Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, №6(39), **1**, 2006

УДК

Уравнение движения составной системы во внешнем электромагнитном поле

Н. В. Максименко, О. М. Дерюжкова, Е. В. Вакулина

Электромагнитные характеристики адронов с учетом их кварковой структуры можно определить на основе уравнения движения составной системы во внешнем электромагнитном поле. Так в нерелятивистской квантовой механике в моделях с кулоновским и осцилляторным потенциалами вычислены электрические поляризуемости, используя уравнение движения в однородном электрическом поле [1, 2].

В работах [3, 4] получены уравнения движения бесспиновых частиц в постоянном электрическом поле в квазипотенциальном подходе в “импульсном приближении”, где не учитывалось неразделяемое аддитивно внешнее электромагнитное и внутреннее взаимодействия. В результате в этих работах были получены поправки к среднеквадратичному зарядовому радиусу и поляризуемости адронов, благодаря вкладу релятивистского взаимодействия кварков с электромагнитным полем.

В данной работе в квазипотенциальном подходе [5] получено уравнение движения двухкварковой системы в однородном электрическом поле с учетом спина кварков.

Рассмотрим уравнение Бете-Солпитера для двух спинорных частиц, движущихся во внешнем электромагнитном поле.

$$(i\hat{\partial}^{(1)} - e_1\hat{A}(x_1) - m)(i\hat{\partial}^{(2)} - e_2\hat{A}(x_2) - m)\chi(x_1,x_2) = \hat{I}(x_1,x_2)\chi(x_1,x_2), \tag{1}$$

где $\chi(x_1,x_2)$ – волновая функция Бете-Солпитера, $\hat{I}(x_1,x_2)$ – ядро взаимодействия между частицами, $A_\mu(x)$ – потенциал внешнего электромагнитного поля.

Представим уравнение (1) следующим образом

$$\begin{aligned}&(i\hat{\partial}^{(1)} - m)(i\hat{\partial}^{(2)} - m)\chi(x_1,x_2) =\\ &= (e_1\hat{A}(x_1)(i\hat{\partial}^{(2)} - m) + (i\hat{\partial}^{(1)} - m)e_2\hat{A}(x_2) + e_1e_2\hat{A}(x_1)\hat{A}(x_2))\chi(x_1,x_2) + \hat{I}(x_1,x_2)\chi(x_1,x_2).\end{aligned} \tag{2}$$

В уравнении (2) ограничимся “импульсным приближением”, т.е. будем считать вклады взаимодействия с внешним электромагнитным полем и внутренним взаимодействием между частицами составной системы аддитивными.

Определим функцию Грина взаимодействия составной системы с внешним электромагнитным полем в следующем виде

$$\begin{aligned}G(A|1'2',12) = G^{(0)}(1',1)\otimes G^{(0)}(2',2) - e_1G^{(0)}(2',1'')\hat{A}(1'')G^{(0)}(1'',1)\otimes G^{(0)}(2',2) -\\ -e_2G^{(0)}(2',2'')\hat{A}(2'')G^{(0)}(2'',2)\otimes G^{(0)}(1',1).\end{aligned} \tag{3}$$

В этом выражении, например, $G^{(0)}(1',1) = G^{(0)}(x_1,x_2)$ является функцией свободного распространения частицы от точки x_1 до точки x_2 четырехмерного пространства-времени.

При определении функции Грина двухчастичной системы, мы ограничимся первым порядком по взаимодействию с внешним электромагнитным полем в “импульсном приближении” в выражении (3). Тогда уравнение (3) можно представить в следующем виде

$$G(A|p_1'p_2', p_1p_2) = S(p_1)\otimes S(p_2) - e_1 S(p_1')\hat{A}(\vec{p}_1 - \vec{p}_1')S(p_1)\otimes S(p_2) - \\ - e_2 S(p_2')\hat{A}(\vec{p}_2 - \vec{p}_2')S(p_2)\otimes S(p_1). \quad (4)$$

В этом выражении $S(p_n) = \dfrac{m + \hat{p}_n}{p_n^2 - m^2 + i\varepsilon}$, где n=1,2.

Теперь можно получить уравнение движения двухчастичной системы во внешнем электромагнитном поле в квазипотенциальном подходе. Для составной системы из бесспиновых заряженных частиц уравнение подобного типа было приведено в работе [3]. Согласно квазипотенциальному подходу [5-7] уравнение движения двухчастичной системы имеет вид

$$\left[\tilde{G}_0^{-1} - \tilde{V}\right]_{\sigma_1\sigma_2}^{\sigma_1'\sigma_2'} * \Psi^{\sigma_1\sigma_2} = 0. \quad (5)$$

