Известия Гомельского государственного университета
имени Ф.Скорины, 6(27), 2004

УДК 512.542

# Критические $\omega$-веерные нормально наследственные формации конечных групп

М.А.Корпачева

Общая проблема изучения $\mathfrak{H}_\theta$-критических формаций, где $\mathfrak{H}$ — класс групп, $\theta$ — некоторая непустая совокупность формаций, впервые была поставлена Л.А. Шеметковым на VI Всесоюзном симпозиуме по теории групп в 1980 году [1]. В серии работ (см., например, [2]) А.Н. Скибой получено решение этой проблемы в случае, когда $\theta$ — совокупность всех локальных формаций. Исследованием критических $\omega$-локальных и критических $\omega$-локальных нормально наследственных формаций занимались А.Н. Скиба, В.М. Селькин, И.Н. Сафонова и др. (см., например, [3-4]). В 1999 году В.А. Ведерниковым введенна в рассмотрение концепция частичной веерности [5-6]; локальные формации представляют собой один из видов веерных формаций. В настоящей работе приводится описание критических $\omega$-веерных нормально наследственных формаций конечных групп, тем самым решается вышеуказанная задача Л.А. Шеметкова для частично веерных нормально наследственных формаций.

Рассматриваются только конечные группы. Основные определения и обозначения можно найти в работах [5-9]. Приведем лишь некоторые из них. Запись $G = [A]B$ означает, что группа $G$ есть полупрямое произведение своих подгрупп $A$ и $B$, где $A$ — нормальная подгруппа группы $G$. Монолитической группой называется группа, имеющая единственную минимальную нормальную подгруппу. Пусть $P$ — множество всех простых чисел, $\omega$ — непустое подмножество множества $P$, $\mathfrak{G}_\omega$ — класс всех $\omega$-групп, то есть таких групп $G$, что $\pi(G) \subseteq \omega$, где $\pi(G)$ — множество всех простых делителей порядка группы $G$; $\mathfrak{G}_{q'}$ — класс всех $q'$-групп; $\mathfrak{S}_{cp}$ — класс всех групп, у которых каждый главный $p$-фактор централен. Через $\mathfrak{G}_{Z_{p'}}$ обозначают класс всех $Z_{p'}$-групп, то есть таких групп $G$, что $K(G) \cap (Z_p) = \varnothing$, где $K(G)$ — класс всех групп, изоморфных композиционным факторам группы $G$, $(Z_p)$ — класс групп, порожденный простой $p$-группой $Z_p$. Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая формация групп. Через $\mathfrak{H}\mathfrak{F}$ обозначается произведение формаций $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F}$, т.е. $\mathfrak{H}\mathfrak{F} = (G : G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{H})$, где $G^{\mathfrak{F}}$ — $\mathfrak{F}$-корадикал группы $G$ [7]. Через $G_{\mathfrak{F}}$ обозначается $\mathfrak{F}$-радикал группы $G$, где $\mathfrak{F}$ — непустой класс Фиттинга [7]. $F_{cp}(G)$ — $\mathfrak{S}_{cp}$-радикал группы $G$, $O_p(G)$ — $\mathfrak{N}_p$-радикал группы $G$, $O_{Z_{p'},Z_p}(G)$ — $\mathfrak{G}_{Z_{p'}}\mathfrak{N}_p$-радикал группы $G$; $F_p(G)$ — $\mathfrak{G}_{p'}\mathfrak{N}_p$-радикал группы $G$. Функции $f : \omega \cup \{\omega'\} \to \{$формации групп$\}$, $g : P \to \{$формации групп$\}$, $\delta : P \to \{$непустые формации Фиттинга$\}$ называются соответственно $\omega F$-функцией, $PF$-функцией и $PFR$-функцией. Формация $\omega F(f, \delta) = (G : G/O_\omega(G) \in f(\omega')$ и $G/G_{\delta(p)} \in f(p)$ для всех $p \in \omega \cap \pi(G))$ называется $\omega$-веерной формацией с $\omega$-спутником $f$ и с направлением $\delta$; формация $F(g, \delta) = (G : G/G_{\delta(p)} \in g(p)$ для всех $p \in \pi(G))$ называется веерной формацией со спутником $g$ и с направлением $\delta$ [5]. Направление $\delta$ $\omega$-веерной формации называется $b$-направлением, если $\delta(q)\mathfrak{N}_q = \delta(q)$ для любого $q \in P$; $p$-направлением, если $\mathfrak{G}_{q'}\delta(q) = \delta(q)$ для любого $q \in P$; $r$-направлением, если $\mathfrak{G}_{Z_{q'}}\delta(q) = \delta(q)$ для любого $q \in P$. Направление $\delta$ называется $x_1x_2...x_n$-направлением, если $\delta$ является $x_i$-направлением для любого $i = 1, ..., n$. Через $\delta_0$ обозначается направление $\omega$-полной формации, то есть $\delta_0(p) = \mathfrak{G}_{p'}$ для всех $p \in P$; через $\delta_1$ обозначается направление $\omega$-локальной формации, то есть $\delta_1(p) = \mathfrak{G}_{p'}\mathfrak{N}_p$ для всех $p \in P$; через $\delta_2$ обозначается направление $\omega$-специальной формации, то есть $\delta_2(p) = \mathfrak{G}_{Z_{p'}}\mathfrak{N}_p$ для всех $p \in P$; через $\delta_3$ обозначается направление $\omega$-центральной формации, то есть $\delta_3(p) = \mathfrak{S}_{cp}$ для всех $p \in P$ [6]. Пусть $\psi_1$ и $\psi_2$ - произвольные $\omega F$-функции ($PF$-функции, $PFR$-функции). Говорят, что $\psi_1 \leq \psi_2$ если $\psi_1(p) \subseteq \psi_2(p)$ для всех $p \in \in \omega \cup \{\omega'\}$ (для всех $p \in P$) [5]. Пусть $\mathfrak{H}$ — некоторый класс групп. Следуя [2], $\omega$-веерную нормально наследственную формацию $\mathfrak{F}$ с направлением $\delta$ назовем $\mathfrak{H}_{\omega sn\delta}$-критической формацией или минимальной $\omega$-веерной нормально наследственной не $\mathfrak{H}$-формацией с направлением $\delta$, если $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$, но все собственные $\omega$-веерные нормально наследственные подформации с направлением $\delta$ из $\mathfrak{F}$ в классе $\mathfrak{H}$ содержатся. Аналогично определяются $\mathfrak{H}_{sn\delta}$-критические формации (минимальные веерные нормально наследственные не $\mathfrak{H}$-формации с направлением $\delta$). Формация называется нормально наследственной, если с каждой своей группой $G$ она содержит и все нормальные подгруппы группы $G$. Приведем описание минимальных $\omega$-веерных нормально наследственных не $\mathfrak{H}$-формаций с $br$-направлением $\delta$ таким, что $\delta \leq \delta_3$. Будем использовать следующие сокращения: $\omega sn$-спутник ($sn$-спутник) формации — $\omega$-спутник (спутник), все значения которого являются нормально наследственными формациями; $\mathfrak{H}_{sn}$-критическая формация — минимальная нормально наследственная не $\mathfrak{H}$-формация. Пусть $\mathfrak{X}$ — непустое множество групп. Тогда $\omega snF(\mathfrak{X}, \delta)$ ($snF(\mathfrak{X}, \delta)$) — $\omega$-веерная (веерная) нормально наследственная формация с направлением $\delta$, порожденная множеством $\mathfrak{X}$, $\omega F_{sn}(\mathfrak{X}, \delta)$ ($F_{sn}(\mathfrak{X}, \delta)$) — такая $\omega$-веерная (веерная) формация с направлением $\delta$, порожденная множеством $\mathfrak{X}$, которая обладает хотя бы одним $\omega sn$-спутником ($sn$-спутником).

