgroups on the structureof finite groups*, Arch. Math., **45** (1985), 1–4.
8. A. Yokoyama, *Finite solvable groups whose $\mathfrak{L}$-hypercenter contains all minimal subgroups*, Arch. Math. **26** (1975), 123–130; **27** (1976), 572–575.
9. Х.А. Аль-Шаро, Л.А. Шеметков, *О подгруппах простого порядка в конечной группе*, Укр. мат. журнал, **54**, № 6 (2002), 745–752.
10. Е.А. Задорожнюк, *Новый пример формации Шеметкова*, Весцi НАН Беларусi, Сер. фiз.-мат. навук, № 1 (2004), 50–54.
11. A. Ballester-Bolinches, M.D. Perez-Ramos, *Two questions of L.A. Shemetkov on critical groups*, J. Algebra, **179** (1996), 905–917.
12. B. Huppert, *Endliche Gruppen I*, Berlin, Springer–Verlag, 1967.
13. D. Gorenstein, *Finite Groups*, New York, Harper and Row, 1980.

Белорусский государственный
университет транспорта

Поступило 13.10.04