В этом выражении $\tilde{G}_0$ – двухвременная функция Грина системы, тильда означает переход от четырехвременной величины к двухвременной, операторное умножение $*$ – интегрирование по трехмерным импульсам частиц составной системы, σ_i – поляризационные индексы, $\tilde{V}$ – квазипотенциал, который определяется через функции Грина следующим образом

$$\tilde{V} = \tilde{G}_0^{-1} * \tilde{G} * \tilde{G}_0^{-1}. \quad (6)$$

При этом заметим, что в уравнении (6) выполнено проектирование на положительно-частотные состояния. В уравнении (6) функцию Грина представим в виде суммы

$$\tilde{G} = \tilde{K} + \tilde{G}_1(A),$$

где $\tilde{K}$ – функция Грина, ответственная за внутреннее взаимодействие, а $\tilde{G}_1$ – взаимодействие с внешним электромагнитным полем. Следовательно, квазипотенциал $\tilde{V}$ представляется в виде суммы двух потенциалов

$$\tilde{V} = \tilde{V}_1 + \tilde{V}(A),$$

где $\tilde{V}_1$ – квазипотенциал, с помощью которого определяется внутреннее взаимодействие между кварками, а $\tilde{V}(A)$ – взаимодействие кварков с внешним электромагнитным полем.

В этом случае уравнение (5) принимает вид

$$\left[\tilde{G}_0^{-1} - \tilde{V}(A) - \tilde{V}_1\right]_{\sigma_1\sigma_2}^{\sigma_1'\sigma_2'} * \Psi^{\sigma_1\sigma_2} = 0, \quad (7)$$

где $\tilde{V}(A) = \tilde{G}_0^{-1} * \tilde{G}_1(A) * \tilde{G}_0^{-1}$.

Чтобы определить уравнение движения двухчастичной системы во внешнем электромагнитном поле, вычислим $\tilde{G}_1(A)$, используя выражение (4).

Определим полный и относительный импульсы двухфермионной системы $P = p_1 + p_2$, $p = \dfrac{p_1 - p_2}{2}$ и проинтегрируем по нулевой компоненте относительного импульса. При этом воспользуемся представлением пропагатора в следующем виде

$$S(p_n) = \frac{m}{E_n}\left(\frac{\Lambda^{(+)}(\vec{p}_n)}{p_{10} - E + i\delta} - \frac{\Lambda^{(-)}(-\vec{p}_n)}{p_{10} + E_1 - i\delta}\right),$$

где $\Lambda^{(+)}(\vec{p}_n) = \dfrac{m + E_n\gamma^0 - \vec{p}_n\vec{\gamma}}{2m}$, $\quad \Lambda^{(-)}(-\vec{p}_n) = \dfrac{m - E_n\gamma^0 - \vec{p}_n\vec{\gamma}}{2m}$.

В результате получим функцию Грина двухчастичной системы в нулевом порядке по внешнему электромагнитному полю

$$\tilde{G}^0(\vec{p}_1'\vec{p}_1, \vec{p}_2'\vec{p}_2) = \frac{m^2}{E_1E_2}\left(\frac{\Lambda_+(\vec{p}_1)\otimes\Lambda_+(\vec{p}_2)}{P_0 - E_1 - E_2} - \frac{\Lambda_-(-\vec{p}_1)\otimes\Lambda_-(-\vec{p}_2)}{P_0 + E_1 + E_2}\right)\times$$
$$\times\delta(\vec{p}_1 - \vec{p}_1')\delta(\vec{p}_2 - \vec{p}_2').$$

Для определения функции Грина двухчастичной системы в первом порядке по внешнему полю вычислим интеграл

$$\int\frac{dp_0}{2\pi i}S(\vec{p}_1', p_1^0)\hat{A}(\vec{p}_1 - \vec{p}_1')S(\vec{p}_1, p_1^0)\otimes S(p_2),$$

а затем спроектируем на положительно-частотное полупространство с помощью биспиноров [6, 7].

В результате для первой частицы получим

$$G^{(+)\lambda_2'\lambda_2}_{1\lambda_1'\lambda_1} = \delta(\vec{p}_2 - \vec{p}_2')\frac{m^3e_1}{E_1E_1'E_2}\frac{\bar{U}^{\lambda_1'}(\vec{p}_1')\hat{A}U^{\lambda_1}(\vec{p}_1)\otimes\delta_{\lambda_2'\lambda_2}}{(P_0 - E_1' - E_2)(P_0 - E_1 - E_2)}. \qquad (8)$$

Функция Грина в приближении первого порядка по внешнему полю, взаимодействующему со второй частицей, будет иметь вид

$$G^{(+)\lambda_2'\lambda_2}_{1\lambda_1'\lambda_1} = \delta(\vec{p}_1 - \vec{p}_1')\frac{m^3e_2}{E_1E_2'E_2}\frac{\delta_{\lambda_1'\lambda_1}\otimes\bar{U}^{\lambda_2'}(\vec{p}_2')\hat{A}U^{\lambda_2}(\vec{p}_2)}{(P_0 - E_1 - E_2')(P_0 - E_1 - E_2)}. \qquad (9)$$