**Лемма 1.** *Пусть $\mathfrak{F}$ — $\omega$-веерная формация с $p$-направлением $\delta$. Если формация $\mathfrak{F}$ обладает хотя бы одним внутренним $\omega sn$-спутником, то $\mathfrak{F}$ является нормально наследственной формацией.*

*Доказательство.* Пусть $f$ — внутренний $\omega sn$-спутник формации $\mathfrak{F}$. Допустим, что $G \in \mathfrak{F}$, $M$ — нормальная подгруппа группы $G$ и $M \notin \mathfrak{F}$, причем $G$ — группа наименьшего порядка с таким свойством. Тогда $G \neq 1$. Если $G$ — не монолитическая группа, то найдутся две различные минимальные нормальные подгруппы $R$ и $N$ группы $G$, причем $G/R \in \mathfrak{F}$ и $G/N \in \mathfrak{F}$. По индукции $MR/R \cong M/M \cap R \in \mathfrak{F}$ и $MN/N \cong M/M \cap N \in \mathfrak{F}$. Следовательно, $M/M \cap R \cap N \cong M \in \mathfrak{F}$. Противоречие. Поэтому $G$ — монолитическая группа с цоколем $R$, причем $M/R \in \mathfrak{F}$.

Предположим, что $\pi(R) \not\subseteq \omega$. Тогда $O_\omega(G) = 1$ и $G \cong G/O_\omega(G) \in f(\omega')$. Ввиду нормальной наследственности формации $f(\omega')$, имеем $M \in f(\omega')$. Так как $f$ — внутренний $\omega sn$-спутник $\mathfrak{F}$, то $M \in \mathfrak{F}$. Противоречие.

Допустим, что $\pi(R) \subseteq \omega$. По лемме 4 [5] формация $\mathfrak{F}$ обладает таким $\omega$-спутником $h$, что $h(\omega') = \mathfrak{F}$ и $h(q) = f(q)$ для любого $q \in \omega$. Так как $G \in \mathfrak{F}$, то $G/G_{\delta(p)} \in f(p)$ для всех р $\in \pi(G) \cap \omega$. Поскольку $f$ — $\omega sn$-спутник формации $\mathfrak{F}$, то $M/M_{\delta(p)} = M/(M \cap \cap G_{\delta(p)}) \cong (MG_{\delta(p)})/G_{\delta(p)} \in f(p)$ для любого $p \in \pi(M) \cap \omega$. Так как $\pi(R) \subseteq \omega$, то $R \subseteq O_\omega(M)$ и $M/O_\omega(M) \cong (M/R)/(O_\omega(M)/R) \in \mathfrak{F} = h(\omega')$. Поскольку $\delta$ является $p$-направлением, то из $M/R \in \mathfrak{F}$, $M/M_{\delta(p)} \in f(p) = h(p)$ для всех $p \in \omega \cap \pi(R)$ и $M/O_\omega(M) \in h(\omega')$, ввиду леммы 2 [6], получаем, что $M \in \mathfrak{F}$. Противоречие. Лемма доказана.

**Следствие 1.** *Пусть $\mathfrak{F}$ — веерная формация с $p$-направлением $\delta$. Если формация $\mathfrak{F}$ обладает хотя бы одним внутренним $sn$-спутником, то $\mathfrak{F}$ является нормально наследственной формацией.*

**Лемма 2.** *Пусть $f$ — максимальный внутренний $\omega$-спутник $\omega$-веерной формации $\mathfrak{F}$ с $bp$-направлением $\delta$ таким, что $\delta \leq \delta_3$. Формация $\mathfrak{F}$ является нормально наследственной тогда и только тогда, когда $f(p)$ — нормально наследственная формация для всех $p \in \omega \cup \{\omega'\}$.*

*Доказательство.* Необходимость. Пусть $\mathfrak{F}$ — нормально наследственная формация. Поскольку $\delta$ — такое $bp$-направление, что $\delta \leq \delta_3$, то согласно теореме 6 [6], $f(p) = \mathfrak{N}_p f(p)$ для всех $p \in \omega$ и $f(\omega') = \mathfrak{F}$. Поэтому формация $f(\omega')$ является нормально наследственной. Предположим, что найдется такое $p \in \omega$, что формация $f(p)$ не является нормально наследственной и $G$ — такая группа из $f(p)$, которая обладает нормальной подгруппой $M \notin f(p)$, причем $G$ — группа наименьшего порядка с таким свойством. Очевидно, что $G \neq 1$. Как и при доказательстве леммы 1, нетрудно проверить, что $G$ — монолитическая группа с цоколем $R$.

Допустим, что $O_p(G) \neq 1$. Тогда $R \subseteq O_p(G)$. Поскольку $G/R \in f(p)$, то по индукции $M/R \in f(p)$, и значит, $M \in \mathfrak{N}_p f(p) = f(p)$. Противоречие. Следовательно, $O_p(G) = 1$. Согласно лемме 18.8 [8], существует точный неприводимый $F_p[G]$-модуль $K$. Пусть $T = [K]G$. Тогда группа $T$ монолитична с цоколем $K = C_T(K)$. Покажем, что $T_{\delta(p)} = K$. Поскольку $\delta$ является $b$-направлением, то $K \in \mathfrak{N}_p \subseteq \delta(p)\mathfrak{N}_p = \delta(p)$ и $K \subseteq T_{\delta(p)}$. С другой стороны, $\delta_3(p) = \mathfrak{S}_{cp}$ и $T_{\delta_3(p)} = F_{cp}(T) \subseteq C_T(K) = K$. Так как $\delta \leq \delta_3$, то $T_{\delta(p)} \subseteq F_{cp}(T)$, и значит, $T_{\delta(p)} \subseteq K$. Следовательно, $T_{\delta(p)} = K$. Так как $T/K \cong G \in f(p)$, то, ввиду леммы 7 [6], $T \in \mathfrak{N}_p f(p) \subseteq \mathfrak{F}$. Поскольку $KM$ — нормальная подгруппа группы $T$, то $KM \in \mathfrak{F}$. Из $(KM)_{\delta(p)} = T_{\delta(p)} \cap KM = K \cap KM = K$ получаем $(KM)/(KM)_{\delta(p)} = KM/K \cong M \in f(p)$. Противоречие. Таким образом, формация $f(p)$ является нормально наследственной для любого $p \in \omega \cup \{\omega'\}$.

