Известия Гомельского государственного университета
имени Ф.Скорины, 6(27), 2004

УДК 512.542

Пересечение $\mathfrak{F}$-абнормальных максимальных подгрупп, выделяемых абнормально полным m-функтором

Р.В.Бородич

Все рассматриваемые нами группы конечны. В настоящей статье мы обобщаем некоторые результаты о пересечениях максимальных подгрупп из [1] и [2]. Согласно [2], подгрупповым m-функтором θ называется функция, которая сопоставляет каждой группе G некоторое множество $\theta(G)$ её максимальных подгрупп и саму группу G; при этом предполагается, что если $M \in \theta(G)$, то $M^x \in \theta(G)$ для всех $x \in G$. Через $\Phi_\theta(G)$ обозначается пересечение всех подгрупп из $\theta(G)$.

В монографии М.В.Селькина [2] указывается, что введённые на множестве m-функторов операции пересечения и объединения позволяют конструировать новые примеры m-функторов и θ-подгрупп Фраттини.

В дальнейшем m-функтор θ будем называть абнормально полным функтором, если для любой группы G множество $\theta(G)$ содержит все абнормальные максимальные подгруппы группы G.

Лемма 1. *Пусть θ — абнормально полный функтор, $K \subseteq N \lhd G$, $K \lhd G$, $K \subseteq \Phi_\theta(G)$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) если N/K π-замкнута, то и N π-замкнута;

2) $F_p(N/K) = F_p(N)/K$.

Доказательство. Пусть N/K имеет нормальную S_π-подгруппу H/K. Так как $K \subseteq \Phi_\theta(G)$ и $\Phi_\theta(G) \subseteq \Delta(G)$, то K нильпотентна. Нетрудно заметить, что $S_{\pi'}$-подгруппа R из K является $S_{\pi'}$-подгруппой в H. По теореме Шура-Цассенхауза H содержит S_π-подгруппу S и любые две такие подгруппы сопряжены в H. По лемме 4.3 из [1] $G = N_G(S)H$; с учётом того, что $H = SR$, получаем $G = N_G(S)R$. Тогда по лемме 2 из [3] подгруппа $N_G(S)$ является абнормальной подгруппой группы G. Следовательно, $N_G(S)$ содержится в некоторой максимальной θ-подгруппе M из G. Поэтому $G = MR$. Так как $R \subseteq \Phi_\theta(G) \subseteq M$, то $G = M$. Получили противоречие. Следовательно, S нормальна в G.

Второе утверждение леммы является следствием первого при $\pi = p'$. Лемма доказана.

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная формация и θ — абнормально полный функтор. Если N — нормальная подгруппа группы G и $N/N \cap \Phi_\theta(G) \in \mathfrak{F}$, то N представима в виде прямого произведения $N = N_1 \times N_2$, множители которого удовлетворяют следующим условиям:*

1) $N_1 \in \mathfrak{F}$;

2) $\pi(N_2) \cap \pi(\mathfrak{F}) = \varnothing$;

3) $N_2 \subseteq \Phi_\theta(G)$.

Доказательство. Пусть $D = N \cap \Phi_\theta(G)$, $\omega = \pi(\mathfrak{F})$. Так как N/D является ω-группой, то по предыдущей лемме подгруппа N представима в виде $N = N_1 \times N_2$, где N_1 — S_ω-подгруппа из N. Так как $N_2 \subseteq \Phi_\theta(G)$, то $N/D \simeq N_1/D_1 \in \mathfrak{F}$, где $D_1 = N_1 \cap \Phi_\theta(G)$. Пусть $p \in \omega$. Так как $N_1/D_1 \in \mathfrak{F}$, то, используя предыдущую лемму и лемму 4.5 из [1], получаем

$$(N_1/D_1)/F_p(N_1/D_1) = N_1/D_1/F_p(N_1)/D_1 \simeq N_1/F_p(N_1) \in f(p).$$

Так как последнее справедливо для любого $p \in \pi(N_1)$, то по лемме 4.5 из [1] подгруппа N_1 входит в $\mathfrak{F}$. Теорема доказана.

Следствие 1.1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная формация, содержащая все нильпотентные группы, θ — абнормально полный функтор. Если N — нормальная подгруппа группы G и $N/N \cap \Phi_\theta(G) \in \mathfrak{F}$, то $N \in \mathfrak{F}$.*

Л.А.Шеметков рассматривал случай, когда θ выделяет в любой группе все максимальные подгруппы, в этом случае подгруппа $\Phi_\theta(G)$ совпадает с подгруппой Фраттини и из теоремы следует известный результат из работы [1].