В нулевом приближении по внешнему полю спроектированная функция Грина принимает форму

$$G^{(+)\lambda_2'\lambda_2}_{0\lambda_1'\lambda_1} = \delta(\vec{p}_1 - \vec{p}_1')\delta(\vec{p}_2 - \vec{p}_2')\frac{m^2}{E_1E_2}\frac{\delta_{\lambda_2'\lambda_2}\delta_{\lambda_1'\lambda_1}}{(P_0 - E_1 - E_2)}. \qquad (10)$$

Обратная функция Грина, как следует из (10), будет равна

$$G^{(+)(-1)\lambda_2'\lambda_2}_{0\lambda_1'\lambda_1} = \delta(\vec{p}_1 - \vec{p}_1')\delta(\vec{p}_2 - \vec{p}_2')\frac{E_1E_2}{m^2}(P_0 - E_1 - E_2)\delta_{\lambda_2'\lambda_2}\delta_{\lambda_1'\lambda_1}. \qquad (11)$$

Потенциал взаимодействия системы с внешним электромагнитным полем $\tilde{V}(A)$ с учетом уравнений (8-11) принимает вид

$$\tilde{V}(A) = -\frac{E_2}{m}e_1\bar{U}^{\lambda_1'}(\vec{p}_1)\hat{A}U^{\lambda_1}(\vec{p}_1)\delta_{\lambda_2'\lambda_2}\delta(\vec{p}_2' - \vec{p}_2) - \frac{E_1}{m}e_2\bar{U}^{\lambda_2'}(\vec{p}_2')\hat{A}U^{\lambda_2}(\vec{p}_2)\delta_{\lambda_1'\lambda_1}\delta(\vec{p}_1' - \vec{p}_1). \qquad (12)$$

Подставляя теперь (11) и (12) в уравнение (7) и вводя функцию

$$\Psi^{\lambda_1\lambda_2} = \sqrt{\frac{m^2}{E_1E_2}}\tilde{\Psi}^{\lambda_1\lambda_2},$$

получим уравнение движения системы из двух спинорных частиц во внешнем электромагнитном поле (в первом приближении по полю)

$$\{ (P_0 - E_1 - E_2)\delta_{\lambda_1\lambda_1'}\delta_{\lambda_2\lambda_2'} + \frac{e_1 m}{E_1}\delta_{\lambda_2'\lambda_2}\int d\vec{p}_1\overline{U}^{\lambda_1'}(\vec{p}_1')\hat{A}(\vec{p}_1' - \vec{p}_1)U^{\lambda_1}(\vec{p}_1) +$$

$$+ \frac{e_2 m}{E_2}\delta_{\lambda_1'\lambda_1}\int d\vec{p}_2\overline{U}^{\lambda_2'}(\vec{p}_2')\hat{A}(\vec{p}_2' - \vec{p}_2)U^{\lambda_2}(\vec{p}_2)\ \}\tilde{\Psi}^{\lambda_1\lambda_2} = \iint d\vec{p}_1 d\vec{p}_2 V^{\lambda_1'\lambda_2'}_{\lambda_1\lambda_2}\tilde{\Psi}^{\lambda_1\lambda_2},$$

где $V^{\lambda_1'\lambda_2'}_{\lambda_1\lambda_2} = \sqrt{\frac{m^2}{E_1E_2}}\tilde{V}^{\lambda_1'\lambda_2'}_{\lambda_1\lambda_2}\sqrt{\frac{m^2}{E_1'E_2'}}$.

Abstract. In the framework of the constituent quark model based on the relativistic quasipotential approach in the quantum field theory the inverse two-temporary. Green function is defined. The equation of motion two-quark composite system in external electromagnetic field in the first order on the value of field strength is obtained.

Литература

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика (нерелятивистская теория). М: Физматгиз. – 1989. – 702 с.
2. Петрунькин В.А. Электрическая и магнитная поляризуемости адронов // ЭИАЯ. – 1981. – Т.12. – Вып. 3. – С. 692-753.
3. Максименко Н.В., Шульга С.Г. Эффект релятивистского “дрожания” кварков в электрической поляризуемости мезонов // Ядерная физика. – 1996. – Т.56. – Вып. 6. – С. 201-210.
4. Дерюжкова О.М., Максименко Н.В. Low-energy electromagnetic characteristics of the π-meson in the covariant three-dimensional approach // hep-th //0307147. – 2003.
5. Logunov A.A, Tavkhelidze A.N. Quasi-optical approach in quantum field theory // Nuavo Cimento. – 1963. – V.29. – N 2. – P. 380-399.
6. Фаустов Р.Н. Квазипотенциальный метод в задаче о связанных состояниях // ТМФ. – 1970. – Т.3. – N 2. – С. 240-254.
7. Капшай В.Н., Тюменков Г.Ю. Лекции по теории связанных систем частиц со спином 0 и ½ // Гомель. – 2005. – 99 с.

Гомельский государственный
университет имени Ф. Скорины
e-mail: maksimenko@gsu.unibel.by

Поступило __.__.__