Достаточность следует из леммы 1. Лемма доказана.

**Следствие 2.** *Пусть $f$ — максимальный внутренний спутник веерной формации $\mathfrak{F}$ с $bp$-направлением $\delta$ таким, что $\delta \leq \delta_3$. Формация $\mathfrak{F}$ является нормально наследственной тогда и только тогда, когда $f(p)$ — нормально наследственная формация для всех $p \in P$.*

**Замечание 1.** Из леммы 2 следует, что если $\delta$ - $bp$-направление, удовлетворяющее условию $\delta \leq \delta_3$, то $\omega snF(\mathfrak{X}, \delta) = \omega F_{sn}(\mathfrak{X}, \delta)$, где $\mathfrak{X}$ - непустое множество групп.

Доказательство следующей леммы проводится аналогично доказательству теоремы 5 [5].

**Лемма 3.** *Пусть $\mathfrak{X}$ — непустой класс групп, $\mathfrak{F} = \omega F_{sn}(\mathfrak{X}, \delta)$, где $\delta_0 \leq \delta$. Тогда формация $\mathfrak{F}$ обладает единственным минимальным $\omega sn$-спутником $f$ таким, что $f(\omega') = sn\,\mathrm{form}(G/O_\omega(G) : G \in \mathfrak{X})$, $f(p) = sn\,\mathrm{form}(G/G_{\delta(p)} : G \in \mathfrak{X})$ для всех $p \in \omega \cap \pi(\mathfrak{X})$ и $f(p) = \varnothing$, если $p \in \omega \setminus \pi(\mathfrak{X})$.*

**Следствие 3.** *Пусть $\mathfrak{F}_i$ — $\omega$-веерная формация с направлением $\delta$, где $\delta_0 \leq \delta$, обладающая хотя бы одним $\omega sn$-спутником, и $f_i$ — минимальный $\omega sn$-спутник формации $\mathfrak{F}_i$, $i = 1, 2$. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$, когда $f_1 \leq f_2$.*

**Лемма 4.** *Пусть $\mathfrak{H}$ — непустая $\omega$-веерная нормально наследственная формация с $br$-направлением $\delta$ таким, что $\delta \leq \delta_3$, $h$ — ее максимальный внутренний $\omega$-спутник, $f$ — минимальный $\omega sn$-спутник $\omega$-веерной нормально наследственной формации $\mathfrak{F}$ с направлением $\delta$. Формация $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{H}_{\omega sn\delta}$-критической тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F} = \omega snF(G, \delta)$, где $G$ — группа минимального порядка из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$ с цоколем $P = G^{\mathfrak{H}}$ таким, что если $\pi(P) \subseteq \omega$, то $\Phi(G) = 1$, $\pi(P) = \{p\}$ и формация $f(p)$ является $h(p)_{sn}$-критической, а если $\pi(P) \not\subseteq \omega$, то $f(\omega')$ является $h(\omega')_{sn}$-критической формацией.*

*Доказательство.* Необходимость. Пусть $\mathfrak{F}$ — $\mathfrak{H}_{\omega sn\delta}$-критическая формация и $G$ — группа наименьшего порядка из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$. Тогда $G$ является монолитической группой с цоколем $P = G^{\mathfrak{H}}$ и $\mathfrak{F} = \omega snF(G, \delta)$. Согласно лемме 3 $f(\omega') = sn\,\mathrm{form}(G/O_\omega(G))$, $f(p) = sn\,\mathrm{form}(G/G_{\delta(p)})$ для всех $p \in \omega \cap \pi(G)$ и $f(p) = \varnothing$, если $p \in \omega \setminus \pi(G)$. Поскольку $\delta$ является $br$-направлением, удовлетворяющим условию $\delta \leq \delta_3$, то по теореме 6 [6] $h(\omega') = \mathfrak{H}$ и для любого $p \in \omega$ справедливо $h(p) = \mathfrak{N}_p h(p) = \mathfrak{N}_p h_1(p)$, где $h_1$ — произвольный внутренний $\omega$-спутник формации $\mathfrak{H}$. Кроме того, так как всякое $r$-направление является

$p$-направлением, то по лемме 2 $h$ является $\omega sn$-спутником формации $\mathfrak{H}$.

Пусть $\pi(P) \subseteq \omega$ и $p \in \pi(P)$. Установим, что формация $f(p)$ является $h(p)_{sn}$-критической. Рассмотрим случай, когда $h(p) = \varnothing$. Покажем, что $Z_p \notin \mathfrak{H}$. Пусть $h_2$ — минимальный $\omega sn$-спутник формации $\mathfrak{H}$. Допустим, что $p \in \pi(\mathfrak{H})$. Тогда по лемме 3 $h_2(p) \neq \varnothing$ и поэтому $h(p) = \mathfrak{N}_p h_2(p) \neq \varnothing$. Противоречие. Следовательно, $p \notin \pi(\mathfrak{H})$ и $Z_p \notin \mathfrak{H}$. Так как $p \in \pi(G) \cap \omega$, то $f(p) \neq \varnothing$. Ввиду леммы 7 [6] $Z_p \in \mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{N}_p f(p) \subseteq \subseteq \mathfrak{F}$. Таким образом, $Z_p \in \mathfrak{F} \backslash \mathfrak{H}$ и $G = Z_p$. Отметим, что $\Phi(Z_p) = 1$. Поскольку $\delta$ является $b$-направлением, то $\delta(p)\mathfrak{N}_p = \delta(p)$ и $Z_p \in \mathfrak{N}_p \subseteq \delta(p)$. Тогда $(Z_p)_{\delta(p)} = Z_p$ и $f(p) = sn\,\mathrm{form}(Z_p/(Z_p)_{\delta(p)}) = (1)$. Тем самым установлено, что формация $f(p)$ является $h(p)_{sn}$-критической.