В случае, когда $\theta(G)\backslash\{G\}$ совпадает с множеством всех ненормальных максимальных подгрупп, подгруппа $\Phi_\theta(G)$ совпадает с подгруппой Гашюца $\Delta(G)$, и имеет место следующее

Следствие 1.2. *Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная формация. Если N — нормальная подгруппа группы G и $N/N \cap \Delta(G) \in \mathfrak{F}$, то N представима в виде прямого произведения $N = N_1 \times N_2$, множители которого удовлетворяют следующим условиям:*

1) $N_1 \in \mathfrak{F}$;

2) $\pi(N_2) \cap \pi(\mathfrak{F}) = \varnothing$;

3) $N_2 \subseteq \Delta(G)$.

Следствие 1.3. *Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная формация, содержащая все нильпотентные группы. Если N — нормальная подгруппа группы G и $N/N \cap \Delta(G) \in \mathfrak{F}$, то $N \in \mathfrak{F}$.*

Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая формация. Далее нас будет интересовать строение подгруппы $\Phi_{\theta_1}(G)$ в случае, когда $\theta_1 = \theta_2 \cap \theta$, где θ_2 — m-функтор, выделяющий все $\mathfrak{F}$-абнормальные максимальные подгруппы ($\mathfrak{F}$-абнормальный m-функтор [2]), а θ — произвольный m-функтор группы G. Итак, $\Phi_{\theta_1}(G)$ есть пересечение тех $\mathfrak{F}$-абнормальных максимальных подгрупп группы G, которые выделяются m-функтором θ. Соответствующую данному m-функтору θ_1-подгруппу Фраттини будем обозначать $\Delta_\theta^{\mathfrak{F}}(G)$. Напомним, что $\bar{\theta}$ — дополнительный к θ m-функтор, то есть $M \in \bar{\theta}(G)$ тогда и только тогда, когда максимальная подгруппа M группы G не входит в $\theta(G)$ и всегда $G \in \bar{\theta}(G)$.

Лемма 2. *Пусть θ — некоторый m-функтор, $\bar{\theta}$ — дополнительный к нему m-функтор. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) $\Delta_\theta^{\mathfrak{F}}(G) \cap \Delta_{\bar{\theta}}^{\mathfrak{F}}(G) = \Delta^{\mathfrak{F}}(G)$;

2) подгруппа $\Delta_\theta^{\mathfrak{F}}(G)$ нормальна в G;

3) если подгруппа N нормальна в G и m-функтор θ регулярен, то $\Delta_\theta^{\mathfrak{F}}(G)N/N \subseteq$ $\subseteq \Delta_\theta^{\mathfrak{F}}(G/N)$;

4) если подгруппа N нормальна в G, $N \subseteq \Delta_\theta^{\mathfrak{F}}(G)$ и m-функтор θ регулярен, то $\Delta_\theta^{\mathfrak{F}}(G)/N = \Delta_\theta^{\mathfrak{F}}(G/N)$.

Доказательство. Очевидно, что $\Delta_\theta^{\mathfrak{F}}(G) \cap \Delta_{\bar{\theta}}^{\mathfrak{F}}(G)$ содержится во всех максимальных $\mathfrak{F}$-абнормальных θ-подгруппах и $\bar{\theta}$-подгруппах, а, следовательно, в $\Delta^{\mathfrak{F}}(G)$.

Нормальность следует из определения m-функтора θ и того, что каждая подгруппа, сопряжённая с $\mathfrak{F}$-абнормальной максимальной подгруппой, также является $\mathfrak{F}$-абнормальной максимальной подгруппой группы G.

Пусть N — нормальная подгруппа группы G. Так как m-функтор θ регулярен, то из того, что $M \in \theta(G)$ следует, что $MN/N \in \theta(G/N)$. Если M — $\mathfrak{F}$-абнормальная максимальная подгруппа группы G, то MN/N — $\mathfrak{F}$-абнормальная максимальная, либо тривиальная подгруппа группы G/N. Откуда и следует утверждение леммы.

Допустим, что N — нормальная подгруппа группы G и $N \subseteq \Delta_\theta^{\mathfrak{F}}(G)$. Так как m-функтор θ регулярен, то из того, что M/N — $\mathfrak{F}$-абнормальная максимальная θ-подгруппа группы G/N, следует, что M — $\mathfrak{F}$-абнормальная максимальная θ-подгруппа группы G. Лемма доказана.

Согласно [2] m-функтор θ называется регулярным, если выполняются условия: 1) из $N \trianglelefteq G$ и $M \in \theta(G)$ следует $MN/N \in \theta(G/N)$; 2) из $M/N \in \theta(G/N)$ следует $M \in \theta(G)$.

Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{F}$ — ступенчатая формация, θ — регулярный m-функтор. Тогда*

$$\Delta_\theta^{\mathfrak{F}}(G)/\Phi_\theta(G) = Z_\infty^{\mathfrak{F}}(G/\Phi_\theta(G)).$$

Доказательство. Несложно заметить, что $\Delta_\theta^{\mathfrak{F}}(G) \cap G^{\mathfrak{F}}$ содержится во всех $\mathfrak{F}$-абнормальных максимальных θ-подгруппах и $\mathfrak{F}$-нормальных максимальных подгруппах, а следовательно, в $\Phi_\theta(G)$.

Пусть R/S — главный фактор группы G, причём, $R \subseteq \Delta_\theta^{\mathfrak{F}}(G)$, $S \supseteq \Phi_\theta(G)$. Так как

$$R \cap G^{\mathfrak{F}} \subseteq \Delta_\theta^{\mathfrak{F}}(G) \cap G^{\mathfrak{F}} \subseteq S,$$

то имеем G-изоморфизм:

$$RG^{\mathfrak{F}}/SG^{\mathfrak{F}} \simeq R/(R \cap SG^{\mathfrak{F}}) = R/S(R \cap G^{\mathfrak{F}}) = R/S.$$

Так как $G/SG^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$, то $RG^{\mathfrak{F}}/SG^{\mathfrak{F}}$ $\mathfrak{F}$-централен в $G/SG^{\mathfrak{F}}$, а значит, и в G. Но тогда R/S $\mathfrak{F}$-централен в G. Отсюда получаем $\Delta_\theta^{\mathfrak{F}}(G)/\Phi_\theta(G) \subseteq Z_\infty^{\mathfrak{F}}(G/\Phi_\theta(G))$.

Докажем обратное включение. Так как подгруппа Фраттини факторгруппы $G/\Phi_\theta(G)$ единична, то применяя теорему 8.6 из [1], лемму 2, и учитывая, что $\Delta_\theta^{\mathfrak{F}}(G) \supseteq \Delta^{\mathfrak{F}}(G)$, получаем:

$$\Delta_\theta^{\mathfrak{F}}(G)/\Phi_\theta(G) = \Delta_\theta^{\mathfrak{F}}(G/\Phi_\theta(G)) \supseteq \Delta^{\mathfrak{F}}(G/\Phi_\theta(G)) = Z_\infty^{\mathfrak{F}}(G/\Phi_\theta(G)).$$

Теорема доказана.

Ввиду леммы 8.7 из [1] получаем следующий результат.

Следствие 2.1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — S_n-замкнутая локальная формация, θ — регулярный m-функтор. Тогда $\Delta_\theta^{\mathfrak{F}}(G)/\Phi_\theta(G) \in \mathfrak{F}$.*

Если $\theta(G) \backslash \{G\}$ совпадает с множеством всех максимальных подгрупп, то из теоремы 2 получаем результат Л.А.Шеметкова из [1].

Теорема 3. *Пусть $\mathfrak{F}$ — S_n-замкнутая локальная формация, θ — абнормально полный регулярный m-функтор. Тогда $\Delta_\theta^{\mathfrak{F}}(G) = A \times B$, где*

1) $A \in \mathfrak{F}$,

2) $B \subseteq \Phi_\theta(G)$,

3) $\pi(B) \cap \pi(\mathfrak{F}) = \varnothing$.

Доказательство. Согласно теореме 2 $\Delta_\theta^{\mathfrak{F}}(G)/\Phi_\theta(G)$ является $\mathfrak{F}$-гиперцентром в $G/\Phi_\theta(G)$. По следствию 2.1 $\Delta_\theta^{\mathfrak{F}}(G)/\Phi_\theta(G) \in \mathfrak{F}$. Теперь остаётся применить теорему 1. Теорема доказана.

Следствие 3.1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — S_n-замкнутая локальная формация, содержащая все нильпотентные группы, θ — абнормально полный регулярный m-функтор. Тогда $\Delta_\theta^{\mathfrak{F}}(G) \in \mathfrak{F}$ для любой группы G.*

Если m-функтор θ выделяет в группе G все максимальные подгруппы, то из теоремы 3 вытекает результат М.В.Селькина из [2].

Abstract. Some results on intersections of maximal subgroups in finite groups are obtained.

Литература

1. Л. А. Шеметков, *Формации конечных групп*, Москва, Наука, 1978.

2. М. В. Селькин, *Максимальные подгруппы в теории классов конечных групп*, Минск, Беларуская навука, 1997.

3. Р. В. Бородич, *Об абнормальных подгруппах конечных групп с заданной группой операторов*, Веснiк Вiцебск. дзярж. унiв. iмя П.М. Машэрава. № 2 (2003), 111–115.

Гомельский государственный
университет им. Ф.Скорины

Поступило 22.10.04