Известия Гомельского государственного университета
имени Ф.Скорины. №4(37), 2006

УДК 531.36:62–50

Стабилизация линейных динамических систем с помощью позиционных решений линейно-квадратичных задач с ограничениями

А. В. Лубочкин

Введение

Рассматривается задача стабилизации динамических систем с помощью ограниченных управлений. Классическая задача стабилизации динамических систем [1] состоит, как известно, в построении обратных связей, после замыкания которыми динамическая система становится асимптотически устойчивой. Проблема стабилизации непосредственно сводится к проблеме устойчивости [2], если считать обратную связь заданной. На этом основаны классические методы стабилизации линейных стационарных систем с помощью линейных обратных связей по состоянию [1].

С созданием теории оптимального управления [3] появились возможности не задавать заранее обратные связи, а искать их с помощью специальных задач оптимального управления, которые, кроме устойчивости, обеспечивают движению замкнутой системы дополнительные полезные свойства. Долгое время из-за отсутствия регулярных методов синтеза оптимальных систем с ограничениями в приложениях теории оптимального управления к проблеме стабилизации не учитывались ограничения, характерные для современных постановок этой проблемы.

В данной работе используется подход [4,5], реализующий новый принцип управления — управление в режиме реального времени. Этот подход позволяет не задавать заранее обратные связи, а искать их с помощью специальных задач оптимального управления с ограничениями (а поэтому автоматически учитывать ограничения на управления), вычислять значения стабилизирующих обратных связей по мере реализации процесса управления в режиме реального времени.

В [5] в качестве ограниченной стабилизирующей обратной связи предложено использовать позиционное решение линейных задач оптимального управления с ограничениями [4]. В [6] с этой целью используется линейно-квадратичная, в [7,8] — линейно-негладкая задачи с ограничениями. В [5–7] вспомогательные задачи оптимального управления рассматривались в предельных для них классах управлений — в классе кусочно-постоянных управлений для линейных [5] и линейно-негладких [7] задач, непрерывных кусочно-гладких управлений — для линейно-квадратичных [6]. И тогда решение задачи стабилизации сводилось к решению (корректировке решения) методом Ньютона системы специальных (конечных) определяющих уравнений вдоль реализующихся траекторий динамических систем.

В [8] предложен другой, более надежный, способ решения вспомогательных задач оптимального управления — линейно-негладкие задачи рассматриваются в более узком классе кусочно-постоянных функций с постоянным периодом квантования. Тогда решение задачи стабилизации сводится к коррекции двойственным методом оптимальных планов близких задач кусочно-линейного программирования, возникающих вдоль реализующейся траектории динамической системы.

В данной работе, как и в [6], с целью стабилизации используется оптимальная обратная связь специальных линейно-квадратичных задач. Однако, в отличие от [6], здесь, как и в [8], вспомогательная задача оптимального управления рассматривается в классе кусочно-постоянных функций с постоянным периодом квантования. Для построения ограниченных стабилизирующих управлений в заданные дискретные моменты времени задается программа движения системы на промежутке времени до следующего дискретного момента. В каждый дискретный момент времени по исходной задаче стабилизации формируется вспомогательная задача оптимального управления. В выбранном классе управлений решение серии близких вспомогательных задач оптимального управления можно свести к корректировке двойственным методом [9] решений близких конечномерных задач — эквивалентных задач линейно-квадратичного программирования.

1 Постановка задачи

Рассмотрим объект управления, поведение которого на промежутке $t \geq 0$ описывается уравнением

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad x(0) = x_0 \neq 0 \quad \left(x \in R^n,\ u \in R;\ \operatorname{rank}(b, Ab, \ldots, A^{n-1}b) = n\right). \tag{1}$$

Будем считать, что при выключенном управлении ($u(t) \equiv 0$, $t \geq 0$) система неустойчива.

Пусть $G \subset R^n$ — некоторая окрестность неустойчивого состояния равновесия $x = 0$ системы (1); L, $0 < L < \infty$ — заданное число. Функцию $u(x)$, $x \in G$, назовем ограниченной стабилизирующей обратной связью для динамической системы (1), если: 1) $u(0) = 0$; 2) функция $u(x)$, $x \in G$, удовлетворяет геометрическому ограничению $|u(x)| \leq L$, $x \in G$; 3) замкнутая система

$$\dot{x} = Ax + bu(x), \quad x(0) = x_0, \tag{2}$$

имеет решение $x(t)$, $t \geq 0$, для всех $x_0 \in G$; 4) система (2) асимптотически устойчива в G.