Пусть теперь $h(p) \neq \varnothing$. Предположим, что $\mid \pi(P) \mid > 1$. Тогда $P \in \mathfrak{G}_{Z_{q'}}$ для любого $q \in \pi(P)$. Так как $\delta$ — $r$-направление, то по лемме 1 [6] $G/G_{\delta(q)} \cong (G/P)/(G_{\delta(q)}/P) = = (G/P)/(G/P)_{\delta(q)} \in h(q)$ для всех $q \in \pi(P) = \pi(P) \cap \omega$. Поскольку $P \subseteq O_\omega(G)$, то $G/O_\omega(G) \cong (G/P)/(O_\omega(G)/P) \in \mathfrak{H} = h(\omega')$. Согласно лемме 2 [6] $G \in \mathfrak{H}$. Противоречие. Таким образом, $\mid \pi(P) \mid = 1$ и $\pi(P) = \{p\}$.

Допустим, что $f(p) \subseteq h(p)$. Так как $G \in \mathfrak{F}$, то $G/G_{\delta(p)} \in f(p) \subseteq h(p)$. Кроме того, $G/P \in \mathfrak{H}$. Далее, из $\pi(P) \subseteq \omega$ следует, что $P \subseteq O_\omega(G)$ и $G/O_\omega(G) \cong (G/P)/(O_\omega(G)/P) \in \in \mathfrak{H} = h(\omega')$. Ввиду леммы 2 [6] $G \in \mathfrak{H}$, что невозможно. Поэтому $f(p) \not\subseteq h(p)$. Пусть $\mathfrak{M}$ — собственная нормально наследственная подформация из $f(p)$. Предположим, что $\mathfrak{M} \not\subseteq h(p)$ и $M$ — группа минимального порядка из $\mathfrak{M} \backslash h(p)$. Тогда $M$ является монолитической группой с цоколем $R = M^{h(p)}$. Допустим, что $R \subseteq O_p(M)$. Тогда $M \in \mathfrak{N}_p h(p) = = h(p)$, что невозможно. Следовательно, $O_p(M) = 1$ и по лемме 18.8 [8] существует точный неприводимый $F_p[M]$-модуль $K$. Пусть $T = [K]M$. Тогда группа $T$ монолитична с цоколем $K = C_T(K)$. Как и при доказательстве леммы 2, нетрудно проверить, что $T_{\delta(p)} = K$. Так как $T/K \cong M \in \mathfrak{M}$, то ввиду леммы 7 [6] $T \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}_p f(p) \subseteq \mathfrak{F}$. Поэтому $\omega snF(T,\delta) \subseteq \mathfrak{F}$. Если $\omega snF(T,\delta) = \mathfrak{F}$, то $f(p) = sn\,\mathrm{form}(T/T_{\delta(p)}) = sn\,\mathrm{form}(T/K) = = sn\,\mathrm{form}\,M \subseteq \mathfrak{M}$, что невозможно. Поэтому $\omega snF(T,\delta) \subset \mathfrak{F}$ и $\omega snF(T,\delta) \subseteq \mathfrak{H}$. Тогда $M \cong T/K = T/T_{\delta(p)} \in h(p)$. Противоречие. Следовательно, $\mathfrak{M} \subseteq h(p)$ и формация $f(p)$ является $h(p)_{sn}$-критической.

Покажем, что $\Phi(G) = 1$. Пусть $N$ — группа минимального порядка из $f(p) \setminus \setminus h(p)$. Тогда группа $N$ является монолитической. Как и ранее, нетрудно показать, что $O_p(N) = 1$. Используя лемму 18.8 [8], построим группу $B = [L]N$, где $L$ — точный неприводимый $F_p[N]$-модуль, причем $B$ — монолитическая группа и $C_B(L) = L$. Как и выше, $B_{\delta(p)} = L$. Кроме того, $B \in \mathfrak{N}_p f(p)$ и поэтому $\omega snF(B,\delta) \subseteq \mathfrak{F}$. Если $\omega snF(B,\delta) \subset \mathfrak{F}$, то $B \in \mathfrak{H}$ и $N \cong B/L = B/B_{\delta(p)} \in h(p)$, что невозможно. Следовательно, $\omega snF(B,\delta) = \mathfrak{F}$ и в качестве группы $G$ можно выбрать группу $B$, причем $\Phi(B) = 1$.

Пусть $\pi(P) \not\subseteq \omega$. Покажем, что $f(\omega')$ — $h(\omega')_{sn}$-критическая формация. Так как $P \notin O_\omega(G)$, то $O_\omega(G) = 1$ и $f(\omega') = sn\,\mathrm{form}(G/O_\omega(G)) = sn\,\mathrm{form}\,G \not\subseteq \mathfrak{H} = h(\omega')$. Пусть $\mathfrak{M}$ — собственная нормально наследственная подформация из $f(\omega')$ и $\mathfrak{M}_1 = = \omega snF(\mathfrak{M},\delta)$. Из $\mathfrak{M} \subset f(\omega') \subseteq \mathfrak{F}$ получаем $\mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{F}$. Допустим, что $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{F}$. Тогда $f(\omega') = sn\,\mathrm{form}(M/O_\omega(M) : M \in \mathfrak{M}) \subseteq \mathfrak{M}$. Противоречие. Следовательно, $\mathfrak{M}_1 \subset \mathfrak{F}$, и $\mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{H}$. Поэтому $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H} = h(\omega')$ и формация $f(\omega')$ является $h(\omega')_{sn}$-критической.

Достаточность. Поскольку $G \in \mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$, то $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$. Пусть $\mathfrak{B}$ — собственная $\omega$-веерная нормально наследственная подформация с направлением $\delta$ из $\mathfrak{F}$ и $b$ — ее минимальный $\omega sn$-спутник. По следствию 3 $b \leq f$. Покажем, что $b \leq h$. Пусть $p \in \omega \setminus \pi(G)$. Тогда $b(p) = \varnothing \subseteq h(p)$. Пусть $p \in \omega \cap \pi(G)$. Рассмотрим случай, когда $p \in (\pi(G) \cap \omega) \setminus \pi(P)$. Так как $P \in \mathfrak{G}_{Z_{p'}} \subseteq \mathfrak{G}_{Z_{p'}}\delta(p) = \delta(p)$, то ввиду леммы 1 [6], $b(p) \subseteq f(p) = sn\,\mathrm{form}(G/G_{\delta(p)}) = = sn\,\mathrm{form}((G/P)/(G_{\delta(p)}/P)) = sn\,\mathrm{form}((G/P)/(G/P)_{\delta(p)}) \subseteq h(p)$. Таким образом, $b(p) \subseteq$

$\subseteq h(p)$. Пусть $p \in \pi(P)$. Если $P$ — неабелева $pd$-группа, то $P \in \mathfrak{G}_{Z_{p'}}$ и по лемме 1 [6] $b(p) \subseteq f(p) = sn\,\mathrm{form}(G/G_{\delta(p)}) = sn\,\mathrm{form}((G/P)/(G/P)_{\delta(p)}) \subseteq h(p)$. Следовательно, $b(p) \subseteq h(p)$. Пусть $P$ — абелева $p$-группа. Покажем, что $G_{\delta(p)} = P$. С одной стороны, $P \in \mathfrak{N}_p \subseteq \delta(p)\mathfrak{N}_p = \delta(p)$ и $P \subseteq G_{\delta(p)}$. С другой стороны, $P = F_{cp}(G)$. Действительно, так как $\Phi(G) = 1$, то $G = [P]L$. Допустим, что $F_{cp}(G) \cap L = L_1 \neq 1$, что ввиду монолитичности группы $G$ невозможно. Следовательно, $L_1 = 1$ и $P = F_{cp}(G)$. Так как $\delta \leq \delta_3$, то $G_{\delta(p)} \subseteq F_{cp}(G) = P$. Таким образом, $G_{\delta(p)} = P$. Предположим, что $b(p) = f(p)$. Тогда $G/P = G/G_{\delta(p)} \in f(p) = b(p)$ и по лемме 7 [6] $G \in \mathfrak{N}_p b(p) \subseteq \mathfrak{B}$. Отсюда получаем $\mathfrak{F} = \omega snF(G, \delta) \subseteq \mathfrak{B}$. Противоречие. Следовательно, $b(p) \subset f(p)$ и в силу $h(p)_{sn}$-критичности $f(p)$, имеем $b(p) \subseteq h(p)$.

Покажем, что $b(\omega') \subseteq h(\omega')$. Если $\pi(P) \subseteq \omega$, то $P \subseteq O_\omega(G)$ и $b(\omega') \subseteq f(\omega') = sn\,\mathrm{form}(G/O_\omega(G)) = sn\,\mathrm{form}(G/P)/(O_\omega(G)/P) \subseteq \mathfrak{H} = h(\omega')$. Пусть $\pi(P) \not\subseteq \omega$. Предположим, что $b(\omega') = f(\omega')$. Так как $P \not\subseteq O_\omega(G)$, то $G \in sn\,\mathrm{form}\, G = sn\,\mathrm{form}(G/O_\omega(G)) = f(\omega') = b(\omega') \subseteq \mathfrak{B}$, что невозможно. Следовательно, $b(\omega') \subset f(\omega')$ и поэтому $b(\omega') \subseteq h(\omega')$. Таким образом, $b \leq h$ и $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{H}$. Тем самым установлено, что формация $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{H}_{\omega sn\delta}$-критической. Лемма доказана.

**Следствие 4.** *Пусть $\mathfrak{H}$ — непустая веерная нормально наследственная формация с $br$-направлением $\delta$ таким, что $\delta \leq \delta_3$, $h$ — ее максимальный внутренний спутник, $f$ — минимальный $sn$-спутник веерной нормально наследственной формации $\mathfrak{F}$ с направлением $\delta$. Формация $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{H}_{sn\delta}$-критической тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F} = snF(G, \delta)$, где $G$ — монолитическая группа из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$ с цоколем $P = G^{\mathfrak{H}}$ таким, что $\Phi(G) = 1$, $\pi(P) = \{p\}$ и формация $f(p)$ является $h(p)_{sn}$-критической.*

Напомним, что формационно критическая группа $G$ называется $sn$-базисной группой, если формация $sn\,\mathrm{form}\, G$ содержит единственную максимальную нормально наследственную подформацию. Формационно критическую группу $G$ назовем $\omega sn\delta$-базисной ($sn\delta$-базисной), если формация $\omega snF(G, \delta)$ (формация $snF(G, \delta)$) содержит единственную максимальную $\omega$-веерную (веерную) нормально наследственную подформацию с направлением $\delta$. Максимальной $\theta$-подформацией $\theta$-формации $\mathfrak{F}$ называется такая собственная $\theta$-подформация $\mathfrak{M}$ формации $\mathfrak{F}$, что для любой $\theta$-формации $\mathfrak{B}$, удовлетворяющей включению $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{B} \subset \mathfrak{F}$, имеет место равенство $\mathfrak{M} = \mathfrak{B}$, где $\theta$ — некоторая совокупность формаций.

**Лемма 5.** *Пусть $G = [P]H$ — монолитическая группа с цоколем $P = C_G(P)$, где $P$ — $p$-группа, $p \in \omega$, $H$ — $sn$-базисная группа и $\mathfrak{M}$ — максимальная нормально наследственная подформация из $sn\,\mathrm{form}\, H$. Тогда $G$ является $\omega sn\delta$-базисной группой, где $\delta$ — $b$-направление такое, что $\delta \leq \delta_3$.*

*Доказательство.* Пусть $f$ — минимальный $\omega sn$-спутник формации $\mathfrak{F} = \omega snF(G, \delta)$, $h$ — такая $\omega F$-функция, что $h(\omega') = sn\,\mathrm{form}(G/O_\omega(G))$, $h(q) = sn\,\mathrm{form}(G/G_{\delta(q)})$ для всех $q \in (\pi(G) \cap \omega) \setminus \{p\}$, $h(p) = \mathfrak{M}$, $h(q) = \varnothing$, если $q \in \omega \setminus \pi(G)$, и $\mathfrak{H} = \omega F(h, \delta)$. По лемме 3 $f(\omega') = sn\,\mathrm{form}(G/O_\omega(G))$, $f(p) = sn\,\mathrm{form}(G/G_{\delta(p)})$ для всех $p \in \pi(G) \cap \omega$, $f(p) = \varnothing$ для всех $p \in \omega \setminus \pi(G)$. Пусть $q = p$. Так как $\delta$ — $b$-направление, то $\delta(p)\mathfrak{N}_p = \delta(p)$ и $P \in \mathfrak{N}_p \subseteq \delta(p)$. Тогда $P \subseteq G_{\delta(p)}$. С другой стороны, $G_{\delta(p)} \subseteq F_{cp}(G) \subseteq C_G(P) = P$. Таким образом, $G_{\delta(p)} = P$ и $h(p) = \mathfrak{M} \subset sn\,\mathrm{form}\, H = sn\,\mathrm{form}(G/P) = sn\,\mathrm{form}(G/G_{\delta(p)}) = f(p)$. Поэтому, $h \leq f$ и $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{F}$.