Для построения искомой стабилизирующей обратной связи будем использовать позиционное решение специальной задачи оптимального управления.

2 Сопровождающая задача оптимального управления и стабилизатор

Выберем параметры метода: θ, $0 < \theta < \infty$, целое число $N > 1$, подсчитаем $h = \theta/N$. В классе кусочно-постоянных функций с периодом квантования h:

$$u(t) \equiv u_i = \text{const}, \quad t \in [ih, (i+1)h[, \quad i = \overline{0, N-1}, \tag{3}$$

рассмотрим следующую линейно-квадратичную задачу оптимального управления

$$V(z) = \min \int_0^\theta u^2(t)\, dt,\ \dot{x} = Ax + bu,\ x(0) = z,\ x(\theta) = 0,\ |u(t)| \leq L,\ t \in T = [0, \theta]. \tag{4}$$

Оптимальное программное управление $u^0(t) = u^0(t\,|\,z)$, $t \in T$, задачи (4) и соответствующая ему траектория $x^0(t) = x^0(t\,|\,z)$, $t \in T$, определяются традиционно.

Функцию

$$u^0(z) = u^0(0\,|\,z), \quad z \in G, \tag{5}$$

назовем оптимальным стартовым управлением типа обратной связи. Функцию (5), подсчитываемую вдоль реализующейся траектории $x^*(t)$, $t \geq 0$, динамической системы

($z = x^*(t)$, $t \geq 0$) и предлагается использовать в качестве стабилизирующей обратной связи, определенной выше.

Следуя [7], вводятся понятия реализации оптимального управления типа обратной связи, соответствующей начальному состоянию $x(0) = x_0^* \in G$:

$$u^*(t) = u^0(x^*(t)), \quad t \geq 0, \tag{6}$$

его дискретной реализации и h-реализации, понятие стабилизатора — любого устройства, способного для каждого фиксированного достаточно малого числа $h > 0$ в режиме реального времени вычислять значения h-реализации.

Согласно (5),(6), для коррекции обратной связи (6) необходимо построить оптимальное программное управление очередной задачи (4) при $z = x^*(\tau_k)$, считая, что оптимальное управление задачи (4) при $z = x^*(\tau_{k-1})$ уже построено. При этом задачи (4) вдоль реализующейся траектории динамической системы будем рассматривать в классе функций (3).

3 Устойчивость замкнутой системы

Покажем, что (5) — ограниченная стабилизирующая обратная связь. Для этого покажем, что функция $V(x)$, $x \in G$ — функция Ляпунова. Ясно, что она непрерывна, $V(0) = 0$, $V(x) > 0$ при $x \neq 0$. Далее, для произвольного начального состояния $x_0^* \neq 0$ имеем: $V(x^*(kh)) \leq V(x^*((k-1)h))$ ($V(x^*(kh)) < V(x^*((k-1)h))$, если на первом отрезке постоянства оптимальное управление задачи (4) при $z = x^*(kh)$ не равно нулю; в противном случае, продолжая движение вдоль реализующейся траектории $x^*(t)$, $t \geq 0$, найдем такое число l, $k < l < \infty$, что $V(x^*(lh)) < V(x^*((k-1)h))$). Таким образом, вдоль $x^*(t)$, $t \geq 0$, положительно-определенная функция $V(x)$, $x \in G$, убывает. Ясно, что $V(x^*(t)) \to 0$ при $t \to \infty$, а, следовательно, замкнутая система $\dot{x} = Ax + bu^0(x)$ асимптотически устойчива в G.

4 Конечномерные задачи и алгоритм работы стабилизатора

В классе функций (3) задача (4) вдоль реализующейся траектории динамической системы $x^*(t)$, $t \geq 0$, в моменты коррекции управления $\tau_k = kh$, $k = 1, 2, \ldots$, примет следующую эквивалентную форму

$$\sum_{i=0}^{N-1} u_i^2 \to \min, \quad \sum_{i=0}^{N-1} u_i \int_{ih}^{(i+1)h} h(t)\,dt = \bar{g}, \quad |u_i| \leq L, \quad i = \overline{0, N-1}, \tag{7}$$

где $h(t) = F(Nh - t)b$, $\bar{g} = -F(Nh)z$, $z = x^*(kh)$; $\dot{F} = AF$, $F(0) = E$.