Покажем, что $\mathfrak{H}$ — единственная максимальная $\omega$-веерная нормально наследственная подформация с направлением $\delta$ из $\mathfrak{F}$. Пусть $\mathfrak{B}$ — собственная $\omega$-веерная нормально наследственная подформация с направлением $\delta$ из $\mathfrak{F}$ и $b$ — ее минимальный $\omega sn$-спутник. По следствию 3 $b \leq f$. Пусть $q = p$. Допустим, что $b(p) = f(p)$. Тогда $G/P \in b(p)$. Так как $P \in \mathfrak{N}_p$, то по лемме 7 [6] $G \in \mathfrak{N}_p b(p) \subseteq \mathfrak{B}$, что невозможно. Поэтому,

$b(p) \subset f(p) = sn\,\mathrm{form}\,H$ и $b(p) \subseteq \mathfrak{M} = h(p)$. Следовательно, $b \le h$ и $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{H}$. Таким образом, $\mathfrak{H}$ — единственная максимальная $\omega$-веерная нормально наследственная подформация с направлением $\delta$ из $\mathfrak{F}$. Согласно теореме 53.44 [10] группа $G$ является критической, а следовательно и формационно критической. Тем самым установлено, что $G$ — $\omega sn\delta$-базисная группа. Лемма доказана.

**Следствие 5.** *Пусть $G = [P]H$ — монолитическая группа с цоколем $P = C_G(P)$, где $P$ — $p$-группа, $H$ — $sn$-базисная группа и $\mathfrak{M}$ — максимальная нормально наследственная подформация формации $sn\,\mathrm{form}\,H$. Тогда $G$ является $sn\delta$-базисной группой, где $\delta$ — $b$-направление такое, что $\delta \le \delta_3$.*

**Теорема 1.** *Пусть $\mathfrak{H}$ — непустая $\omega$-веерная нормально наследственная формация с $br$-направлением $\delta$ таким, что $\delta \le \delta_3$, $h$ — ее максимальный внутренний $\omega$-спутник. $\omega$-Веерная нормально наследственная формация $\mathfrak{F}$ с направлением $\delta$ является $\mathfrak{H}_{\omega sn\delta}$-критической тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F} = \omega snF(G,\delta)$, где $G$ — такая $\omega sn\delta$-базисная группа с цоколем $P = G^{\mathfrak{H}}$, что выполняется одно из условий:*

*1) $G = P$ — группа простого порядка $p \in \omega$;*

*2) $G = [P]H$, где $P = C_G(P)$ — $p$-группа, $p \in \omega$, $H$ — $sn$-базисная группа с цоколем $Q = H^{h(p)}$ и максимальная нормально наследственная подформация из $sn\,\mathrm{form}\,H$ содержится в $h(p)$;*

*3) $G$ — $sn$-базисная группа, $\pi(P) \not\subseteq \omega$, $P = G^{h(\omega')}$ и максимальная нормально наследственная подформация из $sn\,\mathrm{form}\,G$ содержится в $h(\omega')$.*

*Доказательство.* Необходимость. Пусть $f$ — минимальный $\omega sn$-спутник формации $\mathfrak{F}$. По лемме 4 $\mathfrak{F} = \omega snF(G,\delta)$, где $G$ — монолитическая группа из $\mathfrak{F}\backslash\mathfrak{H}$ с цоколем $P = G^{\mathfrak{H}}$, причем если $\pi(P) \subseteq \omega$, то $\Phi(G) = 1$, $\pi(P) = \{p\}$ и формация $f(p)$ является $h(p)_{sn}$-критической, а если $\pi(P) \not\subseteq \omega$, то формация $f(\omega')$ является $h(\omega')_{sn}$-критической. По лемме 3 $f(\omega') = sn\,\mathrm{form}(G/O_\omega(G))$, $f(p) = sn\,\mathrm{form}(G/G_{\delta(p)})$ для любого $p \in \omega \cap \pi(G)$ и $f(p) = \varnothing$, если $p \in \omega \setminus \pi(G)$. Согласно теореме 6 [6] $h(\omega') = \mathfrak{H}$ и для любого $p \in \omega$ справедливо $h(p) = \mathfrak{N}_p h(p) = \mathfrak{N}_p h_1(p)$, где $h_1$ — произвольный внутренний $\omega$-спутник формации $\mathfrak{H}$. Ввиду леммы 2, $h$ является $\omega sn$-спутником формации $\mathfrak{H}$.

Пусть $\pi(P) \subseteq \omega$. Предположим, что $P$ — неабелева $pd$-группа. Тогда $P \in \mathfrak{G}_{Z_{p'}}$. Так как $\delta$ является $r$-направлением, то $\mathfrak{G}_{Z_{p'}}\delta(p) = \delta(p)$ и по лемме 1 [6] $G/G_{\delta(p)} \cong (G/P)/(G/P)_{\delta(p)} \in h(p)$. Пусть $q \in (\pi(G) \cap \omega) \setminus \pi(P)$. Тогда $P \in \mathfrak{G}_{Z_{q'}}$ и, ввиду леммы 1 [6], $G/G_{\delta(q)} \cong (G/P)/(G/P)_{\delta(q)} \in h(q)$. Так как $\pi(P) \subseteq \omega$, то $P \subseteq O_\omega(G)$ и $G/O_\omega(G) \cong (G/P)/(O_\omega(G)/P) \in \mathfrak{H} = h(\omega')$. Следовательно, $G \in \mathfrak{H}$. Противоречие. Поэтому $P$ — абелева $p$-группа. Рассмотрим случай, когда $p \notin \pi(\mathfrak{H})$. Так как $p \in \pi(G) \cap \omega$, то $f(p) \neq \varnothing$ и, согласно лемме 7 [6], $P \in \mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{N}_p f(p) \subseteq \mathfrak{F}$. Так как $P \notin \mathfrak{H}$, то $P \in \mathfrak{F}\backslash\mathfrak{H}$ и поэтому $G = P$ — группа простого порядка $p \in \omega$.

Покажем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_p$. Как отмечено выше, $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{F}$. Проверим, что $\mathfrak{N}_p$ — $\omega$-веерная формация с направлением $\delta$. Пусть $\mathfrak{T} = \omega F(t,\delta)$, где $t$ — такая $\omega F$-функция, что $t(p) = (1)$, $t(q) = \varnothing$ для всех $q \in \omega \setminus \{p\}$ и $t(\omega') = \mathfrak{N}_p$. Покажем, что $\mathfrak{N}_p = \mathfrak{T}$. С одной стороны, если $A \in \mathfrak{N}_p$, то, ввиду равенства $\delta(p)\mathfrak{N}_p = \delta(p)$, имеем $A \in \mathfrak{N}_p \subseteq \delta(p)$, и значит, $A/A_{\delta(p)} = 1 \in t(p)$. Кроме того, $A/O_\omega(A) \in \mathfrak{N}_p = t(\omega')$. Следовательно, $A \in \mathfrak{T}$, и поэтому $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{T}$. Допустим, что $\mathfrak{N}_p \subset \mathfrak{T}$ и $B$ — группа минимального порядка из $\mathfrak{T}\backslash\mathfrak{N}_p$. Тогда группа $B$ монолитична с цоколем $C = B^{\mathfrak{N}_p}$. Если найдется такое число $q \in (\omega \cap \pi(B)) \setminus \{p\}$, то из $B \in \mathfrak{T}$ получим $B/B_{\delta(q)} \in t(q) = \varnothing$, что невозможно. Следовательно, $\pi(B) \cap \omega = \{p\}$. Предположим, что $C \not\subseteq O_\omega(B)$. Тогда из $B \in \mathfrak{T}$ получим $B \cong B/O_\omega(B) \in t(\omega') = \mathfrak{N}_p$. Противоречие. Поэтому $C \subseteq O_\omega(B)$, и значит, $\pi(C) \subseteq \omega \cap \pi(B) = \{p\}$. Из $C \in \mathfrak{N}_p$ и $B/C \in \mathfrak{N}_p$ следует, что $B \in \mathfrak{N}_p$. Противоречие. Тем самым установлено, что $\mathfrak{N}_p = \mathfrak{T}$. Поскольку $\mathfrak{N}_p$ — $\omega$-веерная формация с направлением $\delta$ и $P \in \mathfrak{N}_p$, то

$\mathfrak{F} = \omega snF(P, \delta) \subseteq \mathfrak{N}_p$. Следовательно, $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_p$.

Покажем, что формация $\mathfrak{F}$ обладает единственной максимальной $\omega$-веерной нормально наследственной подформацией с направлением $\delta$. Пусть $\mathfrak{F}_1 \neq \varnothing$ — собственная $\omega$-веерная нормально наследственная подформация с направлением $\delta$ из $\mathfrak{F}$, $f_1$ — ее минимальный $\omega sn$-спутник. Тогда $\pi(\mathfrak{F}_1) \subseteq \pi(\mathfrak{F}) = \{p\}$. Предположим, что $\pi(\mathfrak{F}_1) = \{p\}$. Тогда $\mathrm{P} \in \mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{N}_p f_1(p) \subseteq \mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_1$. Противоречие. Следовательно, $\pi(\mathfrak{F}_1) = \varnothing$ и $\mathfrak{F}_1 = (1)$ — единственная максимальная $\omega$-веерная нормально наследственная подформация с направлением $\delta$ из $\mathfrak{F}$. Согласно следствию 51.34 [10] группа $G$ является критической, а следовательно, и формационно критической. Таким образом, $G = P$ — $\omega sn\delta$-базисная группа, и формация $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию 1).

Пусть $p \in \pi(\mathfrak{H})$ и $H$ — группа минимального порядка из $f(p) \setminus h(p)$. Тогда $H$ монолитическая группа с цоколем $Q = H^{h(p)}$. Если $O_p(H) \neq 1$, то $Q \subseteq O_p(H)$ и $H \in \mathfrak{N}_p h(p)$. Противоречие. Поэтому $O_p(H) = 1$ и ввиду леммы 18.8 из [8], существует точный неприводимый $F_p[H]$-модуль $T$. Пусть $R = [T]H$. Тогда $R$ монолитична с цоколем $T = C_R(T)$. Согласно лемме 7 [6] $R \in \mathfrak{N}_p f(p) \subseteq \mathfrak{F}$ и $\omega snF(R, \delta) \subseteq \mathfrak{F}$. Если $\omega snF(R, \delta) \subset \mathfrak{F}$, то $R \in \mathfrak{H}$ и $R/R_{\delta(p)} \in h(p)$. Покажем, что $T = R_{\delta(p)}$. Так как $T \in \mathfrak{N}_p \subseteq \delta(p)\mathfrak{N}_p = \delta(p)$, то $T \subseteq R_{\delta(p)}$. Из $\delta \leq \delta_3$ следует, что $R_{\delta(p)} \subseteq F_{cp}(R) \subseteq C_R(T) = T$. Таким образом, $T = R_{\delta(p)}$ и $R/R_{\delta(p)} = R/T \cong H \in h(p)$, что невозможно. Следовательно, $\omega snF(R, \delta) = \mathfrak{F}$, и в качестве группы $G$ можно выбрать группу $R$.

Покажем, что $H$ — $sn$-базисная группа. Пусть $\mathfrak{X}$ — множество всех тех собственных секций группы $H$, которые принадлежат $\mathrm{form}\, H$. Отметим, что $\mathrm{form}\, H \subseteq sn\,\mathrm{form}\, H = f(p)$. В силу выбора группы $H$ справедливо включение $\mathfrak{X} \subseteq h(p)$. Поэтому $H \notin sn\,\mathrm{form}\,\mathfrak{X}$ и, значит, $H \notin \mathrm{form}\,\mathfrak{X}$. Следовательно, $H$ является формационно критической группой. Применяя лемму Цорна, нетрудно установить, что формация $f(p) = sn\,\mathrm{form}\, H$ обладает максимальными нормально наследственными подформациями. Допустим, что $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ — различные максимальные нормально наследственные подформации из $f(p)$. Тогда $\mathfrak{M}_1 \subseteq h(p)$ и $\mathfrak{M}_2 \subseteq h(p)$, а следовательно, и $\mathfrak{C} = sn\,\mathrm{form}(\mathfrak{M}_1 \cup \mathfrak{M}_2) \subseteq h(p)$. Так как $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ — максимальные нормально наследственные подформации из $f(p)$, то $\mathfrak{C} = f(p) \subseteq h(p)$, что невозможно. Следовательно, $sn\,\mathrm{form}\, H$ обладает единственной максимальной нормально наследственной подформацией, содержащейся в $h(p)$, и $H$ является $sn$-базисной группой. Ввиду леммы 5, $R$ — $\omega sn\delta$-базисная группа. Таким образом, формация $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию 2).