Задачи (7) для двух соседних моментов коррекции управления τ_{k-1} и τ_k мало отличаются друг от друга (у них разные правые части ограничений-равенств), и это отличие тем меньше, чем меньше шаг квантования h. Поэтому для коррекции оптимальных планов близких линейно-квадратичных задач (7) естественно использовать двойственный метод [9]. Двойственный метод можно также использовать и для полного решения начальной задачи (7) при $z = x_0$.

Алгоритм работы стабилизатора заключается в следующем. При $t \in [0, h[$, $h > 0$, стабилизатор использует решение задачи (4) (задачи (7)) при $z = x_0$ (это решение можно построить заранее, до включения стабилизатора): $u^*(t) \equiv u^0(t \mid x_0) = u_0^0$, $t \in [0, h[$ (u_0^0 — первая компонента оптимального плана $u^0 \in R^N$ задачи (7) при $z = x_0$). Алгоритм работы стабилизатора при $t \geq h$ складывается для каждого $[kh, (k+1)h[$, $k = 1, 2, \ldots$, из следующих операций: 1) по известному текущему состоянию $x^*(kh)$ стабилизатор строит двойственным методом оптимальный план задачи (7) при $z = x^*(kh)$, используя в качестве начального приближения оптимальный план задачи (7) при $z = x^*((k-1)h)$; 2) на промежутке $[kh, (k+1)h[$ стабилизатор использует управление $u^*(t) \equiv u^0(t - kh \mid x^*(kh)) = u_0^0$, $t \in [kh, (k+1)h[$ (u_0^0 — первая компонента оптимального плана $u^0 \in R^N$ задачи (7) при $z = x^*(kh)$).

Поскольку количество операций, которые выполняются на каждом шаге работы стабилизатора, нетрудно оценить, и ряд из этих операций можно выполнять параллельно, то для каждой конкретной системы можно подобрать такие микропроцессорные устройства, с помощью которых можно реализовать стабилизатор в режиме реального времени. С другой стороны, для каждого микропроцессора можно указать порядок систем, для которых реализуем такой же режим.

Abstract. A linear dynamical systems stabilization by restricted feedback use is considered in the paper. Feedback optimal control realization of special linear-quadratic problems with restrictions is suggested for the solution of this problem. The suggested stabilizers can be realized on modern computers in real-time mode.

Литература

1. Цянь Сюэ-Сэнь, Техническая кибернетика, Москва, ИЛ, 1956.

2. А. М. Ляпунов, Общая задача об устойчивости движения, Москва–Ленинград, Гостехиздат, 1950.

3. Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе и др., Математическая теория оптимальных процессов, Москва, Наука, 1969.

4. Р. Габасов, Ф. М. Кириллова, О. И. Костюкова, Оптимизация линейной системы управления в режиме реального времени, Изв. РАН. Техн. кибернетика, № 4 (1992).

5. Р. Габасов, Ф. М. Кириллова, О. И. Костюкова, К методам стабилизации динамических систем, Изв. РАН. Техн. к ибернетика, № 3 (1994).

6. Р. Габасов, А. В. Лубочкин, Стабилизация линейных динамических систем оптимальными управлениями линейно-квадратичных задач, ПММ, **62**, Вып. 4 (1998).

7. А. В. Лубочкин, Стабилизация линейных динамических систем оптимальными управлениями линейно-негладких задач, Известия ГГУ им. Ф. Скорины, Гомель, № 4(25) (2004).

8. А. В. Лубочкин, Стабилизация линейных динамических систем с помощью позиционных решений линейно-негладких задач с ограничениями, Известия ГГУ им. Ф. Скорины, Гомель, № 5(32) (2005).

9. В. М. Ракецкий, Решение общей задачи выпуклого квадратичного программирования двойственным методом, Программное обеспечение ЭВМ / Ин-т математики АН БССР, Минск, Вып.55 (1985).

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступило 15.05.06