Пусть $\pi(P) \not\subseteq \omega$. Тогда $f(\omega') = sn\,\mathrm{form}(G/O_\omega(G)) = sn\,\mathrm{form}\, G$. Так как $h(\omega') = \mathfrak{H}$, то формация $f(\omega')$ является $\mathfrak{H}_{sn}$-критической. Пусть $S$ — группа минимального порядка из $f(\omega') \setminus \mathfrak{H}$. Тогда $S$ монолитическая группа с цоколем $L = S^{\mathfrak{H}}$. Так как $f(\omega') = sn\,\mathrm{form}\, S \not\subseteq \mathfrak{F}$, то $S \in \mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$. Из того, что $S \in \mathfrak{F}$, следует, что $\omega snF(S, \delta) \subseteq \mathfrak{F}$. Так как $S \notin \mathfrak{H}$, то $\omega snF(S, \delta) \not\subseteq \mathfrak{H}$. Следовательно, $\omega snF(S, \delta) = \mathfrak{F}$. Кроме того, можем считать, что $\pi(L) \not\subseteq \omega$. Покажем, что $S$ — $sn$-базисная группа. Пусть $\mathfrak{X}$ — множество всех тех собственных секций группы $S$, которые принадлежат $\mathrm{form}\, S$. Отметим, что $\mathrm{form}\, S \subseteq sn\,\mathrm{form}\, S = f(\omega')$. В силу выбора группы $S$ имеем $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{H}$. Поэтому $S \notin sn\,\mathrm{form}\,\mathfrak{X}$ и значит, $S \notin \mathrm{form}\,\mathfrak{X}$. Тем самым установлено, что группа $S$ является формационно критической. Ввиду леммы Цорна, формация $sn\,\mathrm{form}\, S$ обладает максимальными нормально наследственными подформациями. Допустим, что $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ — различные максимальные нормально наследственные подформации из $sn\,\mathrm{form}\, S$. Тогда, как и выше, $f(\omega') = sn\,\mathrm{form}\, S = sn\,\mathrm{form}(\mathfrak{M}_1 \cup \mathfrak{M}_2) \subseteq \mathfrak{H}$, что невозможно. Следовательно, $sn\,\mathrm{form}\, S$ обладает единственной максимальной нормально наследственной подформацией, содержащейся в $\mathfrak{H} = h(\omega')$ и $S$ является $sn$-базисной группой. Ввиду леммы 3 и следствия 3 формация $\omega snF(S, \delta) = \mathfrak{F}$ содержит лишь конечное множество $\omega$-веерных нормально наследственных подформаций с направлением $\delta$. Допустим, что $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ — различные максимальные $\omega$-веерные нормально наследственные подформации с направлением $\delta$ из $\mathfrak{F}$. Тогда $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{H}$, $\mathfrak{F}_2 \subseteq \mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F} = \omega snF((\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2), \delta) \subseteq \mathfrak{H}$. Противоречие. Следовательно, $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{F}_2$ и $S$ является $\omega sn\delta$-базисной группой. Таким образом, формация $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию 3).

Достаточность. Пусть $G$ — группа типа 1). Покажем, что $f(p)$ является $h(p)_{sn}$-критической формацией. Так как $G \in \mathfrak{N}_p \subseteq \delta(p)\mathfrak{N}_p = \delta(p)$, то $G = G_{\delta(p)}$ и $f(p) = (1)$. Если $p \in \pi(\mathfrak{H})$, то по лемме 7 [6] $G \in \mathfrak{N}_p h(p) \subseteq \mathfrak{H}$. Противоречие. Следовательно, $p \notin \mathfrak{H}$ и в силу строения $h$, получим $h(p) = \varnothing$. Тогда по лемме 4 $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{H}_{\omega sn\delta}$-критической формацией.

Пусть $G$ — группа типа 2). Так как $G_{\delta(p)} = P$, то $f(p) = sn\,\mathrm{form}(G/P) = sn\,\mathrm{form}\,H \not\subseteq h(p)$. Поскольку единственная максимальная нормально наследственная подформация из $sn\,\mathrm{form}\,H = f(p)$ содержится в $h(p)$, то формация $f(p)$ является $h(p)_{sn}$-критической. Тогда по лемме 4 формация $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{H}_{\omega sn\delta}$-критической.

Пусть $G$ — группа типа 3). Тогда $f(\omega') = sn\,\mathrm{form}\,G \not\subseteq \mathfrak{H} = h(\omega')$. Так как единственная максимальная нормально наследственная подформация из $sn\,\mathrm{form}\,G$ содержится в $h(\omega')$, то $f(\omega')$ является $h(\omega')_{sn}$-критической формацией. По лемме 4 $\mathfrak{F}$ — $\mathfrak{H}_{\omega sn\delta}$-критическая формация. Теорема доказана.

**Следствие 6.** *Пусть $\mathfrak{H}$ — непустая веерная нормально наследственная формация с $br$-направлением $\delta$ таким, что $\delta \le \delta_3$, $h$ — ее максимальный внутренний спутник. Веерная нормально наследственная формация $\mathfrak{F}$ с направлением $\delta$ является $\mathfrak{H}_{sn\delta}$-критической тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F} = snF(G, \delta)$, где $G$ — такая $sn\delta$-базисная группа с цоколем $P = G^{\mathfrak{H}}$, что выполняется одно из условий:*

*1) $G = P$ — группа простого порядка $p$;*

*2) $G = [P]H$, где $P = C_G(P)$ — $p$-группа, $H$ — $sn$-базисная группа с цоколем $Q = H^{h(p)}$ и максимальная нормально наследственная подформация из $sn\,\mathrm{form}\,H$ содержится в $h(p)$.*

**Замечание 2.** В качестве следствий из теоремы 1 получаем описание критических $\omega$-центральных нормально наследственных и критических $\omega$-специальных нормально наследственных формаций. Отметим, что направление $\delta_1$ $\omega$-локальной формации не является $br$-направлением.

**Abstract.** In the paper some critical formations of finite groups are studied.

## Литература

1. Л.А. Шеметков, *Экраны ступенчатых формаций*, В сб.: *VI Всесоюзный симпозиум по теории групп (сборник научных трудов)*, Киев, Наукова думка, 1980, с. 37-50.

2. А.Н. Скиба, *О критических формациях*, в книге: *Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры*, Киев, ИМ АН Украины, 1993, с. 250-268.

3. В.М. Селькин, А.Н.Скиба, *О $\mathfrak{H}_{\theta\omega}$-критических формациях*, Вопросы алгебры, № 14 (1999), 127-131.

4. И.Н. Сафонова, *О минимальных $\omega$-локальных не $\mathfrak{H}$-формациях*, Весці НАН Беларусі, Сер. фіз.-мат.навук, № 2 (1999), с. 23–27.

5. В.А. Ведерников, М.М. Сорокина, *$\omega$-веерные формации и классы Фиттинга конечных групп*, Матем. заметки, **71** № 1 (2002), 43-60.

6. В.А. Ведерников, *О новых типах $\omega$-веерных формаций конечных групп*, Киев, Укр.матем.конгресс. Алг. і теор. чисел. Праці. 2002, с. 36–45.

7. Л.А. Шеметков, *Формации конечных групп*, Москва, Наука, 1978.

8. Л.А. Шеметков, А.Н.Скиба, *Формации алгебраических систем*, Москва, Наука, 1978.

9. А.Н. Скиба, *Алгебра формаций*, Мінск, Беларуская навука, 1997.

10. Х. Нейман, *Многообразия групп*, Москва, Мир, 1969.

Брянский государственный
университет им. И.Г.Петровского

Поступило 22.01.04